SECONDA PARTE: generare nuovi Primi

Unicisti: famiglie di numeri Primi

Provando ad usare i numeri Primi come risuonatori fondamentali dell'intero mondo dei numeri Naturali, ci siamo imbattuti presto in un singolare tipo di numeri, che abbiamo chiamato Unicisti (già evidenziati i letteratura col termine *Repunits*). Si tratta di numeri formati dalla sola cifra 1, che si dimostrano estremamente interessanti. Intanto perché sono numeri la cui densità è pari al numero di cifre 1 di cui sono composti: se ad esempio si considera la divisione 1/111, troviamo che il risultato è un numero con periodo 009, di lunghezza appunto pari a 3. Analogamente considerando 1/11111, il risultato sarà un periodo pari a 00009, lunghezza di 5 cifre. Quindi posso definire un Unicista di densità d come il numero formato dalla ripetizione di d volte la cifra 1. D'ora in avanti per indicare un numero formato dalla ripetizione di una data cifra o sequenza di cifre useremo la simbologia ^{r}(S), dove S è una sequenza di cifre e r è il numero delle ripetizioni:

> Esempi:
> ${}^{2}(3)=33$
> ${}^{4}(230)=230230230230$

Per gli Unicisti, che possono essere indicati con la simbologia ${}^{r}(1)$, definiamo però anche la simbologia ${}^{d}U$, dove la d indica il grado dell'Unicista, che corrisponde alla sua densità e anche al numero di ripetizioni della cifra 1.

> Esempi:
> ${}^{2}U=11$, d=2
> ${}^{8}U=11111111$, d=8

Gli Unicisti sono protagonisti di un'importantissima proprietà dei numeri Primi: si può dimostrare infatti che ogni Unicista definisce un insieme finito che contiene TUTTI i Primi di quella densità, cioè:

> **non può esistere un numero Primo N>^{d}U tale che d sia la densità di N**

Questa affermazione può essere facilmente dimostrata. Per la definizione di densità, dato un numero N, la sua d (d fondamentale) è il numero di cifre decimali che costituiscono il periodo della divisione 1/N.
Il quoziente 1/N avrà tanti zeri decimali all'inizio del periodo quante sono le cifre di N meno una (regola elementare delle divisioni). Ecco alcuni esempi:

1/7=0,142857142857….
Cioè per N=7, d=6 e il numero di zeri del periodo è 0. Infatti 7 è fatto da una sola cifra, e 1-1=0

1/41=0,0243902439….
d=5, il numero di zeri iniziali del periodo è 1. Infatti 41 ha 2 cifre (2-1=1)

1/123=0,0081300813….
123 ha 3 cifre, infatti il Ciclo inizia con 2 zeri. La d è 5, perché il numero totale di cifre del periodo è 5.

Molti N possono avere densità d, ma non sono infiniti, potendo avere al massimo d cifre. Infatti, il più piccolo periodo di d cifre – corrispondente all'N più grande – è quello formato da d-1 zeri seguiti dalla sola cifra 1. L'N che dà questo Ciclo è 9999…9, cioè un numero fatto da d volte la cifra 9. Per comodità indichiamolo con ${}^{d}(9)$. Questo è l'N più grande che può avere densità d. E quindi anche il Primo più grande con densità d deve essere contenuto nell'insieme dei

numeri Naturali definito da $^d(9)$. Quindi esiste un "tetto" ai numeri Primi di densità *d*. Finora abbiamo dimostrato che possono avere al massimo *d* cifre, ma possiamo ridurre ulteriormente il nostro orizzonte? Certamente. Vediamo come.
Ogni N non Primo deve necessariamente essere il prodotto di N Primi. Applichiamo questo concetto al nostro "orizzonte provvisorio" $^d(9)$, che non è Primo essendo divisibile almeno per 9. Possiamo scrivere $^d(9)$ anche così:

$^d(9)=3 * 3 * {}^d(1)$

e poiché daremo a $^d1$ un ruolo molto particolare, usiamo per questo numero il simbolo che gli compete, quello già definito per l'Unicista ^dU. Quindi riscriviamo:

$^d(9)=3 * 3 * {}^dU$

Notare che questa relazione vale anche per *d*=1. Infatti se *d*=1, $^d(9)=9$ e $^dU=1$. Come si diceva nell'introduzione, il 3 è una sorta di numero neutro nel mondo dei Primi, avendo appunto densità unitaria (in ogni caso è l'unico Primo di densità 1, come sarà chiaro più avanti).
Per *d*>1 si può vedere come la relazione appena enunciata consenta di individuare un orizzonte finito per i Primi di densità *d*. **Infatti se è vero che qualsiasi N Naturale non Primo deve essere il prodotto di Primi, allora l'orizzonte $^d9$ – che rappresenta un insieme di numeri N che sicuramente contiene TUTTI gli N di densità *d* – deve essere il prodotto di più fattori Primi. Essendo $^d9$ sempre esprimibile anche come $^d9=3 * 3 * {}^dU$, ed essendo 3 un Primo di densità diversa da *d* (ricordare che *d*>1, e che invece la *d* di 3 è 1), TUTTI i Primi di densità *d* devono necessariamente essere divisori di ^dU.** Quindi abbiamo dimostrato che ^dU definisce il limite massimo per un Primo di densità *d*, e contemporaneamente che ^dU deve avere tra i suoi fattori Primi TUTTI i Primi di quella densità. In altri termini:

Non esistono numeri N>^dU che possono essere Generatori di quella *d*

Pertanto ^dU definisce l'insieme finito dei fattori Primi con densità *d*.

Dalla definizione di densità e dalle sue proprietà fondamentali risulta anche che un $^{d'}G$ con *d'*>*d* non può essere un divisore di ^dU. Sappiamo infatti che ogni Composto ha una densità corrispondente al mcm delle densità dei Primi che lo dividono, e quindi un qualsiasi N di densità *d* non può avere tra i suoi divisori un P con densità maggiore di quella *d*.

La distribuzione dei numeri Primi: una nuova visione

Per secoli abbiamo cercato di trovare una logica nella distribuzione dei numeri Primi lungo l'asse dei numeri Naturali. Che senso ha la sequenza 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 31, 37, 41, 43…… ecc? Perché i numeri si addensano e si rarefanno in maniera così disordinata? Abbiamo visto che però se capovolgiamo la logica con cui approcciamo il problema, forse un senso lo troviamo: i numeri Primi potrebbero essere quelli che impongono un ordine a tutti gli altri, e non viceversa. La sequenza con cui i Primi compaiono scorrendo l'elenco dei numeri Naturali potrebbe anche non avere un significato speciale, ma sicuramente i Primi appaiono raggruppati in insiemi secondo una caratteristica – la densità – che compare quando consideriamo i Primi come divisori.
Abbiamo visto che gli Unicisti definiscono insiemi di numeri Primi, e il criterio di appartenenza a ogni insieme è quello che noi abbiamo definito "densità". Il concetto nuovo che possiamo affermare con certezza è che ogni insieme di densità è FINITO. Ci siamo ostinati per secoli a cercare di capire perché dopo il 7 venisse proprio l'11, e invece probabilmente l'ordine semplicemente non era quello giusto. "Dopo" il 7 viene il 13, e dopo basta, non ci sono altri Primi in quell'insieme. Invece l'11 è l'unico elemento dell'insieme di densità 2. Altri insiemi sono più numerosi e apparentemente molto assortiti, come l'insieme dei Primi di densità 13, che sono solo tre: 53, 79 e 265371653.
I numeri Primi possono essere messi in ordine, ognuno in una famiglia di densità. E l'aver riconosciuto questa organizzazione in famiglie ci consente di scoprire proprietà più generali dei numeri Naturali, e di capire in maniera più profonda quanto tutti i numeri si distribuiscano dentro e attorno a queste famiglie di densità generate dai Primi a cui fanno capo.

Fattorializzazione degli Unicisti

E' stato osservato che dato ^dU, se *d* è un numero Primo, U è Primo o è il prodotto di tutti i Generatori di quella *d*.
Se invece *d* è un numero Composto, U è il prodotto di tutti i Generatori di *d*, di tutti i Generatori di tutti i sottomultipli di *d* e di altri Primi che apparentemente seguono regole più complesse.

Il caso più generale di d Composta comprende in realtà anche il caso particolare di d Prima: infatti se d è Prima non esistono sottomultipli di d e quindi l'insieme dei fattori che costituiscono ${}^{d}U$ è formato dai soli ${}^{d}G$. Se ${}^{d}U$ stesso è Primo, l'insieme ha un solo elemento che è ${}^{d}U$.

Esempi:
d=7 (non ha sottomultipli), ${}^{7}U$=1111111= [${}^{7}G$]=[239 * 4649]=1111111

d=19, ${}^{19}U$ è Primo ed è quindi l'unico ${}^{19}G$

d=6 (sottomultipli 3 e 2, un sottomultiplo - il 3 - è Primo), ${}^{6}U$=3* [${}^{6}G$] * [${}^{3}G$] * [${}^{2}G$] = 3 * [7 * 13] * [37] *[11]=111111

d=8 (sottomultipli 4 e 2), ${}^{8}U$= [${}^{8}G$] * [${}^{4}G$] * [${}^{2}G$] = [73 * 137] * [101] * [11]=11111111

Analizzando centinaia di casi si può *osservare* che gli Unicisti si scompongono sempre seguendo una regola precisa:
la fattorializzazione di un Unicista si ottiene prendendo tutti i G della *d* e delle *d* sottomultiple, a cui vanno aggiunti anche i Primi≠2 per i quali il grado dell'Unicista è divisibile, ma SOLO se il grado dell'Unicista è divisibile contemporaneamente sia per il Primo che per la sua *d* (condizione che è sempre verificata per il 3, essendo la sua d il divisore universale 1)**. I Primi aggiuntivi compaiono tante volte quante sono le volte in cui dividono la *d* di partenza.** Quindi per ottenere la fattorializzazione di un Unicista, devo moltiplicare tra loro tutti i G della d considerata e delle d sottomultiple, e poi aggiungere altri Primi che devono soddisfare il criterio enunciato. Sarà più chiaro con degli esempi:

${}^{34}U$ = [${}^{34}G$] * [${}^{17}G$] * [${}^{2}G$]
perché 17 e 2 sono gli unici sottomultipli di 34. Non ci sono Primi aggiuntivi, perché 34 non è divisibile per la d dei suoi fattori Primi (17 ha d=16, 2 non ha d).

${}^{55}U$ = [${}^{55}G$] * [${}^{11}G$] * [${}^{5}G$]
Anche qui, gli unici sottomultipli di 55 sono 11 e 5. La d di 11 è 2, che non divide il 55, e quindi non ci sono Primi aggiuntivi.

${}^{33}U$ = [${}^{33}G$] *[^{11} G] * [${}^{3}G$] * 3
Qui invece compare un Primo aggiuntivo. Infatti 33 è divisibile per 3, e poiché la d di 3 è 1, 33 è anche divisibile per la d di 3. Poiché la d di 3 è l'unità, questo Primo aggiuntivo compare molto frequentemente, cioè tutte le volte che la d di partenza è un multiplo di 3 (la divisibilità per 1 è sempre soddisfatta).

${}^{42}U$ = [${}^{42}G$] * [${}^{21}G$] * [${}^{14}G$] * [${}^{7}G$] * [${}^{6}G$] * [${}^{3}G$] * [${}^{2}G$] * 7 *3
Qui compaiono due Primi aggiuntivi: il 3 perché la d di partenza è divisibile per 3, e il 7 perché la d di partenza è divisibile sia per 7 che per la sua densità (6).

${}^{584}U$ = [${}^{584}G$] * [${}^{292}G$] * [${}^{146}G$] * [${}^{73}G$] * [${}^{8}G$] * [${}^{4}G$] * [${}^{2}G$] * 73
Questo è un bell'esempio in cui come Primo aggiuntivo compare 73: questo accade perché 73 è un P di d=8, e 584 è divisibile sia per 73 che per 8.

${}^{294}U$ = [${}^{294}G$] * [${}^{147}G$] * [${}^{49}G$] * [${}^{7}G$] * [${}^{6}G$] * [${}^{3}G$] * [${}^{2}G$] * 7 * 7 * 3
perché 7 divide 2 volte il 294, che è divisibile anche per la d di 7, che è 6

Notare che tutte le volte che compaiono P aggiuntivi, essi compaiono anche nella prima parte della formula, cioè tra i G. Il fatto che siano soddisfatte le particolari condizioni individuate li fa praticamente comparire due (o più) volte: una come Generatori di una d sottomultipla e una (o più) come P aggiuntivi.
Siamo riusciti a dimostrare queste relazioni solo in parte: non esiste a tutt'oggi una dimostrazione che spieghi perché i Primi aggiuntivi compaiano secondo la regola enunciata, mentre vedremo più avanti che la presenza dei G della d di partenza e di tutte le d sottomultiple si può dimostrare. La relazione generale, che finora non è stata mai contraddetta, contiene quindi una parte dimostrabile e una parte empirica. I matematici storceranno il naso, perché abbiamo applicato un criterio puramente sperimentale: elaborare un modello basandoci sulle osservazioni e generare una teoria che sarà valida fino a che una nuova osservazione non la confuterà. Ecco una tabella con una piccola parte dei casi esaminati:

Tab. 7: Relazioni osservate tra Unicisti e Generatori (i P aggiuntivi sono evidenziati in rosso)

d	^{d}**U**
2	$[{}^{2}G]$
3	$[{}^{3}G] * 3$
4	$[{}^{4}G] * [{}^{2}G]$
5	$[{}^{5}G]$
6	$[{}^{6}G] * [{}^{3}G] * [{}^{2}G] * 3$
7	$[{}^{7}G]$
8	$[{}^{8}G] * [{}^{4}G] * [{}^{2}G]$
9	$[{}^{9}G] * [{}^{3}G] * 3 * 3$
10	$[{}^{10}G] * [{}^{5}G] * [{}^{2}G]$
11	$[{}^{11}G]$
12	$[{}^{12}G] * [{}^{6}G] * [{}^{4}G] * [{}^{3}G] * [{}^{2}G] * 3$
13	$[{}^{13}G]$
14	$[{}^{14}G] * [{}^{7}G] * [{}^{2}G]$
15	$[{}^{15}G] * [{}^{5}G] * [{}^{3}G] * 3$
16	$[{}^{16}G] * [{}^{8}G] * [{}^{4}G] * [{}^{2}G]$
17	$[{}^{17}G]$
18	$[{}^{18}G] * [{}^{9}G] * [{}^{6}G] * [{}^{3}G] * [{}^{2}G] * 3 * 3$
19	$[{}^{19}G]$
20	$[{}^{20}G] * [{}^{10}G] * [{}^{5}G] * [{}^{4}G] * [{}^{2}G]$
21	$[{}^{21}G] * [{}^{7}G] * [{}^{3}G] * 3$
22	$[{}^{22}G] * [{}^{11}G] * [{}^{2}G] * 11$
23	$[{}^{23}G]$
24	$[{}^{24}G] * [{}^{12}G] * [{}^{8}G] * [{}^{6}G] * [{}^{4}G] * [{}^{3}G] * [{}^{2}G] * 3$
25	$[{}^{25}G] * [{}^{5}G]$
26	$[{}^{26}G] * [{}^{13}G] * [{}^{2}G]$
27	$[{}^{27}G] * [{}^{9}G] * [{}^{3}G] * 3 * 3 * 3$
28	$[{}^{28}G] * [{}^{14}G] * [{}^{7}G] * [{}^{4}G] * [{}^{2}G]$
29	$[{}^{29}G]$
30	$[{}^{30}G] * [{}^{15}G] * [{}^{10}G] * [{}^{6}G] * [{}^{5}G] * [{}^{3}G] * [{}^{2}G] * 3$
31	$[{}^{31}G]$
32	$[{}^{32}G] * [{}^{16}G] * [{}^{8}G] * [{}^{4}G] * [{}^{2}G]$
33	$[{}^{33}G] * [{}^{11}G] * [{}^{3}G] * 3$
34	$[{}^{34}G] * [{}^{17}G] * [{}^{2}G]$
35	$[{}^{35}G] * [{}^{7}G] * [{}^{5}G]$
36	$[{}^{36}G] * [{}^{18}G] * [{}^{12}G] * [{}^{9}G] * [{}^{6}G] * [{}^{3}G] * [{}^{3}G] * 3$
37	$[{}^{37}G]$
38	$[{}^{38}G] * [{}^{19}G] * [{}^{2}G]$
39	$[{}^{39}G] * [{}^{13}G] * [{}^{3}G] * 3$
40	$[{}^{40}G] * [{}^{20}G] * [{}^{10}G] * [{}^{8}G] * [{}^{5}G] * [{}^{4}G] * [{}^{2}G]$
41	$[{}^{41}G]$
42	$[{}^{42}G] * [{}^{21}G] * [{}^{14}G] * [{}^{7}G] * [{}^{6}G] * [{}^{3}G] * [{}^{2}G] * 7 * 3$
43	$[{}^{43}G]$
44	$[{}^{44}G] * [{}^{22}G] * [{}^{11}G] * [{}^{4}G] * [{}^{2}G] * 11$

La fattorializzazione degli Unicisti: cosa si può dimostrare?

A pag. 15 (testo in grassetto) abbiamo dimostrato che **TUTTI i Primi di densità *d* devono necessariamente essere divisori di ^{d}U.** Quindi TUTTi i ^{d}G sono divisori di ^{d}U, e si può dire anche che non esistono ^{d}G che non siano divisori di ^{d}U.
Inoltre abbiamo anche visto che **non possono esistere dei G di densità superiore a *d* che siano anche divisori di** ^{d}U, perché qualsiasi N non può avere divisori di grado superiore alla sua *d*.
Quindi se esistono altri divisori dell'Unicista oltre ai ^{d}G, essi devono essere di grado inferiore.
Gli Unicisti sono numeri molto facili con cui fare i conti, e questo ci ha aiutato a dimostrarne la fattorializzazione.
Ad esempio, un Unicista di grado pari sarà necessariamente divisibile per 11, e in generale un ^{d}U sarà sempre divisibile per gli U di grado sottomultiplo. Questa certezza deriva da considerazioni elementari sulle divisioni: quando il dividendo è una

sequenza di cifre uguali, è chiaro che sarà divisibile per divisori che sono formati da un numero sottomultiplo di ripetizioni di quella stessa cifra (basta fare la divisione con carta e penna per rendersene conto).
Ad esempio consideriamo ^{6}U. Esso sarà necessariamente divisibile per ^{3}U e ^{2}U, e anche per 3, essendo 6 un multiplo di 3 e valendo la regola che i numeri la cui somma è multipla di 3 sono sempre divisibili per 3.
Gli Unicisti ^{3}U e ^{2}U, avendo grado inferiore a 6, non possono essere divisibili per i Generatori di *d* 6. Quindi se TUTTI i ^{6}G devono essere divisori di ^{6}U, ma non possono essere divisori di ^{3}U e ^{2}U, essi devono necessariamente dividere quello che resta dopo che abbiamo diviso ^{6}U per ^{3}U e ^{2}U. Inoltre poiché ^{6}U non può essere divisibile per G di grado maggiore di 6, possiamo affermare che questo quoziente residuo deve necessariamente essere il prodotto di TUTTI e SOLI i ^{6}G.
Esplicitiamo i calcoli per rendere il tutto ancora più chiaro:

^{6}U=111111
^{3}U=111
^{2}U=11
^{3}U è divisibile per 3, e quindi la divisibilità per 3 di ^{6}U è "contenuta" nella sua divisibilità per ^{3}U.

^{6}U/(^{3}U ^{*2}U)=111111/(111*11)=91

91 deve essere il prodotto di TUTTI i ^{6}G.

Questo esempio è molto utile per cominciare a comprendere, ma non racconta tutta la storia, perché 3 e 2 non hanno sottomultipli. Consideriamo il caso appena più complesso di *d*=12. ^{12}U deve essere divisibile per ^{6}U, ^{4}U, ^{3}U e ^{2}U, e anche per 3 (anche 12 è multiplo di 3). Ma sappiamo già che questi Unicisti di grado sottomultiplo contengono dei divisori in comune tra loro: infatti ^{6}U è pure divisibile per ^{3}U, ^{2}U e 3. Quindi se dividiamo ^{12}U per ^{6}U, in realtà lo abbiamo già diviso anche per ^{3}U, per ^{2}U e per 3. Allora tutti i ^{12}G devono essere divisori del quoziente ^{12}U/^{6}U.

Abbiamo visto che ogni ^{d}U è un Composto molto speciale, ottenuto dal prodotto di tutti i ^{d}G e dei fattori che costituiscono gli Unicisti di grado sottomultiplo. Spesso gli Unicisti di grado sottomultiplo hanno in comune tra loro alcuni fattori Primi, perché anche le *d* sottomultiple possono essere legate tra loro da relazioni multiplo-sottomuliplo. Si intuisce una struttura a scatole cinesi. Vediamo di esplicitarla.

- Partiamo dall'Unicista più piccolo, ^{2}U=11. Sappiamo che 11 è un Primo di grado 2, ed essendo l'Unicista di grado 2 pure 11, possiamo concludere che 11 è l'unico Primo di questa famiglia, e **^{2}U=[^{2}G]**.
- Consideriamo adesso *d*=3, con ^{3}U=111. Poiché si tratta di 3 volte la cifra 1, la somma delle cifre è 3, e quindi 111 deve essere divisibile per 3. Quello che resta, non avendo 3 sottomultipli, deve essere l'Orizzonte minimo all'interno del quale TUTTI e SOLI i ^{3}G devono essere contenuti, cioè il prodotto di tutti e soli i ^{3}G. 111/3=37, ed è facile concludere che 37 è l'unico fattore di questo prodotto, e quindi l'unico Primo generatore di *d* 3. La scomposizione di ^{3}U è **^{3}U=[^{3}G]*3**.
- Passiamo a *d*=4, con ^{4}U=1111. Deve essere divisibile per ^{2}U, e poiché 2 è l'unico sottomuliplo di 4, il quoziente residuo deve essere il prodotto di tutti e soli i ^{4}G. 1111/11=101, che infatti è l'Unico Primo di *d*=4. Quindi **^{4}U=[^{4}G]*[^{2}G]**.
- Prendiamo *d*=5. ^{5}U=11111, e 5 non ha sottomultipli. Quindi in questo caso l'Unicista è già l'Orizzonte minimo: motiplicando tra loro tutti e soli i ^{5}G si ottiene certamente 11111. Infatti 11111=41*271, entrambi Primi di grado 5. Adesso però possiamo anche essere sicuri che sono gli unici membri di questa famiglia. Concludendo, **^{5}U=[^{5}G]**.
- Con *d*=6 cominciamo a comprendere meglio qual è la struttura degli Unicisti e risultano più chiare le regole di fattorializzazione enunciate e poi dimostrate. ^{6}U=111111, e per quanto detto in precedenza deve essere divisibile per ^{3}U, ^{2}U e per 3. Abbiamo visto che ^{3}U=[^{3}G]*3, e che ^{2}U=[^{2}G]. Non avendo fattori in comune tra loro, possiamo scrivere direttamente ^{6}U/([^{3}G]*[^{2}G]*3)=^{6}G. Infatti 111111/(111*11*3)=91, che è il prodotto di 7 e 13, entrambi Primi di grado 6. Possiamo scrivere **^{6}U=[^{6}G]*[^{3}G]*[^{2}G]*3**.
- Passiamo direttamente a *d*=12 per esaminare il caso di densità sottomuliple che sono a loro volta in relazione multiplo-sottomultiplo tra di loro. ^{12}U deve essere divisibile per ^{6}U, ^{4}U, ^{3}U, ^{2}U e 3. Esplicitiamo tutti gli U di grado sottomultiplo: ^{2}U=[^{2}G], ^{3}U=[^{3}G]*3, ^{4}U=[^{4}G]*[^{2}G], ^{6}U=[^{6}G]*[^{3}G]*[^{2}G]*3. Ci sono molti fattori in comune. Se divido ^{12}U per ^{6}U ho già diviso per i ^{2}G, i ^{3}G, i ^{6}G e il 3. Quindi posso ancora dividere per i ^{4}G, e quello che resta deve essere il prodotto di tutti e soli i ^{12}G. Quindi posso scrivere **^{12}U=[^{12}G]*[^{6}G]*[^{4}G]*[^{3}G]*[^{2}G]*3**.

Adesso appare più chiaro perché nella fattorializzazione dell'Unicista appaiono tutti i Primi della densità dell'Unicista e delle densità sottomultiple: se un Unicista è divisibile per gli Unicisti di grado sottomultiplo deve essere divisibile anche per i Primi di quei gradi, e poiché non può essere divisibile per Primi di grado superiore, tutto quello che resta dopo aver diviso per i primi di grado sottomultiplo deve essere rappresentato dai Primi della *d* in esame.

Ricapitoliamo come si dimostra la fattorializzazione degli Unicisti (a meno dei Primi aggiuntivi, la cui presenza segue regole di cui non siamo riusciti a cogliere la necessità), perché in questa dimostrazione sono contenuti gli elementi fondamentali della nostra ricerca:

- Assioma fondamentale della nostra *Teoria della densità*: Ogni N naturale è il prodotto di uno o più Primi. Ogni P ha la sua *d* unica e indipendente dal dividendo considerato. Quando più P si combinano a formare un Composto, la *d* risultante è il mcm delle *d* coinvolte.
- L'Unicista, quando non è Primo, è un Composto molto particolare, perché contiene una serie ordinata di P. Si può dimostrare che gli Unicisti si scompongono in fattori Primi secondo una regola ben precisa. Il concetto su cui si basa questa dimostrazione è semplice:

1. Non può esistere un N di densità *d* tale che ${}^{d}N > {}^{d}U$ (vedi pag 13). Ne consegue che non può esistere un P tale che ${}^{d}P > {}^{d}U$.
2. Dato un P di densità $d' > d$, si ha che ${}^{d'}P$ non può essere un divisore di ${}^{d}U$.
3. Data una *d*, ${}^{d}U$ è necessariamente divisibile per tutti gli U di densità sottomultiple di quella *d* (fondamenti della divisibilità).
4. Quando divido ${}^{d}U$ per gli U di densità sottomultiple, il quoziente residuo non può contenere né P di densità sottomultiple (perché anche per loro vale quanto detto al punto 1, e quindi devono necessariamente essere contenuti nei rispettivi Unicisti) ne P di densità superiori a *d* (punto 2), ma neanche P di densità inferiore a *d* ma non sottomulitpla (Assioma fondamentale). Quindi tale quoziente residuo deve necessariamente essere formato da tutti e soli i ${}^{d}G$.

Chiariamo ancora meglio perché tutti e soli: tutti perché non può esistere un ${}^{d}G > {}^{d}U$ (punto 1), soli perché abbiamo appena dimostrato che tutte le densità inferiori a *d* o sono sottomultiple, e quindi già incluse negli U di grado sottomultiplo, o non sono sottomultiple e quindi non possono dividere ${}^{d}U$.

Quindi ogni ${}^{d}U$ deve avere tra i suoi divisori tutti i Generatori di quella *d* e delle *d* sottomuliple.

Questa regola è rispettata anche quando compaiono Primi aggiuntivi, perché si tratta sempre di P che appartengono a una di queste due categorie, solo che compaiono più di una volta, secondo la regola che abbiamo osservato (Tab. 7) ma di cui ci sfugge la necessità. Tale regola è comunque coerente con la *d* delle potenze di Primi (pag 5): infatti quando un P compare più di una volta la *d* risultante è il prodotto della *d* del Primo e del Primo stesso.

La fattorializzazione degli Unicisti e la ricerca di nuovi Primi: l'Orizzonte

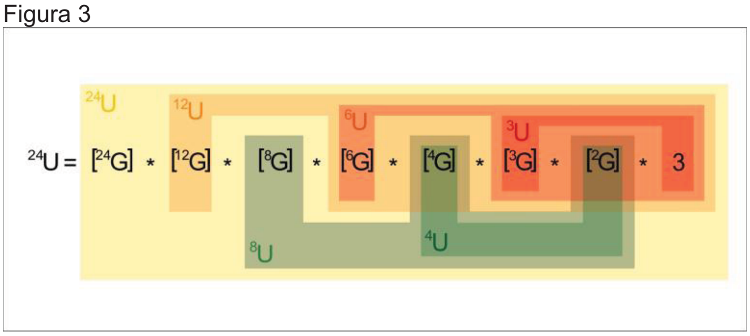
Conoscendo la struttura degli Unicisti e la relazione tra Unicista e Primi che lo compongono, come abbiamo visto nel capitolo precedente, possiamo ridurre il nostro orizzonte massimo rappresentato dall'Unicista a un nuovo "orizzonte minimo", cioè al prodotto di tutti e soli i Primi di quella *d*. Definiamo quindi **Orizzonte** della densità *d* il prodotto di tutti i ${}^{d}G$. Abbiamo già introdotto la simbologia $[{}^{d}G]$ per indicare questo particolare prodotto. E' evidente che circoscrivere la ricerca dei Primi di una data *d* a un numero noto che ne rappresenta il prodotto può semplificare notevolmente il percorso. Infatti partendo da una *d* e dal suo Unicista si può ricavare l'Orizzonte semplicemente dividendo l'Unicista per i Primi di grado sottomultiplo e per i fattori ausiliari, come osservato e in parte dimostrato nei capitoli precedenti.
Potremmo pertanto cominciare a costruire l'edificio dei Primi cominciando dai piani più bassi (densità basse) e utilizzandoli come base per costruire i piani successivi. Ma possiamo anche avvalerci delle informazioni che già abbiamo sui Primi noti in letteratura, calcolandone la densità e usandoli per dividere i nostri Orizzonti al fine di circoscriverli ancora di più per trovare gli altri Primi di quelle famiglie. Infatti se divido un Orizzonte per un Primo noto di quella *d*, ottengo un prodotto ancora più circoscritto, nell'ambito del quale cercare gli altri P di quella famiglia.
A nostro giudizio si tratta di un risultato formale importante, perché per la prima volta i Primi non ci appaiono distribuiti a caso ma in insiemi circoscritti che rispondono a precise regole e super-regole, come sarà ancora più chiaro più avanti.
Da un punto di vista pratico però si evidenziano anche due limiti:

- scomporre in fattori Primi un Unicista equivale a scomporre in fattori Primi la sua densità, e quindi il problema della fattorializzazione è solo spostato
- Per calcolare l'Orizzonte dobbiamo conoscere tutti i Primi di grado sottomultiplo

Il primo limite merita qualche considerazione in più. Spostando il problema di fattorializzazione dall'Unicista alla sua densità in realtà abbiamo comunque introdotto una semplificazione, perché la densità, essendo il numero di cifre dell'Unicista è comunque un numero molto più piccolo dell'Unicista stesso, e quindi spostando il livello della fattorializzazione abbiamo comunque realizzato un enorme guadagno anche in termini pratici.
Il secondo limite potrebbe essere molto relativo se decidessimo comunque di ricostruire l'intero edificio partendo dalla base per rimettere ordine nel mondo finora oscuro dei Primi. Ma vedremo nel prossimo capitolo che in realtà in molti casi possiamo ottenere l'Orizzonte anche senza conoscere i Primi di *d* sottomultiple. Ciò è possibile perché, grazie alle proprietà degli Unicisti e al fatto che i vari G delle *d* sottomultiple sono connessi a formare altri Unicisti, sarà possibile realizzare delle semplificazioni importanti.

In altri termini, se l'obiettivo è comprendere la struttura degli Unicisti (la loro fattorializzazione) allora ci torna utile portarci dietro nei calcoli tutti i G delle *d* sottomultiple, ma se l'obiettivo è ottenere l'Orizzonte dei ^{d}G il più velocemente possibile e con la minor quantità di informazioni, allora ci conviene lavorare con gli Unicisti di grado sottomultiplo, che raggruppano varie famiglie di densità e che ci consentono di fare i nostri calcoli senza conoscerne i singoli elementi. Nella Figura 3 sono rappresentati schematicamente alcuni esempi di questi raggruppamenti.

Figura 3



Semplificare il calcolo dell'Orizzonte: i Vuoti

Nella Figura 1 abbiamo mostrato un esempio di come gli Unicisti siano connessi tra loro: Ogni Unicista "contiene" tutti gli U di grado sottomultiplo, e spesso anch'essi sono connessi e si contengono l'uno con l'altro. Oltre ad aggiungere bellezza e coerenza a questa nuova visione del mondo dei numeri Primi, questa concezione insiemistica ci consente di introdurre delle semplificazioni nel calcolo dell'Orizzonte.
Consideriamo ad esempio il caso di *d*=12. Volendo calcolare l'Orizzonte di questa densità, cioè il prodotto di tutti i suo G, abbiamo a disposizione la relazione di fattorializzazione di ^{12}U:

^{12}U=[^{12}G]*[^{6}G]*[^{4}G]*[^{3}G]*[^{2}G]*3

Poiché conosciamo la regola generale per fattorializzare gli Unicisti, possiamo raggruppare alcuni elementi che sappiamo corrispondere ad un U di grado sottomultiplo. ^{6}U=[^{6}G]*[^{3}G]*[^{2}G]*3, e quindi sostituendo nella scomposizione di ^{12}U abbiamo:

^{12}U=^{6}U*[^{12}G]*[^{4}G]

Quindi l'Orizzonte [^{12}G] si può calcolare come

[^{12}G]=^{12}U/(^{6}U*[^{4}G])

Possiamo calcolare l'Orizzonte di *d* 12 senza conoscere i Primi di densità 6, 3, e 2. Abbiamo ridotto notevolmente le informazioni necessarie. In questo caso quindi basterebbe conoscere [^{4}G] e, sostituendo, effettuare il calcolo seguente:

111111111111/(111111*101)=9901

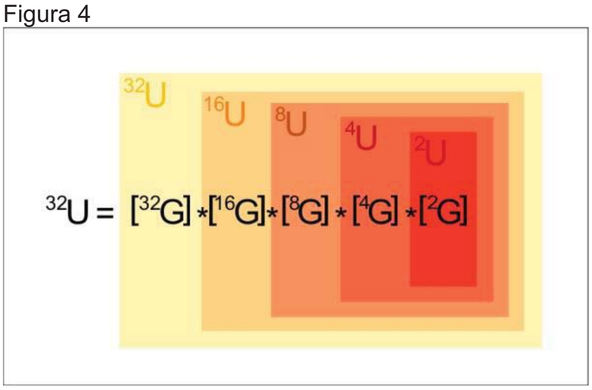
Quindi l'Orizzonte in cui cercare i Primi di *d*=12 è 9901.

In generale quando la *d* è pari si possono fare molte semplificazioni del calcolo dell'Orizzonte [^{d}G] semplicemente basandosi sulle regole di fattorializzazione degli Unicisti.
Esiste un gruppo particolare di densità per le quali queste semplificazioni possono essere sfruttate al massimo. Si tratta delle densità potenze di 2. **Infatti se *d*=2^{n} possiamo calcolare l'Orizzonte [^{d}G] senza conoscere alcun Primo di grado sottomultiplo**. Con un esempio sarà chiaro perché.
Consideriamo *d*=32 (2^{5}). Il fatto che si tratti di una potenza di 2 semplifica notevolmente la fattorializzazione e ci assicura l'assenza di Primi aggiuntivi. La struttura dell'Unicista di una potenza di 2 è particolarmente semplificata, e ci consente dei calcoli estremamente semplici per il calcolo dell'Orizzonte [^{d}G].
Quello dei Primi aggiuntivi è un problema non da poco: innanzitutto perché non siamo riusciti a fornire una dimostrazione delle regole con cui compaiono, e quindi non possiamo escludere che per densità molto più grandi di quelle da noi considerate per estrapolare una regola empirica non accada qualcosa di diverso; e poi perché complica ulteriormente la fattorializzazione dell'Unicista. Quando *d* è una potenza di 2 tutto diventa semplicissimo. Essendo *d*=2^{n}, i suoi sottomultipli saranno molto facili da individuare, e soprattutto 2^{n} non potrà essere divisibile per alcun Primo diverso da 2, e quindi possiamo escludere a priori la presenza di Primi aggiuntivi. Ad esempio per *d*=32 si ha:

$^{32}U=[^{32}G]*[^{16}G]*[^{8}G]*[^{4}G]*[^{2}G]$

Dalle regole note sulla fattorializzazione degli Unicisti, sappiamo anche che in questo caso gli Unicisti di grado sottomultiplo sono tutti contenuti l'uno nell'altro, come evidenziato nella Fig. 4.

Figura 4



Questo consente il massimo della semplificazione per il calcolo dell'Orizzonte:

$^{32}U=[^{32}G]*^{16}U \rightarrow [^{32}G]=^{32}U/^{16}U$

Perciò possiamo calcolare l'Orizzonte della *d* considerata in maniera molto semplice e senza conoscere alcun Primo di grado inferiore: dividendo tra loro due Unicisti e quindi due numeri noti. Passando ai calcoli, l'Orizzonte dei Primi di densità 32 è:

11111111111111111111111111111111/1111111111111111=10000000000000001

La divisione di un Unicista per l'Unicista di grado dimezzato produce sempre un numero di questo tipo. Si può dimostrare con le regole elementari della divisione che il quoziente $^{d}U/^{d/2}U$ ha sempre una struttura del tipo 1[*d*/2-1 zeri]1.
Abbiamo battezzato questi numeri ***Vuoti*** (V), attribuendo a ogni Vuoto il medesimo grado dell'Unicista da cui l'abbiamo ottenuto. E non si tratta di un'attribuzione arbitraria, perché la densità del Vuoto ottenuto dalla divisione $^{d}U/^{d/2}U$ è proprio *d*!
Questo in realtà non dovrebbe sorprenderci, perché il Vuoto che abbiamo ottenuto con quella divisione è l'Orizzonte di *d* 32, e quindi deve necessariamente avere anch'esso *d*=32, perché si tratta del prodotto di tutti i Primi densità 32.

Ricapitolando, possiamo scrivere la seguente relazione generale:

$^{d}U/^{d/2}U=^{d}V$

dove ^{d}V definisce un numero formato dalla cifra 1 seguita da *d*/2-1 zeri e da un'altra cifra 1.
Per *d* potenza di 2 si ha l'equivalenza $^{d}V=[^{d}G]$. Quindi nell'ambito dei numeri Primi possiamo individuare una superfamiglia particolare, una fetta dell'universo primico: quella dei P con $d=2^n$. Per questa particolare superfamiglia il calcolo dell'Orizzonte $[^{d}G]$ è ridotto a zero: cioè non dobbiamo fare calcoli, il nostro Orizzonte è semplicemente il Vuoto di quella *d*. Pertanto possiamo sapere a priori che tutti i G di una data *d* potenza di 2 sono "contenuti" nel ^{d}V corrispondente, e che questo numero particolare è formato dal prodotto di tutti e soli i P di quella *d*.
Notare che quanto trovato vale anche per la più piccola potenza potenza di 2, cioè 2^1. Infatti anche in questo caso $^{d}U/^{d/2}U=^{d}V$: per *d*=2 si ha 11/1=11, e $^{2}V=11$ segue la regola della struttura generale dei Vuoti, essendo 0 il numero di zeri nel caso di *d*=2. L'11 è un numero davvero speciale, rivestendo contemporaneamente il ruolo di $[^{2}G]$, ^{2}U e ^{2}V.

A parte il caso particolarmente semplice delle *d* potenze di 2, per le *d* pari l'introduzione dei Vuoti aiuta moltissimo la semplificazione dei calcoli. Infatti se *d* è pari, ogni ^{d}U è divisibile per $^{d/2}U$ e il risultato è ^{d}V. Applicando questa regola riusciamo molto spesso a ottenere semplificazioni che eliminano i G di densità sottomultiple nel calcolo dell'Orizzonte, procedendo solo con Unicisti e Vuoti.

Esempio:

$^{60}U=^{60}G*^{30}G*^{20}G*^{15}G*^{12}G*^{10}G*^{6}G*^{5}G*^{4}G*^{3}G*^{2}G*3$

In questa espressione compare anche ^{30}U. Infatti $^{30}U=^{30}G*^{15}G*^{10}G*^{6}G*^{5}G*^{3}G*^{2}G*3$. Quindi posso sostituire e scrivere:

$^{60}U=^{60}G*^{30}U*^{20}G*^{12}G*^{4}G$

Esplicitando *60*G, che è quello che vogliamo determinare, si ha:

$^{60}G = {}^{60}U / ({}^{30}U*{}^{20}G*{}^{12}G*{}^{4}G)$

sapendo che $^{60}U/{}^{30}U={}^{60}V$ (1;29zeri;1), scriviamo:

$^{60}G = {}^{60}V / ({}^{20}G*{}^{12}G*{}^{4}G)$

In maniera analoga, si può dimostrare che $^{20}G = {}^{20}U/ ({}^{10}U*{}^{4}G)$, e sostituendo si ha:

$^{60}G = {}^{60}V / ({}^{20}U/{}^{10}U*{}^{4}G)*{}^{12}G*{}^{4}G$

i due ^{4}G si elidono, e inoltre sappiamo che $^{20}U/{}^{10}U={}^{20}V$, da cui:

$^{60}G = {}^{60}V /({}^{20}V*{}^{12}G)$

Applicando gli stessi artifici aritmetici a ^{12}G, si trova che $^{12}G={}^{12}V/{}^{4}G$, e quindi sostituendo ancora si ha:

$^{60}G = ({}^{60}V*{}^{4}G)/({}^{20}V*{}^{12}V)$

^{4}G è pari a $^{4}U/{}^{2}U={}^{4}V$ (101), e quindi con l'ultima sostituzione abbiamo:

$^{60}G = ({}^{60}V*{}^{4}V)/({}^{20}V*{}^{12}V)$

Cioè abbiamo espresso l'Orizzonte dei Primi di *d* 60 unicamente tramite Vuoti, numeri dalla struttura nota.
Quindi senza affatto conoscere i Primi delle *d* sottomultiple, sappiamo che l'Orizzonte dei Primi di *d* 60 è (1000000000000000000000000000001*101)/(10000000001*1000001).

Abbiamo visto che conoscendo le regole di fattorializzazione di un Unicista e conoscendo i Primi delle densità sottomultiple, posso circoscrivere notevolmente l'ambito in cui cercare i membri di quella famiglia. In questo capitolo abbiamo visto come in molti casi (infiniti, come infinite sono le potenze di 2) il calcolo dell'Orizzonte di una data *d* possa essere fatto anche senza conoscere i P di grado sottomultiplo.
Vedremo nel prossimo capitolo che seguendo questa logica si può fare molto di più: **generare tutti i Primi** in maniera automatica. Il sistema che mostreremo non ha infatti limiti superiori, ma consente di costruire mattone dopo mattone l'intero edificio dei numeri Primi. Ovviamente ci vorrebbe un tempo infinito, visto che infiniti sono i numeri Primi, ma questa è un'altra storia.

Generare nuovi Primi

Quando abbiamo introdotto i concetti di densità e varietà, abbiamo visto che quando N è Primo le N-1 catene possibili di resti e cifre decimali che generano il periodo sono tutte della medesima lunghezza (*d*), e possono appartenere a *v* tipi diversi. Vale quindi la relazione "primaria" enunciata più sopra:

(5) N-1=*dv*

Quando N non è Primo, questa relazione non è rispettata (tranne che per gli Incesti), perché nella determinazione dei periodi di ogni quoziente n/N intervengono tutti i fattori Primi che compongono N.

Questa relazione ci consente di esplorare a fondo i modi in cui possiamo generare nuovi Primi. Vediamo come.
Partendo dalla relazione N-1=*dv*, possiamo scrivere:

(5b) N= *dv* +1

Quindi un modo per cercare nuovi Primi sarebbe cercarli tra i numeri Naturali che possono essere scritti nella forma *ab*+1. Questo è già stato fatto in passato: Si prende un prodotto di 2 numeri, gli si aggiunge 1 e poi si avvia la ricerca col solito metodo delle divisioni successive per i Primi noti.
Mancava una nozione fondamentale, e cioè il significato che riveste uno dei due parametri usati nella relazione N=ab+1: infatti non solo qualsiasi Primo deve poter essere espresso in forma *ab*+1, ma *a* deve essere la densità di quel

Primo. E considerando che per conoscere la densità di un numero basta fare una sola divisione (1/N), il problema sembra molto più semplice.
Ecco come procedere. Per semplicità, facciamo l'esempio con una *d* che sappiamo avere generatori bassi, in modo da semplificare i calcoli. Poniamo quindi di voler cercare i Primi con *d*=6. Cominciamo a calcolare gli N candidati applicando semplicemente la relazione N= *d***v* +1, dove *d*=6 e *v* viene fatto crescere partendo da *v*=1:

Tab. 8: Esempio di algoritmo per *d*=6

v	N=6**v*+1	
1	7	1/7 ci dà un periodo di 6 cifre, quindi 7 è un Primo di densità 6; da quello che sappiamo sugli Unicisti, sappiamo anche che $[^6G]$=91, quindi togliamo il 7 appena trovato dall'insieme di tutti i G di densità 6 (cioè facciamo la divisione 91/7), e sappiamo che l'orizzonte residuo è dato da 13.
2	13	1/13 ci dà un periodo di 6 cifre, quindi anche 13 è un Primo di densità 6. Possiamo fermare l'algoritmo perché abbiamo raggiunto l'Orizzonte.

Questo esempio è forse troppo semplice, e non lascia trapelare la potenza di questo algoritmo. Allora alziamo un po' la posta, considerando il caso *d*=5:

Tab. 9: Esempio di algoritmo per *d*=5

v	N=5**v*+1	
1	6	È pari è può essere scartato. Quando *d* è dispari, possiamo limitarci a considerare i valori pari di *v*, perché con tutte le *v* dispari N viene sempre pari.
2	11	La densità di 11 non è 5, quindi 11 va scartato come Primo di densità 5. Ma al lettore attento non sfuggirà che N=11 soddisfa ugualmente la relazione se scambiamo *d* con *v*. Quindi possiamo annotarlo come Primo di densità 2.
4	21	*d*=6≠5, scartato
6	31	*d*=15≠5, scartato
8	41	*d*=5, abbiamo trovato il primo P di densità 5. Dalla formula dell'Unicista, sappiamo che $[^5G]$=11111, e quindi sappiamo che 11111/41=271 è il nostro nuovo e rimpicciolito orizzonte. Non serve a nulla applicare l'algoritmo direttamente a questo orizzonte residuo, perché la relazione sarà soddisfatta comunque. L'unico modo di sapere se 271 e un Primo o il prodotto di altri P è verificare che non ci siano altri P tra 41 e 271. O no? In realtà se 271 fosse il prodotto di due o più P di densità 5, questi P dovrebbero essere comunque >41, altrimenti li avremmo trovati nei giri precedenti dell'algoritmo. Poiché la √271 è poco più di 16, non possono esistere 2 numeri entrambi maggiori di 41 tali che il loro prodotto sia 271. Quindi potremmo risparmiarci tutti gli altri giri dell'algoritmo e concludere che 271 è il secondo e ultimo Primo di *d* 5.
10	51	*d*=16≠5, scartato
12	61	*d*=60≠5, scartato. Ma è sicuramente un P della famiglia a densità 60. (*d*=60, *v*=1)
14	71	*d*=35≠5, scartato
16	81	*d*=9≠5, scartato
18	91	*d*=6≠5, scartato
20	101	*d*=4≠5, scartato
22	111	*d*=3≠5, scartato
24	121	*d*=22≠5, scartato
26	131	*d*=130≠5, scartato, ma riconosciuto come P di densità 130
28	141	*d*=46≠5, scartato
30	151	*d*=75≠5, scartato
32	161	*d*=66≠5, scartato
34	171	*d*=18≠5, scartato
36	181	*d*=180≠5, scartato, ma riconosciuto come P di densità 180
38	191	*d*=95≠5, scartato
40	201	*d*=33≠5, scartato
42	211	*d*=30≠5, scartato
44	221	*d*=48≠5, scartato
46	231	*d*=6≠5, scartato
48	241	*d*=30≠5, scartato
50	251	*d*=50≠5, scartato
52	261	*d*=28≠5, scartato
54	271	*d*=5, riconosciuto come Primo di densità 5. Abbiamo raggiunto l'Orizzonte residuo e quindi

		possiamo fermare l'algoritmo

Notare che per questi test di densità basta la sola divisione 1/N, in quanto se il numero è Primo avrà una sola densità, e se viceversa non è Primo, ci basta dimostrare la differenza anche di una sola densità rispetto a quella imposta dal test. Usiamo la *d fondamentale* (cioè quella corrispondente alla divisione 1/N) non solo per comodità, ma soprattutto perché la *d fondamentale* di un Composto è sempre la *d* mcm, che è quella con cui dobbiamo trattare.
Notare anche che se pure il calcolo della densità non fosse semplice come in realtà è, non sarebbe necessario calcolare la densità di ogni N, ma semplicemente verificare che sia diversa da quella imposta nel test. Per esempio se la *d* imposta è 5, potrebbe bastare anche fermarsi alla sesta cifra decimale del quoziente 1/N per sapere che $d \neq 5$.
Un'altra considerazione: quando divido l'Unicista per il primo P trovato, a prima vista non posso sapere se quello che resta è un solo P o il prodotto di più P, e quindi continuo a far girare l'algoritmo, ma per ogni P che trovo, l'orizzonte sarà più ristretto.
Certo, nel caso di d=13 dovrei far fare molti giri all'algoritmo per essere sicuro che l'orizzonte residuo dopo l'identificazione del secondo P (79) è in realtà l'unico altro Primo di quella famiglia (vedi tabella 1). Possiamo fare meglio?
Intanto possiamo calcolare la radice quadrata del nostro orizzonte residuo, e se mentre facciamo girare l'algoritmo superiamo quel valore, possiamo essere certi che non ci saranno dei divisori del nostro orizzonte residuo ancora in giro, e quindi possiamo fermare l'algoritmo e concludere che quell'orizzonte residuo è in effetti l'ultimo Primo della famiglia.

Come avevamo preannunciato, gli Incesti smettono di rappresentare un problema quando usiamo questo algoritmo. Infatti, poiché un Incesto è il prodotto di almeno due P della stessa *d*, l'algoritmo trova necessariamente i Primi prima dei rispettivi Incesti, e quindi basterà moltiplicare tra loro i Primi che man mano vengono trovati per conoscere in anticipo i "falsi positivi" che l'algoritmo genererà in qualche giro successivo.

Come abbiamo visto nell'ultimo esempio, mentre cerchiamo i P di una densità possiamo trovarne molti di altre densità. Infatti tutte le volte che nella verifica la *d* dell'N calcolato viene uguale a N-1, quell'N è sicuramente Primo, in quanto nell'algoritmo di quella *d* troveremmo quell'N al primo giro, cioè per v=1, e quindi non c'è il rischio di essersi imbattuti in un Incesto. Infatti essendo l'Incesto il prodotto di due o più P con la stessa *d*, il primo P trovato dall'algoritmo non può essere un Incesto, dato che è il più piccolo numero che soddisfa la relazione.
L'algoritmo trova tutti i Primi della densità prescelta, e incidentalmente trova anche i più piccoli Primi di alcune famiglie di altre densità, riconoscibili perché al calcolo risultano avere una densità che è v-1 rispetto all'algoritmo usato (si tratta infatti di membri di famiglie in cui *d* e *v* sono scambiate rispetto alla famiglia in esame).
L'algoritmo però NON riconosce altri Primi che non soddisfano né la relazione d=d imposta, né la relazione d=N-1; è il caso di 101, trovato nella ricerca dei P con densità 5, ma scartato perché ha d=4 (si tratta infatti dell'unico Primo di questa densità).
Nell'esempio illustrato per d=5, con 27 giri dell'algoritmo abbiamo trovato 6 Primi.

La fattorializzazione degli Unicisti aiuta l'Algoritmo di generazione di nuovi Primi

Conoscendo come gli Unicisti sono in relazione tra loro, possiamo spostarci tra una "bolla" di densità e un'altra, usando quello che sappiamo delle bolle a bassa densità per costruire quelle a densità più alta. In altre parole, anziché muoversi in una sequenza di numeri Primi dal più piccolo al più grande –scoraggiati da secoli di tentativi fallimentari- potremmo trovare un modo per muoverci da una bolla di densità alla successiva.
Ogni Unicista (la nostra bolla) contiene i Primi di quella *d*, ed è inoltre collegato alla bolla più grande secondo precise relazioni. Ogni bolla praticamente contiene tutte le bolle precedenti, e quindi posso muovermi tra numeri infiniti usando l'artificio di raggrupparli in insiemi finiti e concentrici, costruendo l'insieme infinito dei numeri Primi come se fosse una cipolla: strato su strato, i Primi trovano il loro posto in ogni strato e aprono la strada a scoprire quelli degli strati superiori. Il procedimento è comunque infinito, ma procede a passi discreti.
La formula con cui ogni Unicista può essere messo in relazione con i suoi Generatori e con i P di grado inferiore (cioè di densità inferiore) ci consente di individuare facilmente l'orizzonte all'interno del quale cercare i nuovi Primi. Infatti dalla formula, conoscendone tutti i termini tranne [^{d}G], dove *d* è la nuova densità considerata, Posso calcolare [^{d}G]. Applicando l'Algoritmo che abbiamo illustrato, possiamo trovare il primo P della nuova famiglia, e usarlo subito per ridurre l'orizzonte della ricerca: quindi se prima [^{d}G] era il mio Orizzonte, facendo [^{d}G]/P_1 otterrò un Orizzonte Residuo OR_1. La radice quadrata dell'OR_1 può darmi delle informazioni aggiuntive, esattamente come nel metodo tradizionalmente usato per capire se un N è P o no: se durante i giri dell'Algoritmo comincio a ottenere N che sono superiori a $\sqrt{OR_1}$ (a volte, come nell'esempio più sopra, $\sqrt{OR}$ risulta già inferiore al P_1), posso fermarmi ed affermare con certezza che $OR_1=P_2$. Viceversa troverò un $P_2 \neq OR_1$ e lo utilizzerò per trovare il nuovo $OR_2=OR_1/P_2$. E così via.

Il calcolo della densità

L'algoritmo che abbiamo presentato si basa sul calcolo dei candidati N=d*v+1 dove d è la densità imposta e v è un numero Naturale che viene fatto crescere partendo da 1. Ogni candidato dove essere sottoposto al "test" per verificare che la sua d sia effettivamente quella imposta o no. Quindi il nodo di questo algoritmo è il calcolo della d di un N dato (il nostro candidato, diverso a ogni giro dell'algoritmo). Esistono due strade possibili per calcolare la densità: contare le cifre del periodo – e quindi concepire un sistema automatizzato che sia in grado di riconoscere la ripetizione e di contarne la lunghezza - o facendo eseguire la divisione 1/N a un programma che calcoli tutti i resti delle divisioni elementari e conti dopo quanti passaggi si ottiene resto 1. Un programma di questo tipo è stato da noi realizzato con un semplice foglio di calcolo, e ci ha consentito di calcolare le densità per tutti gli scopi di questo lavoro. Ma è chiaro che per l'utilizzo pratico del nostro algoritmo i candidati N potrebbero essere anche numeri molto grandi per i quali l'applicazione di questo tipo di calcoli potrebbe diventare materialmente inapplicabile.
E' vero però che, come abbiamo già detto, non sia necessario calcolare quale sia la densità dell'N candidato, ma ci basti sapere se sia o no diversa dalla d imposta. Per periodi molto lunghi anche quest'operazione potrebbe essere così lunga da rendere praticamente inservibile il nostro algoritmo per scopi pratici.
E' possibile però velocizzare moltissimo il calcolo della d basandosi su una considerazione molto elementare. Abbiamo visto in precedenza che moltiplicando per N il periodo della divisione 1/N si ottiene $^{d}(9)$, e quindi è chiaro che $^{d}(9)$ sarà divisibile per N. Quindi se un N dato ha densità d, $^{d}(9)$ sarà divisibile per quell'N. Per semplicità di esposizione chiamiamo "Novista" un numero formato dalla ripetizione della sola cifra 9. Da quanto esposto possiamo dire che se non so quale sia la densità di un N dato, posso calcolarla semplicemente trovando il più piccolo Novista che divide N: infatti la densità di N sarà il grado di quel Novista.
Facciamo degli esempi. Voglio determinare la densità di 271. Considero il primo Novista utile, cioè 999 (è chiaro che il grado deve essere almeno pari alle cifre di N per prendere in considerazione la divisibilità) e provo la divisione: 999/271, non divisibile; 9999/271 non divisibile, 99999/271=369, quindi posso concludere che la densità di 271 è 5.
In realtà, per il nostro test, ancora una volta non ci serve determinare la d dell'N candidato, ma solo sapere se sia o no uguale alla d imposta. Quindi posso fare direttamente la divisione $^{d}(9)$/N, ed escludere tutti gli N che non siano divisori di $^{d}(9)$. Notiamo però che anche questo è un test di sola esclusione. Infatti la densità è data dal grado del più piccolo Novista che divide N, ma è chiaro che qualsiasi Novista di grado multiplo di d sarà comunque divisibile per N. Quindi, mentre trovare che $^{d}(9)$ non è divisibile per N consente di escludere che N abbia densità d, trovare la divisibilità ci dice solo che la densità di N è d o un suo sottomultiplo.

Da quanto appena esposto consegue che abbiamo a disposizione un metodo veloce per sapere con certezza se la densità di un N candidato sia diversa dalla d imposta, e quindi un criterio per scartare un N nel nostro Algoritmo. Quando il test di divisibilità $^{d}(9)$/N è negativo, scartiamo il candidato N; viceversa quando è positivo possiamo approfondire e verificare che la d reale di quell'N non sia per caso una d sottomultipla provando anche queste divisibilità. Ad esempio facciamo girare il nostro algoritmo per d=15:

Tab. 10: Esempio di algoritmo per d=15

v	N=15*v+1	
1	16	È pari è può essere scartato. Quando d è dispari, possiamo limitarci a considerare i valori pari di v, perché con tutte le v dispari N viene sempre pari.
2	31	Facciamo direttamente il test del Novista: $^{15}(9)$ è divisibile per 31. Per essere sicuri che 31 non abbia una densità sottomultipla di 15 facciamo il test di divisibilità anche per $^{5}(9)$ e $^{3}(9)$. Troviamo risultati negativi per entrambi, quindi possiamo concludere che 31 ha effettivamente densità 15, e che pertanto è il primo Primo di densità 15 trovato dal nostro Algoritmo
4	61	Test del Novista negativo, possiamo scartare il 61
6	91	Test del Novista negativo, scartato
8	121	Test del Novista negativo, scartato
10	151	Test del Novista negativo, scartato
12	181	Test del Novista negativo, scartato
14	211	Test del Novista negativo, scartato
16	241	Test del Novista negativo, scartato
18	271	Test del Novista positivo. Allora facciamo il test anche per $^{5}(9)$ e $^{3}(9)$. Il test è positivo per $^{5}(9)$, quindi la d di 271 non è 15 (ma 5), e pertanto non è un Primo di questa famiglia. Lo scartiamo.
…	…	…
193744	2906161	Test del Novista positivo. Non c'è bisogno di verificare con $^{5}(9)$ e $^{3}(9)$, perché il candidato ha più di 5 cifre e quindi non può essere divisore di nessuno dei due Novisti di grado sottomultiplo. Allora 290161 è il secondo Primo trovato dall'Algoritmo. Poiché $^{15}U/(31*290161)=1233321$ e 1233321<290161, è chiaro che non possono esistere altri Primi

		di questa famiglia.

Esiste un caso particolarmente favorevole: applicare l'Algoritmo a valori Primi di densità. Se infatti la *d* imposta è un numero Primo, non avendo sottomultipli il test della divisibilità del Novista diventa una certezza sia per escludere candidati che per ammetterli. Infatti ogni volta che troviamo che ${}^{d}(9)$ è divisibile per N, possiamo affermare con certezza che quell'N ha proprio densità *d*, e che quindi il nostro Algoritmo ha trovato un Primo di quella densità.
Per capire la potenza teorica di questa scoperta, si pensi alla possibilità di considerare il Primo più grande noto in letteratura, e di usarlo come *d* imposta nel nostro Algoritmo: troveremo TUTTI i Primi di quella densità, che saranno certamente più grandi della loro *d* e quindi nuovi Primi da aggiungere alla lista.

Creare Numeri Naturali a fattorializzazione nota senza fare calcoli

Una conseguenza molto divertente delle proprietà degli Unicisti è che si può prevedere con molta facilità quali siano i divisori di numeri formati dalla ripetizione di una qualsiasi sequenza. Ad esempio, senza fare alcun calcolo, posso sapere che 123123123123 è certamente divisibile per 101. E che 456456456456456 è invece divisibile sia per 41 che per 271. Come ho fatto? Quando abbiamo una qualsiasi sequenza S di *s* cifre, si ha che il numero ${}^{d}(S)$ – cioè la ripetizione *d* volte della sequenza S - risulta sempre divisibile per i ${}^{d}G$, a condizione che *s* non sia un multiplo di *d*.
Quindi se conosciamo i Primi di una data famiglia di densità, possiamo costruire dei numeri grandi a piacere che ne siano certamente multipli, semplicemente inventando una sequenza di *s* cifre e ripetendola *d* volte, unica condizione è che *s* non sia multiplo di *d*.
Con le proprietà degli Unicisti possiamo spiegare questo fatto. Innanzitutto sappiamo che ${}^{d}(S)$ è certamente divisibile per S (qualsiasi numero costituito dalla ripetizione di una sequenza è divisibile per quella sequenza), e inoltre, proprio perché si tratta di una divisione ${}^{d}(S)/S$ il risultato sarà sempre una sequenza ordinata di 1 e 0: comincerà con la cifra 1 seguita da *s*-1 zeri, e questa sequenza si ripeterà *d*-1 volte e alla fine ci sarà un ulteriore 1.

> Esempio:
> Consideriamo S=123 e *d*=4. La sequenza data ha *s*=3. Quando dividiamo ${}^{d}(S)/S$ otteniamo
> 123123123123/123=1001001001
> E questo risultato è chiaramente indipendente dalla sequenza scelta, come si può facilmente comprendere facendo la divisione con carta e penna. Infatti otterremo sempre un'alternanza di cifre 1 e gruppi di cifre 0, le cifre 0 di ogni gruppo saranno sempre *s*-1, e in totale ci saranno *d* cifre 1.

Quindi il numero che otteniamo dalla divisione ${}^{d}(S)/S$ è sempre di un tipo perfettamente prevedibile e indipendente da S. La medesima alternanza di cifre 1 e 0 si ottiene quindi anche se considero una sequenza S= ${}^{s}(1)$= ${}^{s}U$. Cioè se la sequenza che uso ha sempre lunghezza *s* ma è fatta solo dalla cifra 1, il quoziente sarà comunque il medesimo. Quindi si ha che:

(7) $\quad {}^{d}(S)/S = {}^{ds}U/{}^{s}U$

Sappiamo però come fattorializzare ${}^{ds}U$: e anche senza entrare nel merito dei Primi aggiuntivi, sappiamo comunque che tra i fattori Primi di ${}^{ds}U$ ci sono tutti i ${}^{ds}G$ e i tutti i G delle densità sottomultiple di *d*s*, quindi anche tutti i ${}^{d}G$ e tutti gli ${}^{s}G$. Quando dividiamo ${}^{ds}U/{}^{s}U$, poiché ${}^{s}U$ a sua volta contiene tutti gli ${}^{s}G$ e tutti i G di densità sottomultiple di *s*, sicuramente questi Generatori non saranno presenti nel quoziente ${}^{ds}U/{}^{s}U$. Ne consegue che ${}^{ds}U$ è divisibile per tutti i ${}^{ds}G$ e tutti i G delle densità sottomultiple di *d*s*, tranne le densità che sono anche sottomultiple di *s*. Data la (7), si deve avere che tutti i divisori di ${}^{ds}U/{}^{s}U$ devono essere anche divisori di ${}^{d}(S)/S$, e necessariamente anche divisori di ${}^{d}(S)$. Pertanto si ha che ${}^{d}(S)$ è divisibile per tutti i ${}^{ds}G$ e tutti i G delle densità sottomultiple di *d*s*, tranne le densità che sono anche sottomultiple di *s*. E' ovvio che se *s* è multiplo di *d*, *d* è sottomultiplo di *s*, e quindi i ${}^{d}G$ saranno tra i G esclusi dalla divisibilità.
Quindi è dimostrato che data una qualsiasi sequenza S di lunghezza *s* con *s* non multiplo di *d*, la ripetizione di *d* volte S sarà sempre divisibile per tutti i ${}^{d}G$.
Notare che anche *s*=*d* rientra nel caso di s multipla di *d*. Infatti se volessimo spiegare in altri termini questa particolare proprietà delle sequenze ripetute, potremmo dire che, poiché facendo la divisione ${}^{ds}U/{}^{s}U$ non facciamo altro che togliere dai fattori Primi di ${}^{ds}U$ tutti quelli delle densità sottomultiple che sono anche sottomultiple di *s*, e poiché i divisori di ${}^{d}(S)$ sono i medesimi divisori di ${}^{ds}U/{}^{s}U$, ne consegue che ${}^{d}(S)$ è divisibile per tutti i Primi di densità *d*s* e delle densità sottomultiple escluse *s* e le sue sottomultiple, indipendentemente da S.
Questa proprietà dei numeri formati da ripetizioni di una sequenza non dipendono dalla sequenza, ma solo dalla sua lunghezza e dal rapporto di questa lunghezza con *d*.

Esempio 1:
$^4(123) = 123123123123 = 123 * {}^{4*3}U/{}^3U = 123 * {}^{12}U/{}^3U$;
$^{12}U = [^{12}G]*[^6G]*[^4G]*[^3G]*[^2G]*3$;
$^3U = [^3G]*3$;
quindi
$^4(123) = 123 * {}^{12}U/{}^3U= 123 * ([^{12}G]*[^6G]*[^4G]*[^3G]*[^2G]*3/[^3G]*3=123 * [^{12}G]*[^6G]*[^4G]*[^2G]$;
pertanto $^4(123)$ sarà divisibile per tutti i Primi di densità 12, 6, 4 e 2, tra cui quelli di densità 4, che è il numero di ripetizioni della sequenza.

Esempio 2:
$^4(1234) = 1234123412341234 = 1234 * {}^{4*4}U/4U = 123 * {}^{16}U/{}^4U$;
$^{16}U = [^{16}G]*[^8G]*[^4G]*[^2G]$;
$^4U = [^4G]*[^2G]$;
quindi
$^4(1234) = 1234 * {}^{16}U/{}^4U= 1234 * ([^{16}G]*[^8G]*[^4G]*[^2G]/[^4G]*[^2G];=1234 * [^{16}G]*[^8G]$;
Pertanto, avendo eliminato anche i ^4G, $^4(1234)$ non può essere divisibile per i ^4G.

Ricapitolando, una sequenza ripetuta avrà quindi sempre una fattorializzazione che comprende la sequenza stessa e tutti i Primi delle densità *d*s* e sottomultiple, tranne le densità pari a *s* o sue sottomultiple, dove *d* è il numero di ripetizioni e *s* è la lunghezza della sequenza.