Una geometria senza misure, *ovvero:*

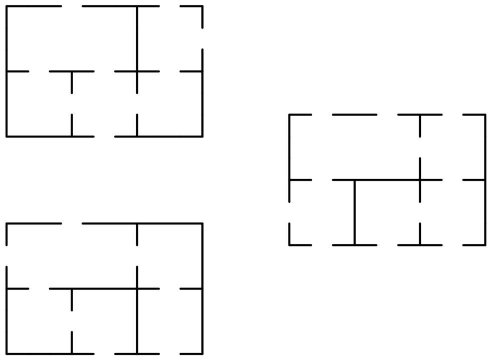
Cosa si può fare con pari e dispari!

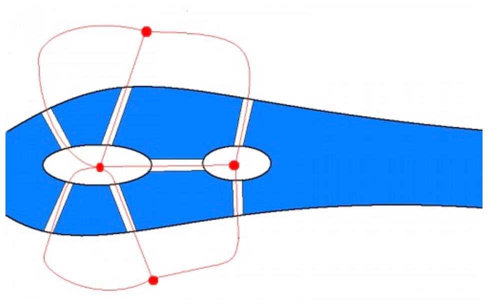
Convegno Pristem + mateinitaly
Matematica e dintorni: storie di contaminazioni negli ultimi due secoli"
Siena, 6 aprile 2019
M. Dedò

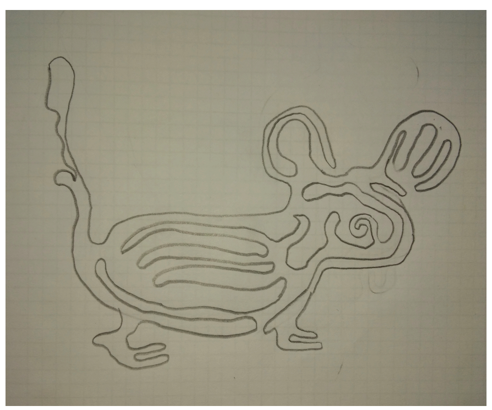
Obiettivi di questo intervento

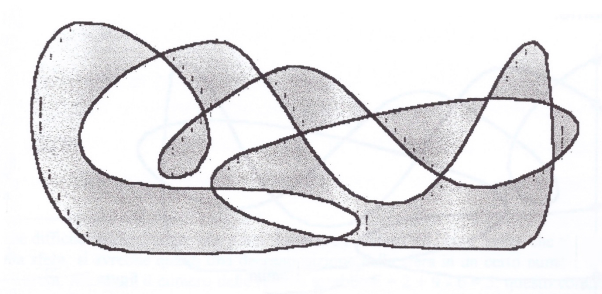
Presentare qualche esempio (molto classico):

- le 5 camere e i ponti di Königsberg;
- curve di Jordan e scarabocchi da telefono;
- problemi di colorazioni;
- problemi con nastri di Moebius;
- …

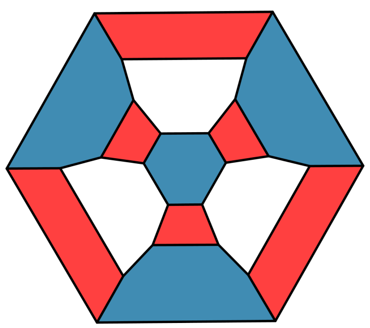


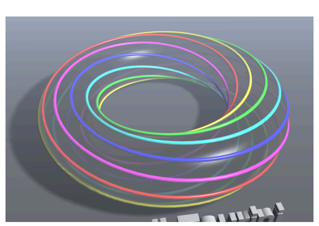


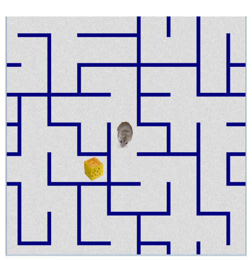


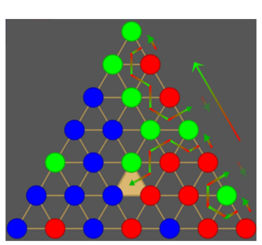


I ragionamenti alla base di questi esempi, ridotti all'osso, si basano tutti su una questione di… ***pari o dispari.***







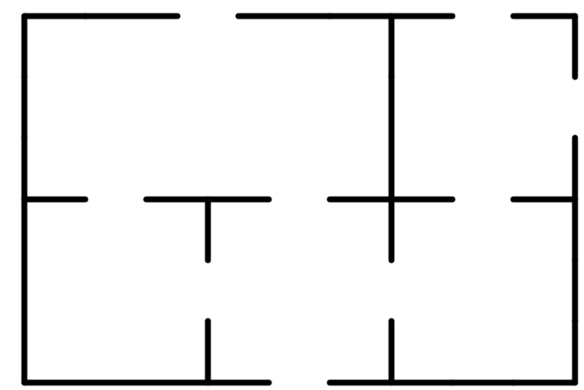


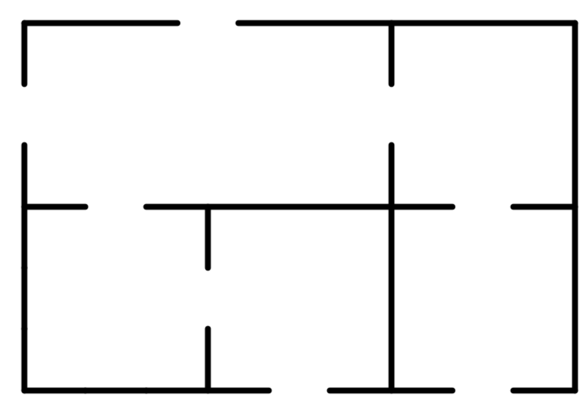
A margine, si potrebbe anche discutere:

- se, cosa, come e perché si può fare a scuola;
- qualche altro esempio (non solo pari e dispari!);
- … e dov'è il rigore?

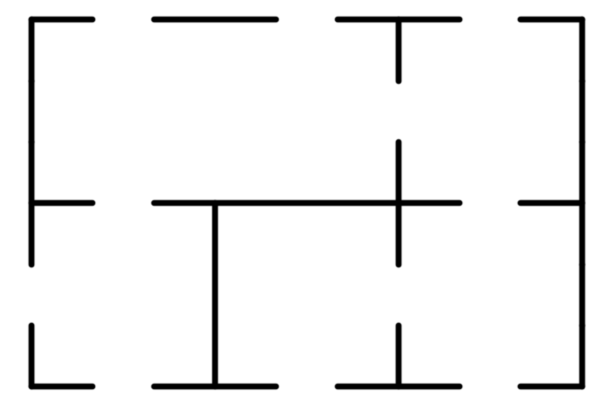
Un primo esempio: la casa di cinque stanze

C’è un appartamento di 5 stanze, con porte e finestre che collegano le stanze fra loro e con l’esterno; siete una mosca e volete fare un giro per le stanze (e anche per l’esterno, naturalmente) in modo da passare **una e una sola volta** per ciascuna porta/finestra.





Vietato passare due volte dalla stessa porta/finestra

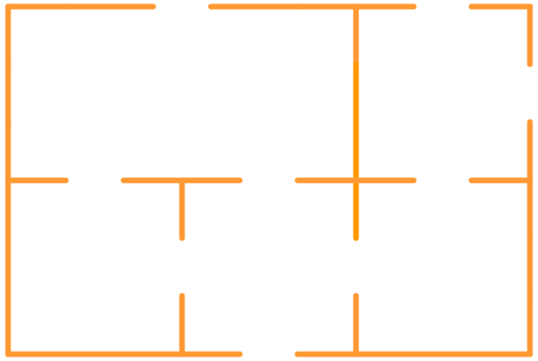


È possibile o non è possibile?

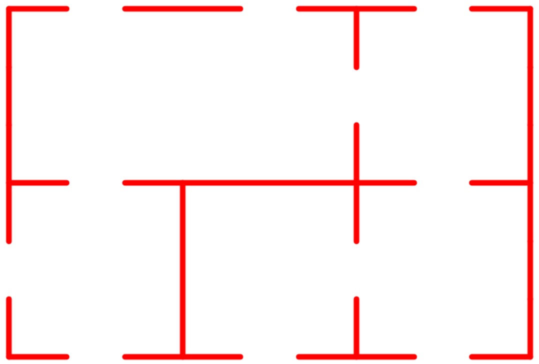
Se è possibile, si tratta di un percorso chiuso (punto di arrivo e punto di partenza coincidono) o di un percorso aperto? E se il percorso è aperto, punto di arrivo e punto di partenza sono obbligati o li possiamo scegliere come vogliamo?

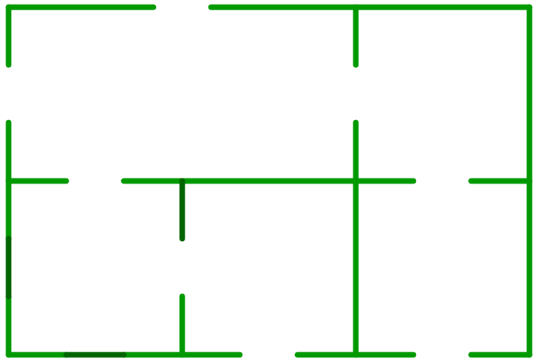
Le risposte: ci sono tre possibilità

- è possibile; si ottiene un circuito chiuso; e si può partire da qualunque camera;
- è possibile, ma solo con un percorso aperto che inizi dalla camera in alto a destra e finisca in quella in alto a sinistra (o viceversa);
- non è possibile, da qualunque stanza si parta.



Vietato passare due volte dalla stessa porta/finestra

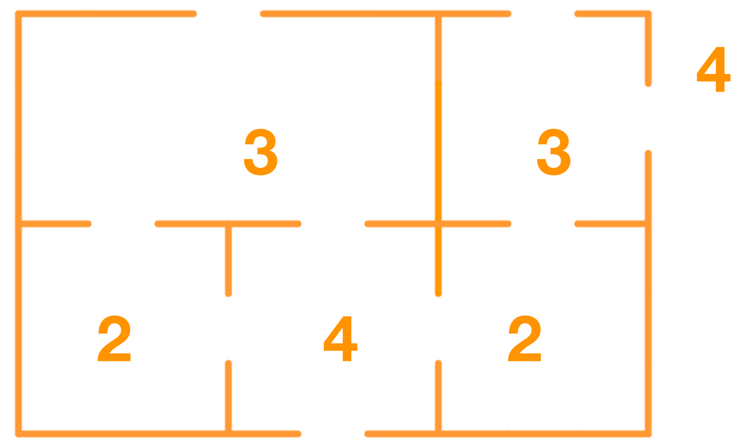


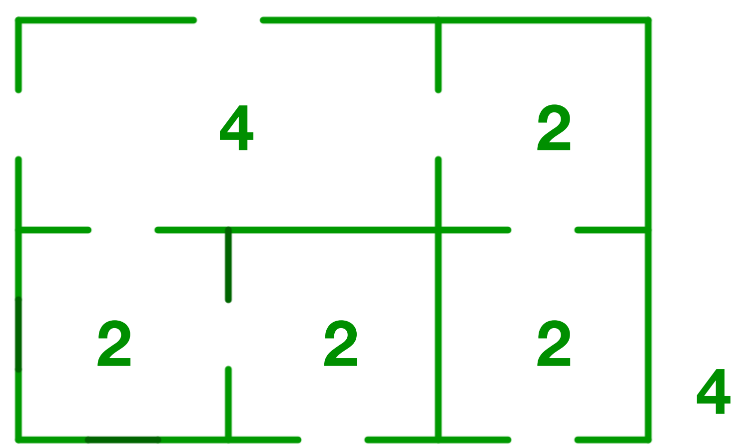


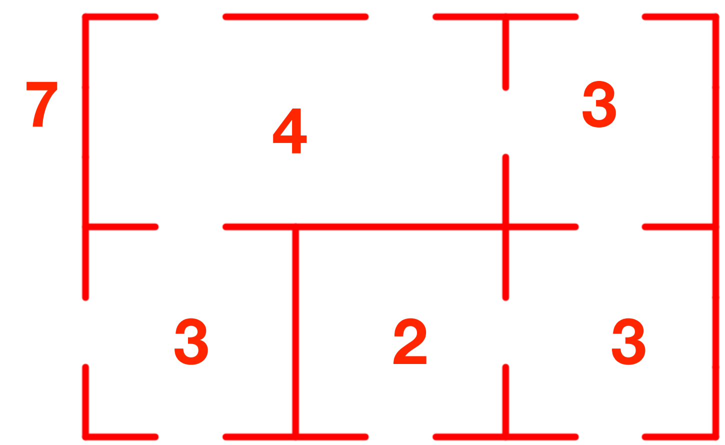
Il ragionamento che permette di giustificare queste affermazioni è semplice, ma richiede di *mettere in ordine* i fatti. L'unica **idea** necessaria è la seguente: se il percorso **passa da** una stanza, deve entrare e poi anche uscire, quindi richiede **due** aperture (porte o finestre).

Perché?

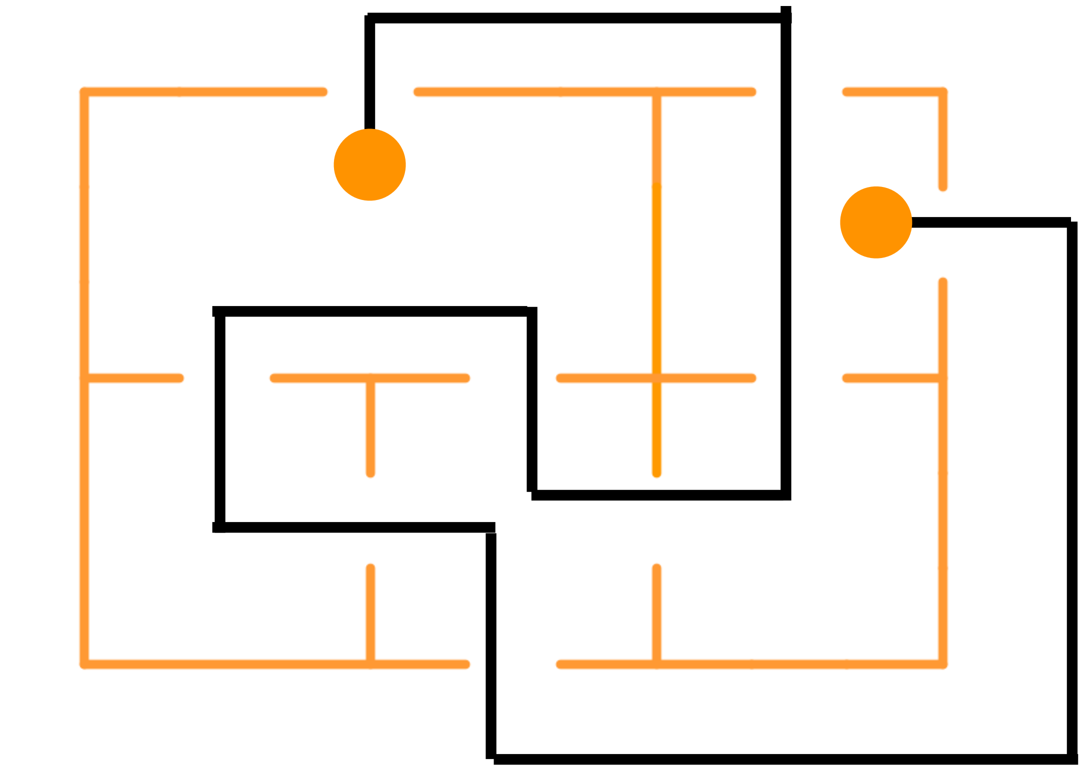
Immaginando il percorso completato, ogni stanza dovrà avere un numero **pari** di porte/finestre se il percorso è un circuito chiuso; mentre, se il percorso arriva in una stanza diversa da quella di partenza, ci saranno **due** stanze (arrivo e partenza) con un numero **dispari** di porte/finestre (e tutte le altre ne avranno un numero pari).



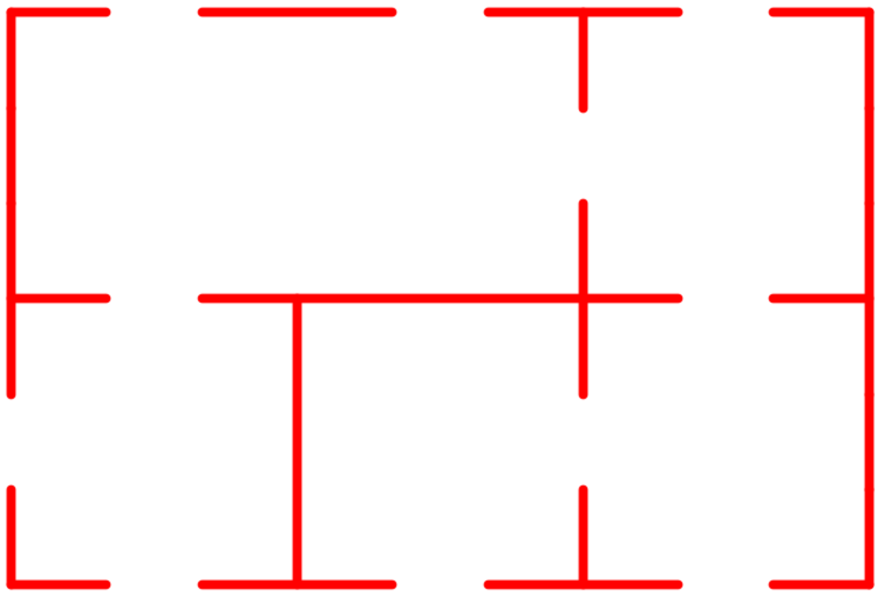


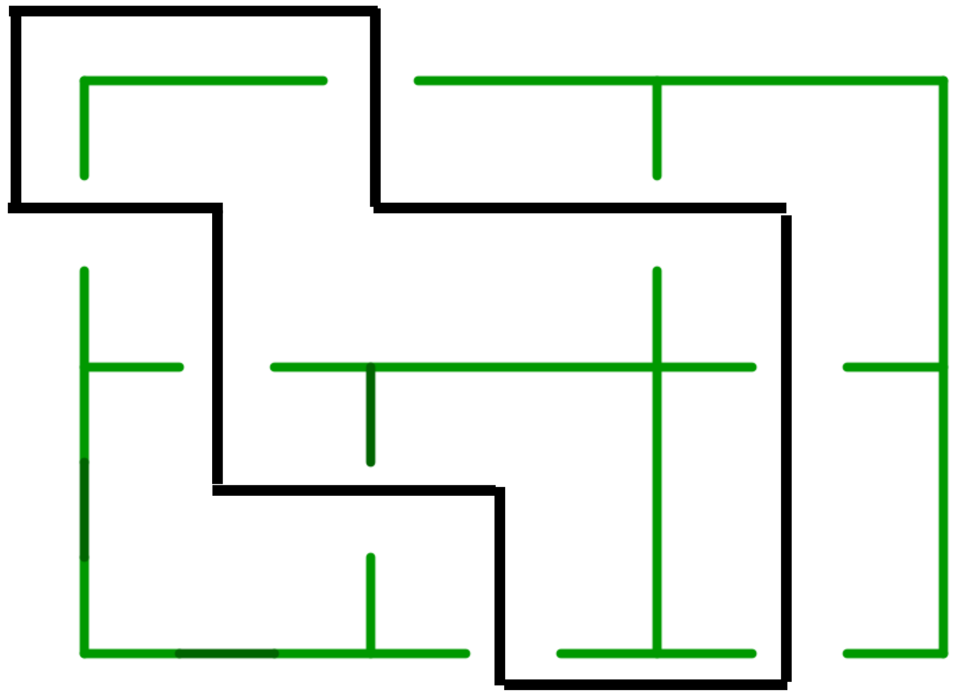


…e fra le *stanze* va conteggiato anche l'esterno!



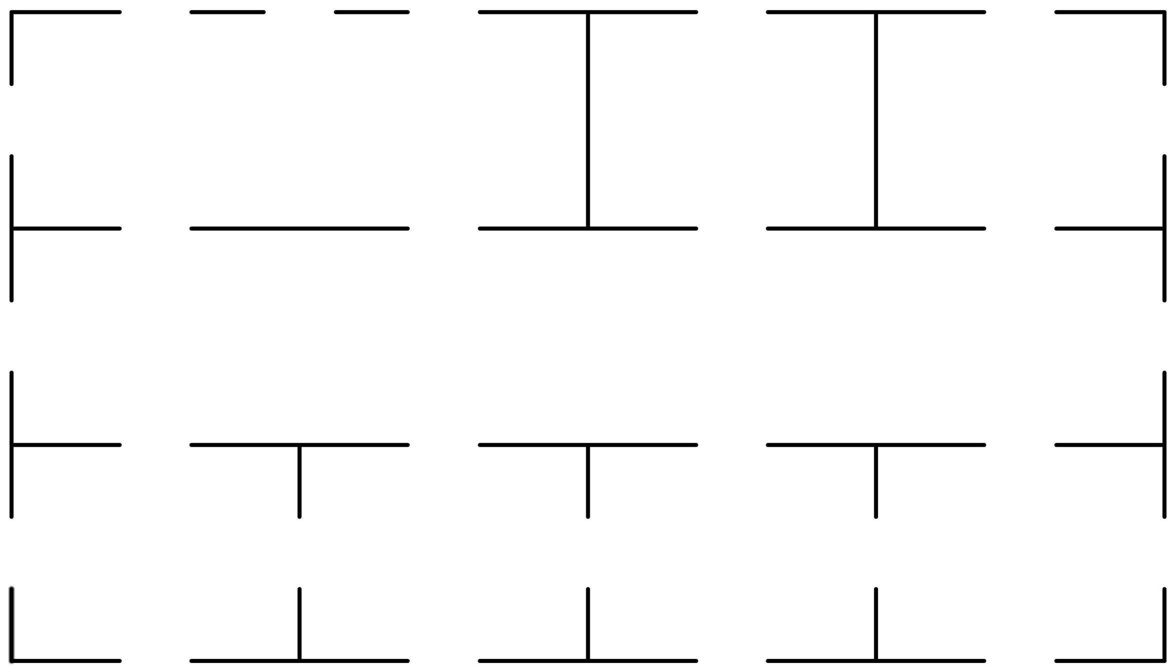
Possibili percorsi…





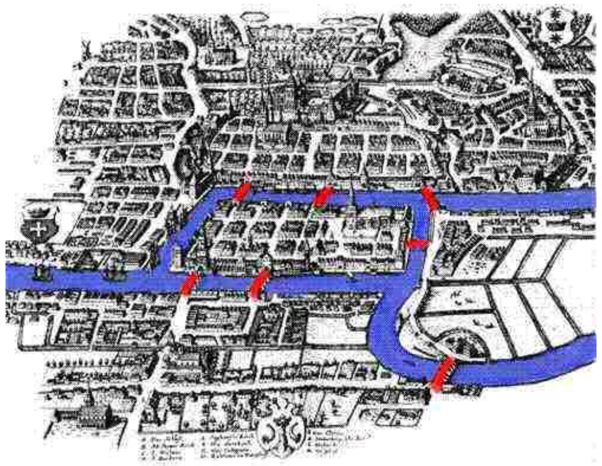
Naturalmente ci sono
anche altre soluzioni…!

Variazioni sul tema



Si possono arbitrariamente inserire stanze, porte e finestre a volontà, e disegnare quindi piante di appartamenti di ogni tipo…

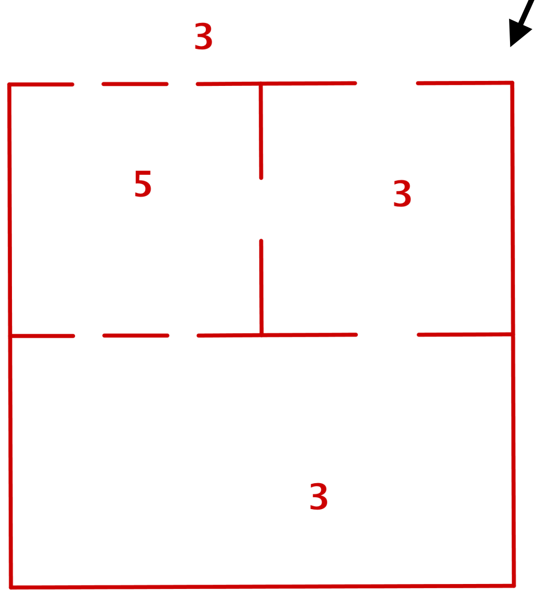
La **prima volta** che ci si scontra con questo problema, è più semplice *arrivare al punto* se porte e finestre sono *poche*; ma, **dopo** che si è capito il perché (pari/dispari…), diventa assolutamente indifferente (ai fini della difficoltà del problema) se una stanza ha 3 porte o ne ha 3257, se è un rettangolo o un 13-gono non regolare… (l'unica difficoltà sta semmai nel disegnare la piantina…!).

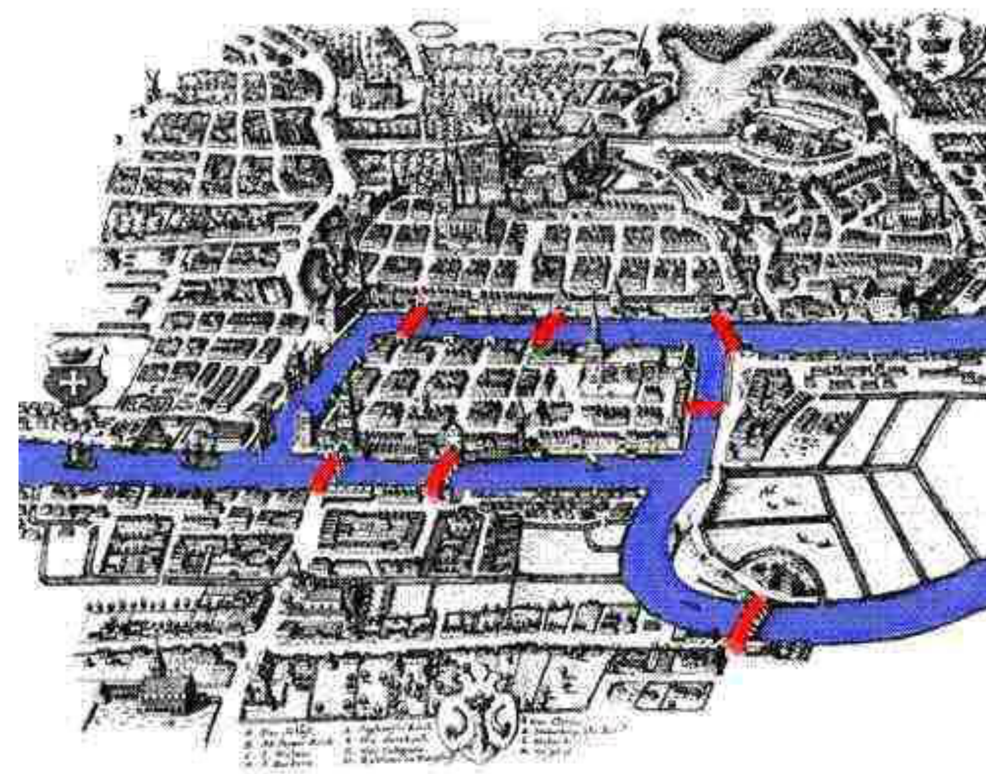


È del tutto analogo il celebre problema dei *ponti di Königsberg*. Le porte/finestre corrispondono ai ponti e le stanze corrispondono alle regioni in cui il fiume divide la città: le due isole e le due sponde.

Uguali/diversi

Il problema dei 7 ponti di Königsberg è quindi del tutto *uguale* a questo problema di una casa con 3 stanze (e l'esterno) e 7 porte/finestre.





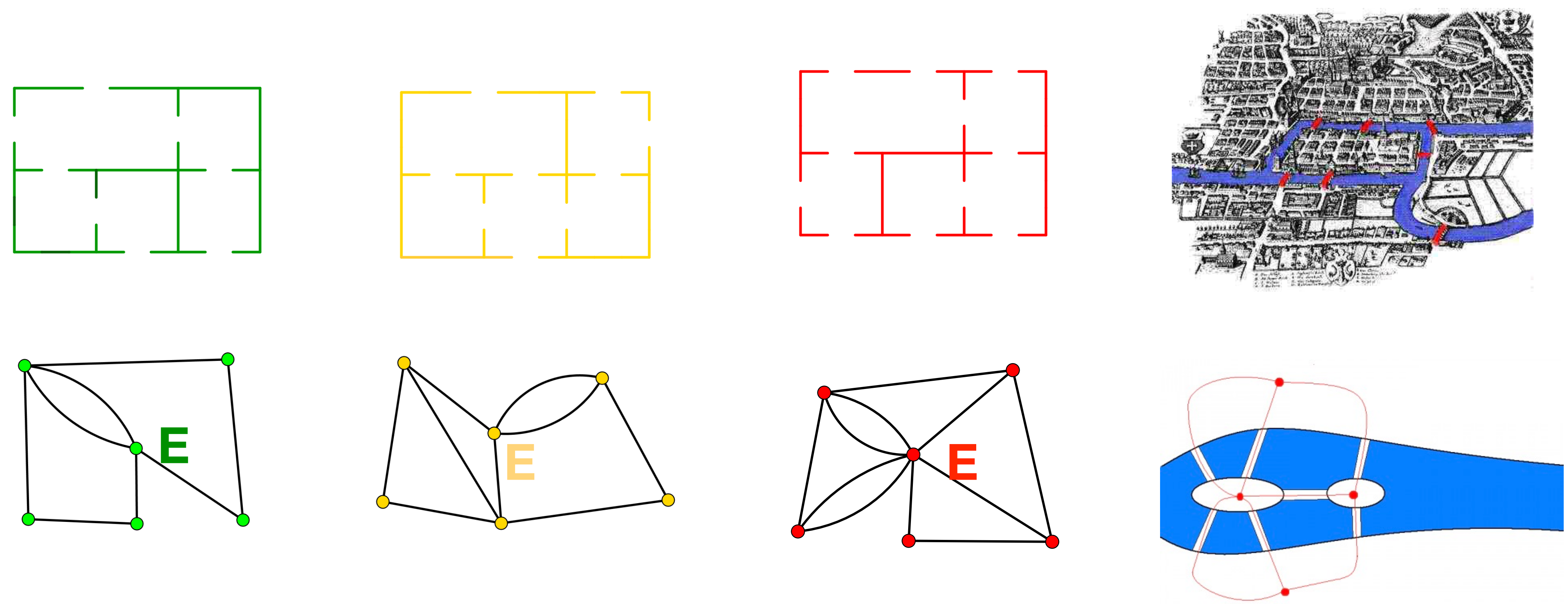
Entrambi sono *rossi*: non è possibile un percorso che passi per tutti i ponti (ovvero per tutte le porte/finestre), da qualsiasi punto si parta.

Geometria senza misure…: è chiaro che non ha nessuna importanza quanto è lungo il percorso o qual è l'area delle stanze (o delle isole); occorre *andare alla radice* per capire ***che cosa*** invece, in questo problema, ha davvero importanza.

Dalle stanze (e dai ponti) ai grafi

Sia per il problema delle 5 stanze sia per il problema dei ponti di Königsberg si può (ed è ***conveniente***) *condensare* il problema in un grafo: i punti del grafo corrispondono alle stanze (compreso un punto per l'esterno) e un arco fra due punti corrisponde a una porta o finestra fra le due stanze.

*“**conveniente**” perché ci permette meglio di individuare **qual è il punto**… potenza dell'astrazione… ma questo non vuol dire che sia facile riconoscerlo!*

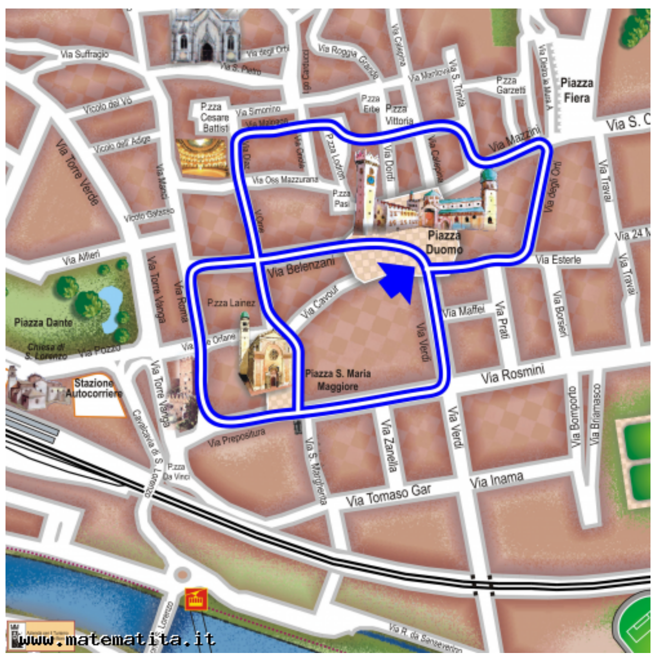


E *è il vertice che corrisponde all'esterno*

Il problema diventa: si può percorrere l'intero grafo senza mai ripassare due volte dallo stesso arco, e senza sollevare la matita dal foglio? Rendersi conto che è un problema uguale al precedente è un bel passo avanti in direzione dell'***astrazione***.

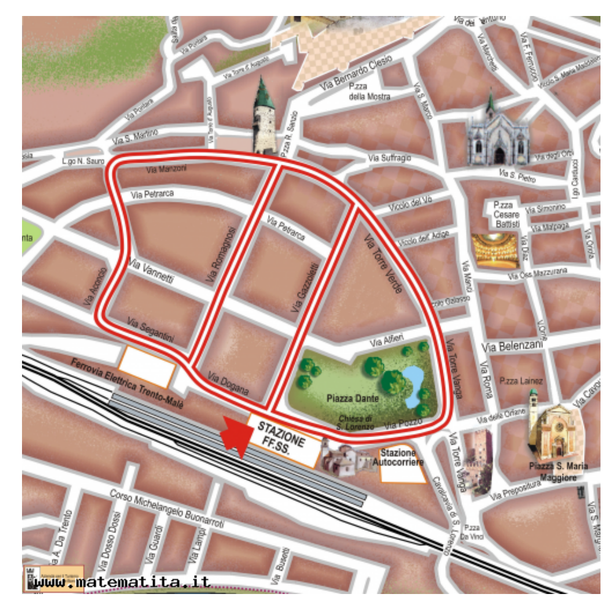
Grafi euleriani

Grafi di tipo A: da ogni vertice esce un numero pari di archi; il grafo si può percorrere; ne risulta un percorso chiuso; si può iniziare da un punto qualsiasi.



Grafi di tipo B: ci sono esattamente due vertici nel grafo (**v** e **w**) da cui esce un numero dispari di archi; il grafo si può percorrere, con un percorso aperto che comincia in **v** e finisce in **w** (o viceversa).

Grafi di tipo C: in tutti gli altri grafi (non euleriani) è impossibile trovare un percorso che permetta di passare da tutti gli archi senza ripassare due volte dallo stesso tratto né sollevare la matita dal foglio.

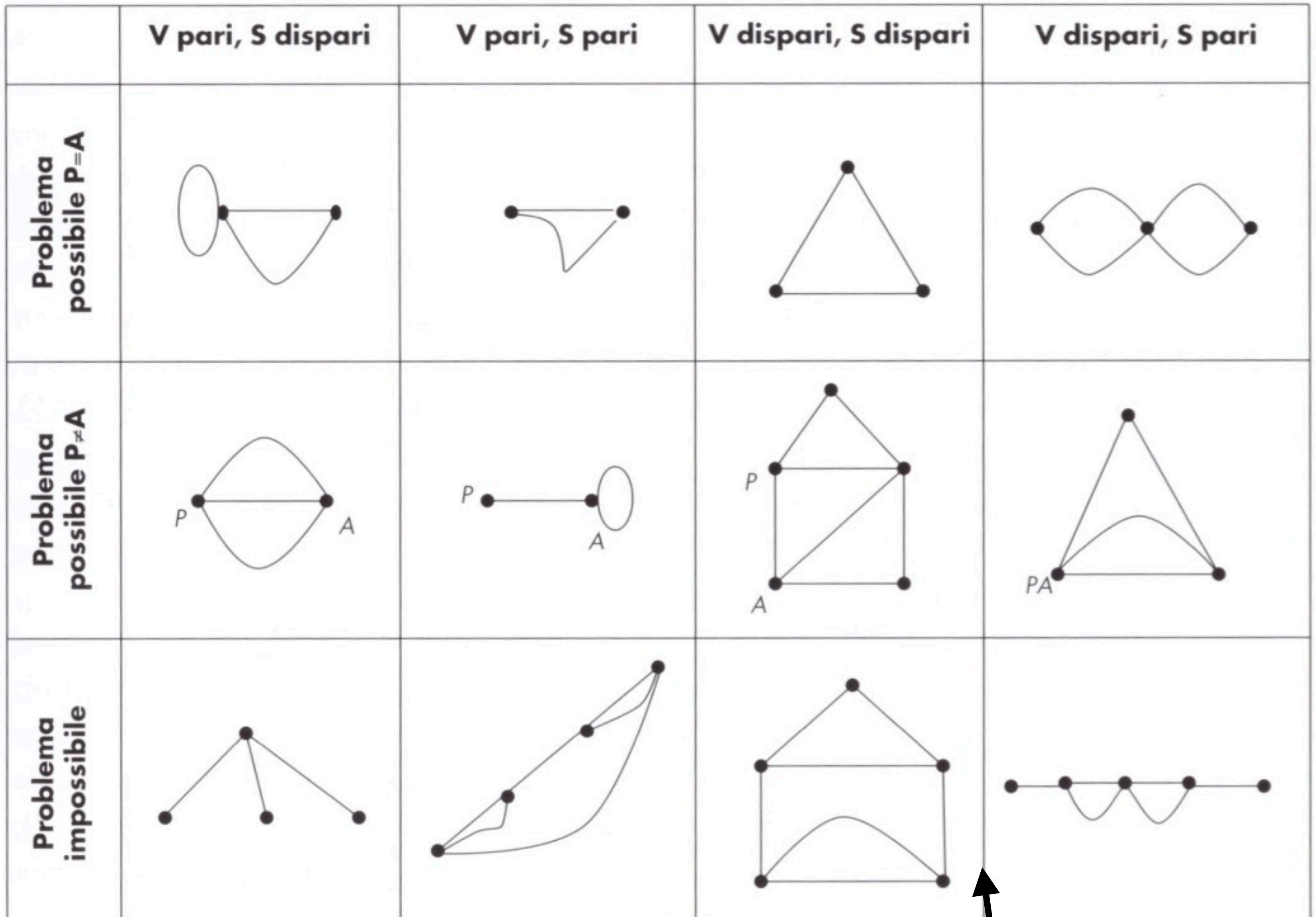


Problemi

tipo A

tipo B

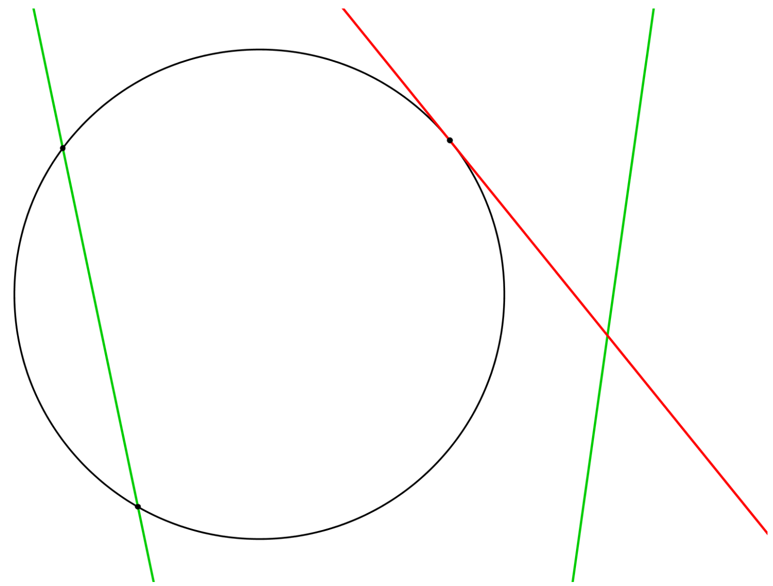
tipo C



Spesso si intuisce che *c'entra* una questione di pari o dispari, ma non si riesce a focalizzare *come* c'entra: per esempio si potrebbe immaginare che (per essere di tipo A o B) il grafo debba avere un numero pari di vertici e/o un numero pari di archi.

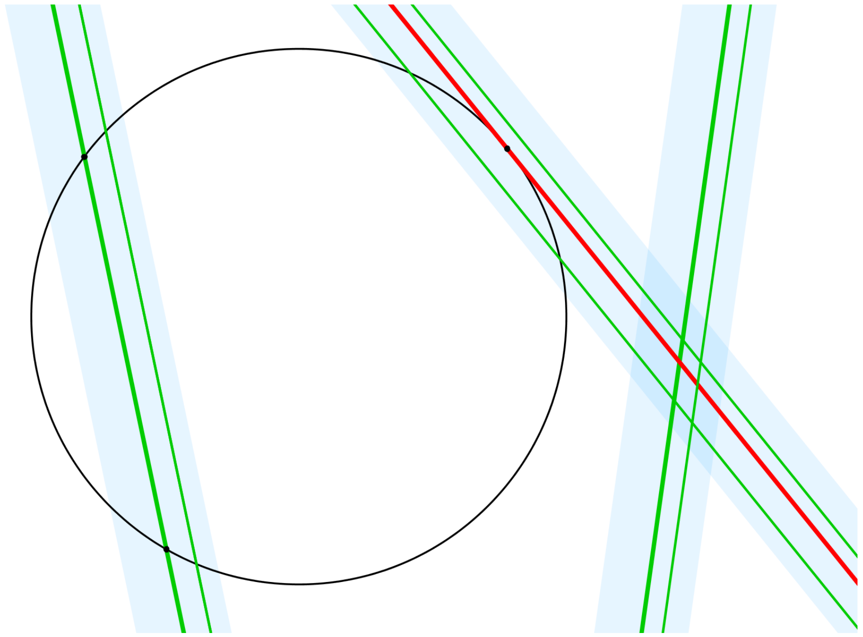
Sbagliato, ma… *c'è sotto* qualcosa di giusto.
Diventa allora utile porre un problema di questo tipo: trovare un esempio per tutti i casi possibili.

Un altro esempio



Una retta e una circonferenza possono avere **due**, o **uno solo**, o **nessun** punto di intersezione.

I casi in rosso sono quelli anomali, eccezionali, evitabili.
I casi in verde sono quelli *generici*.



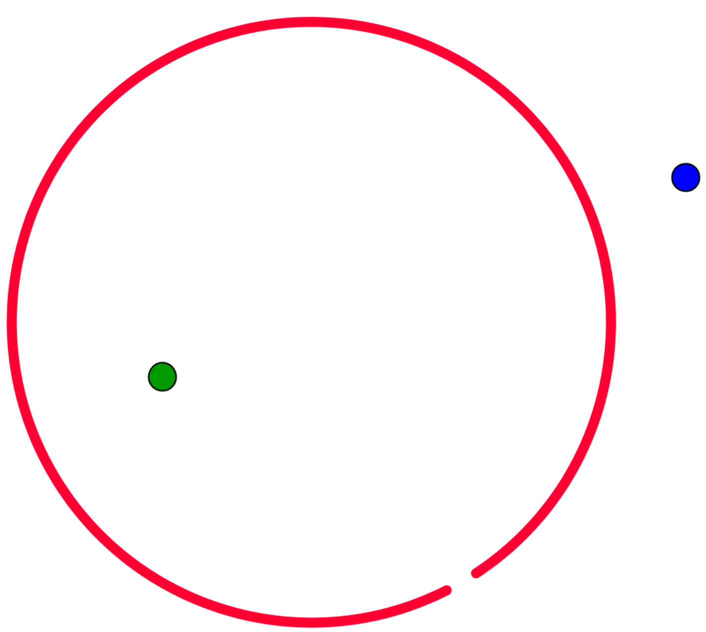
Evitabili *come*? Spostando *di poco* una retta rossa si ottengono rette verdi; spostando *di poco* una retta verde si ottengono altre rette verdi.

Quindi *quasi sempre* il numero di punti di intersezione fra una retta e una circonferenza è un **numero pari**.

… e i termini *di poco* e *quasi sempre* si possono rendere rigorosi.

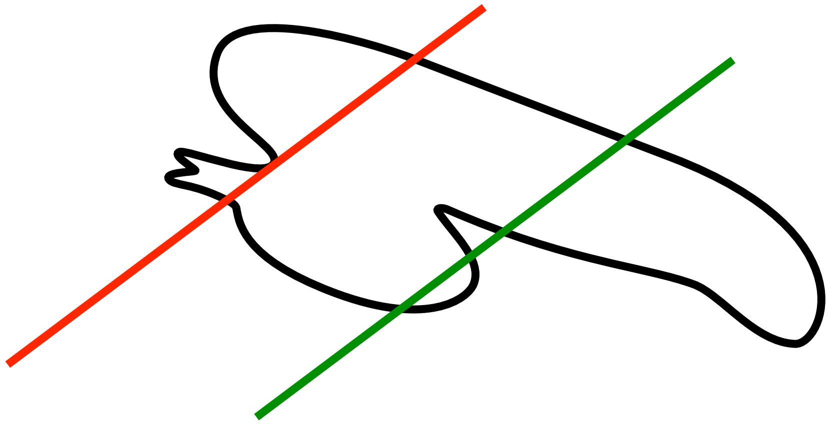
Non vale solo per le circonferenze!

Una qualunque curva piana *semplice e chiusa*, come la circonferenza, divide il piano in due regioni, un interno e un esterno (è il ***teorema di Jordan***: come a volte accade in topologia, l'enunciato sembra ovvio, ma dimostrarlo non è per niente facile!).



Un inciso: per parlare di interno e di esterno è necessario che la curva sia semplice e chiusa. La curva rossa qui a lato non è chiusa. ***Non avrebbe senso*** dire che il punto verde è interno e il punto blu è esterno: dal punto di vista della topologia, le posizioni dei due punti rispetto alla curva rossa sono ***indistinguibili***.

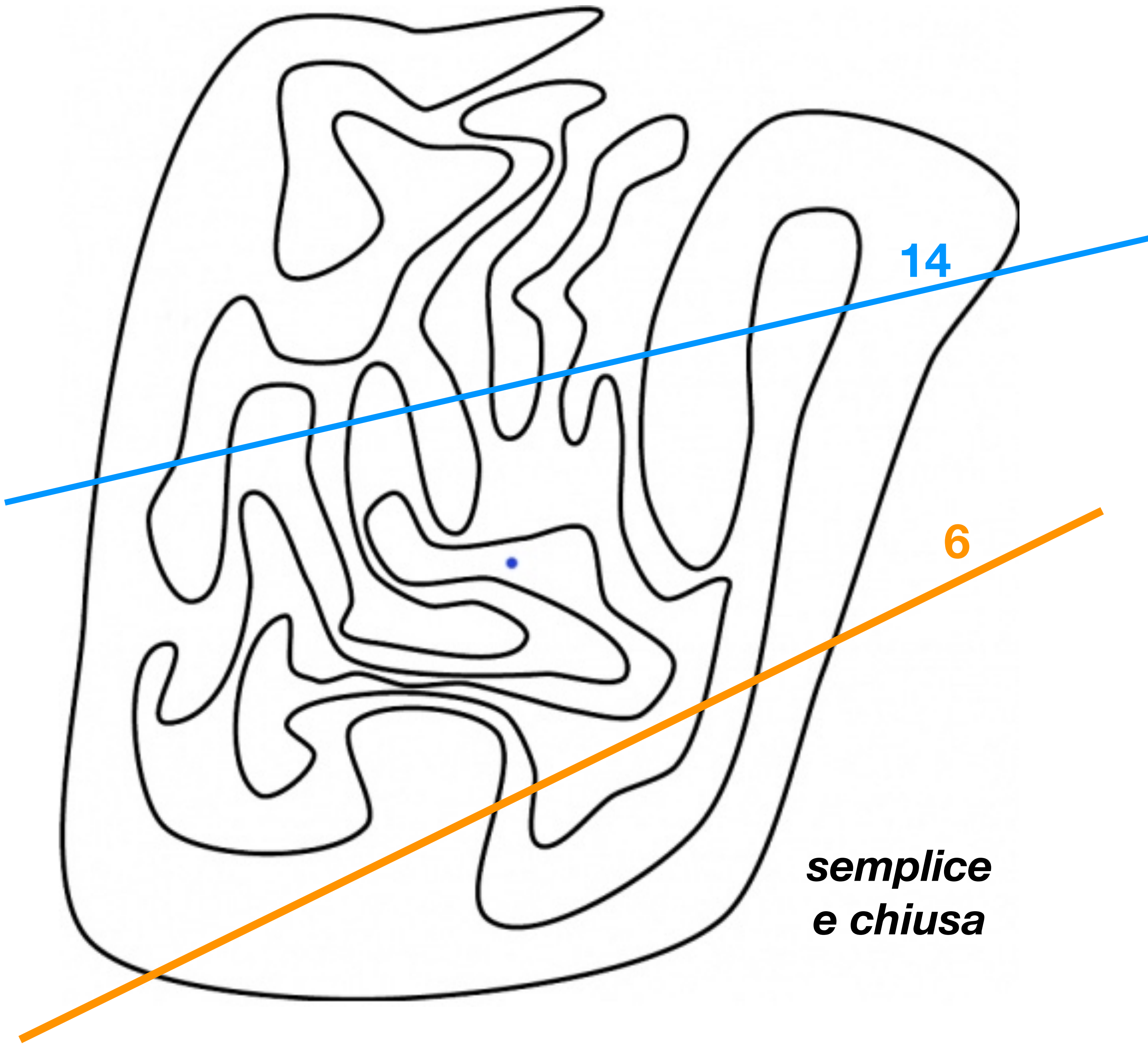
Non vale solo per le circonferenze!



Una retta che interseca trasversalmente una curva semplice e chiusa la interseca sempre in un numero PARI di punti. ***Perché?***

Naturalmente andranno evitati i casi eccezionali, quando la retta è tangente alla curva.

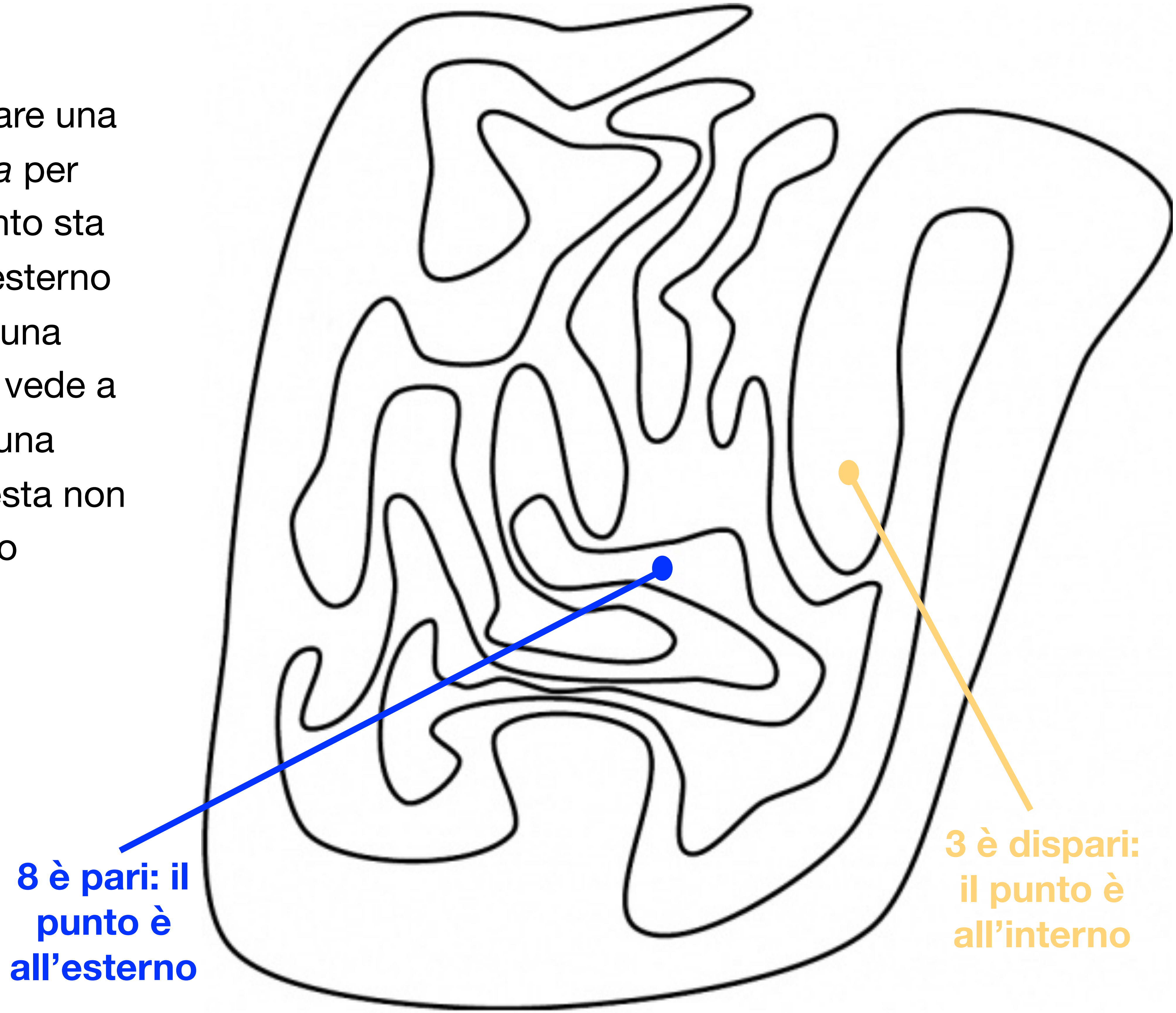
Rispondere non è difficile: in ogni intersezione (*trasversa*) la retta passa dal dentro al fuori o dal fuori al dentro: ogni volta che entra, deve poi anche uscire…!



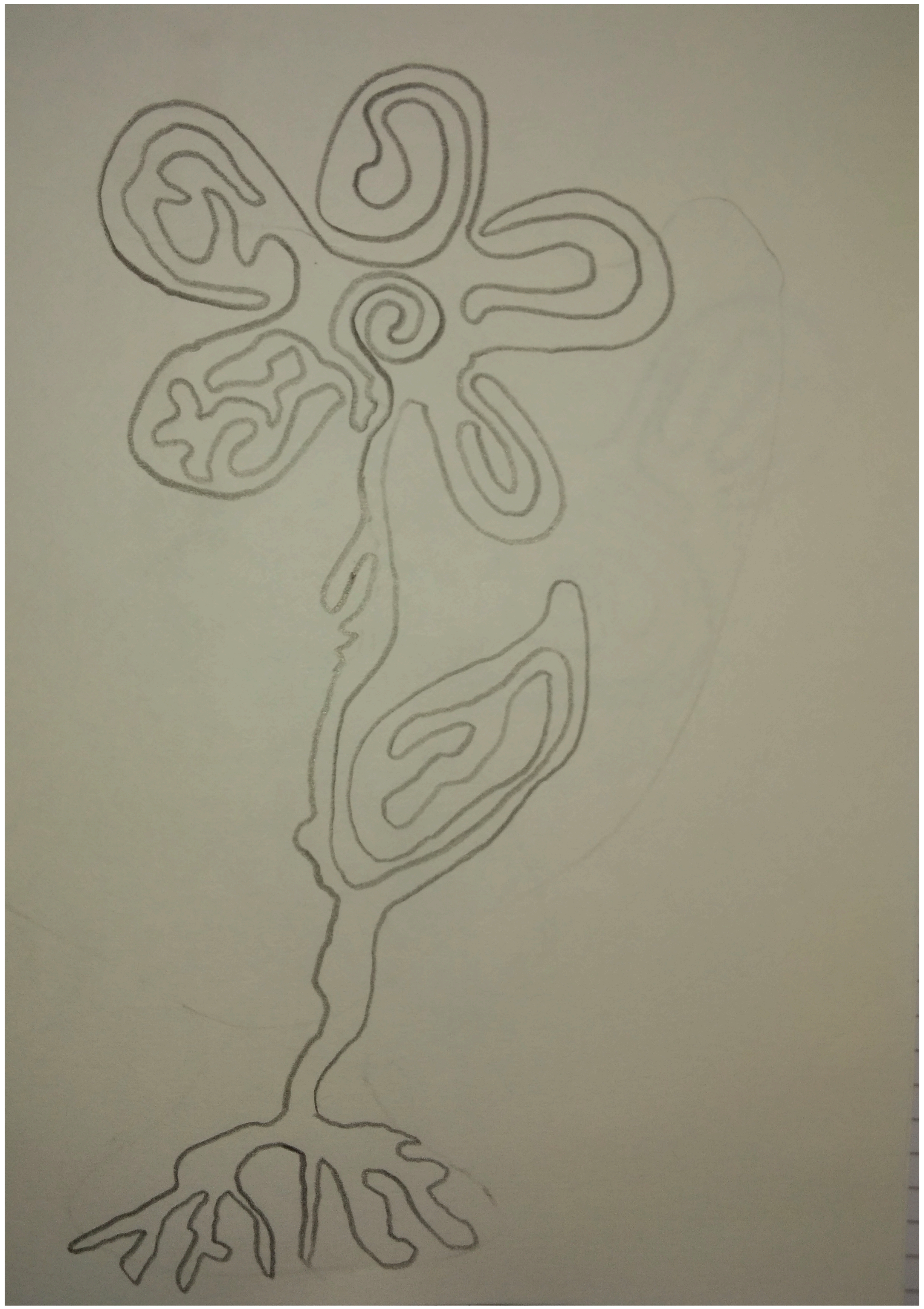
semplice e chiusa

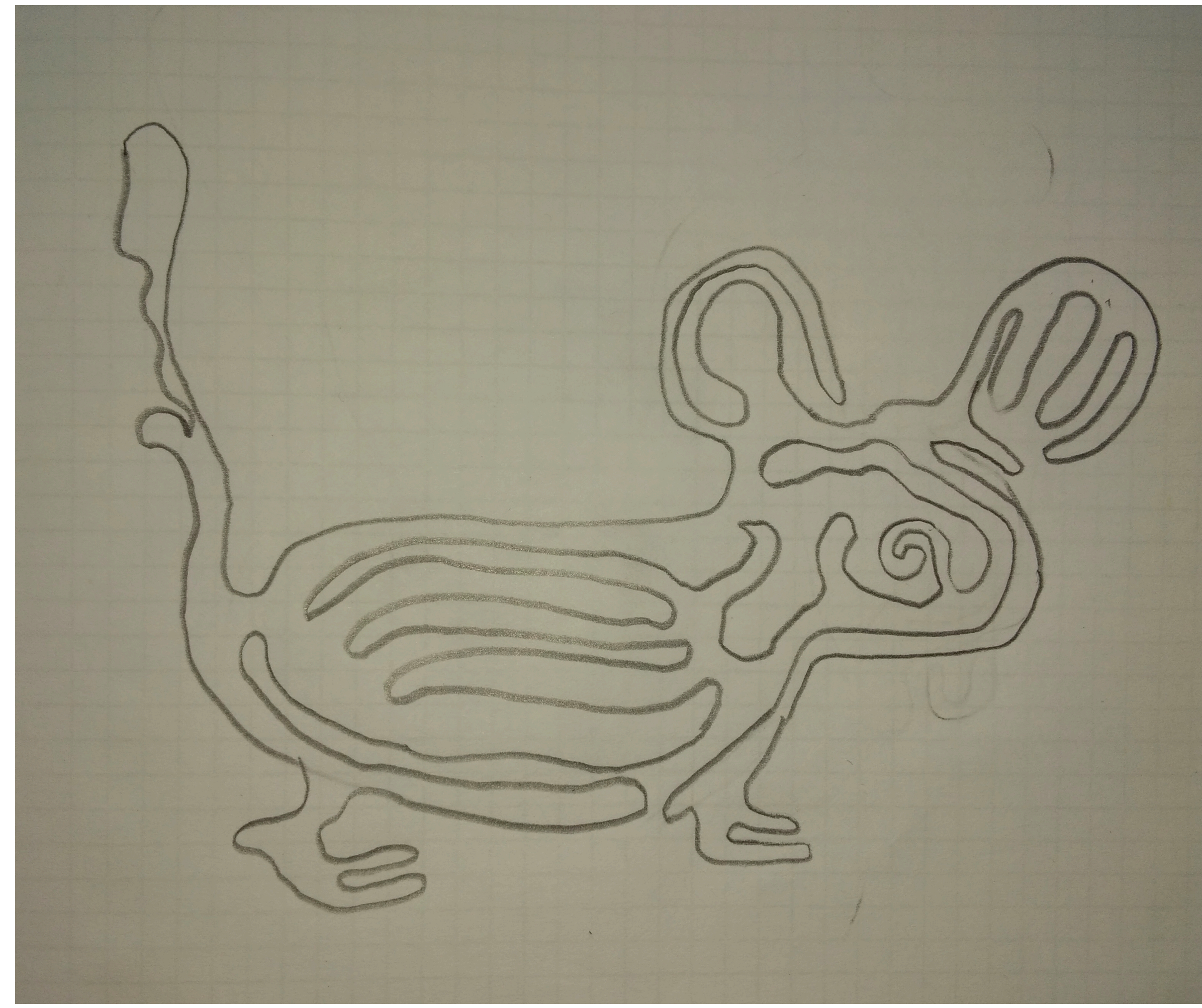
Dentro e fuori

Se ne può ricavare una maniera *comoda* per capire se un punto sta all'interno o all'esterno della curva: per una circonferenza si vede a occhio, ma per una curva come questa non è così immediato *vederlo*.



Altri esempi di curve semplici e chiuse (e una bella storia…)





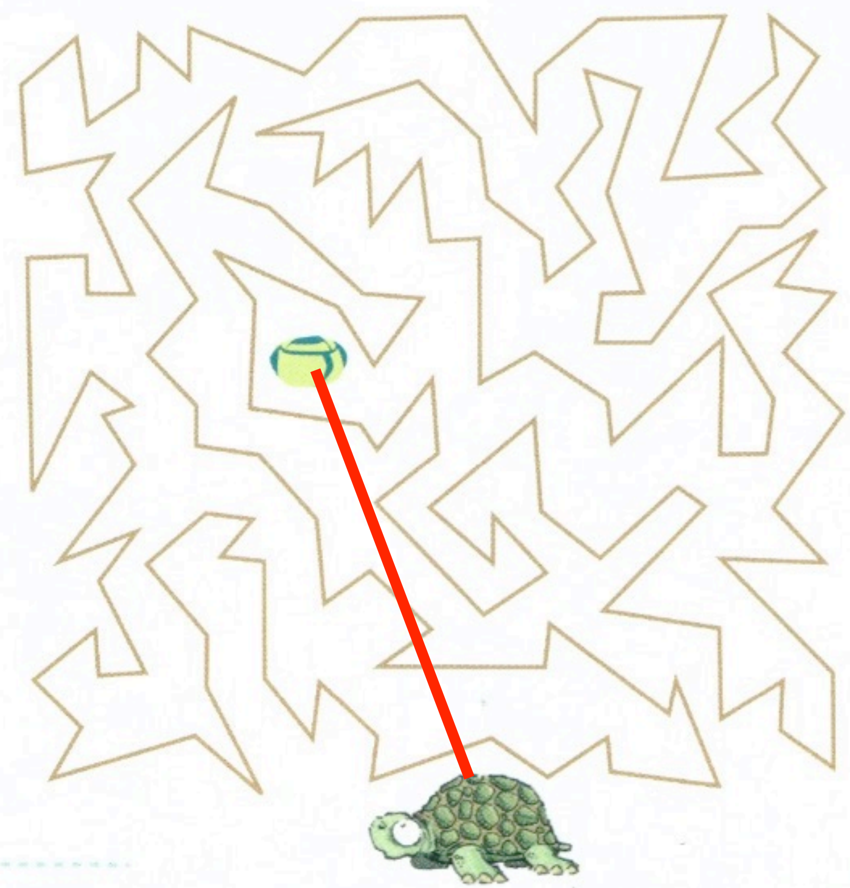
Dai ragazzi ci arrivano sempre delle sorprese…!

Un problema che si basa sullo stesso concetto

13. LA TARTARUGA E LA LATTUGA

Quella disegnata qui a lato è la piantina dell'orto di zio Gianni (le righe marroni sono la traccia del recinto).
La tartaruga Serafina vuole raggiungere la lattuga che cresce quasi in centro all'orto di zio Gianni, ma il suo guscio le impedisce di passare sotto al recinto e d'altra parte lei non sa da che parte entrare.

Secondo voi la tartaruga Serafina riuscirà a raggiungere la lattuga?

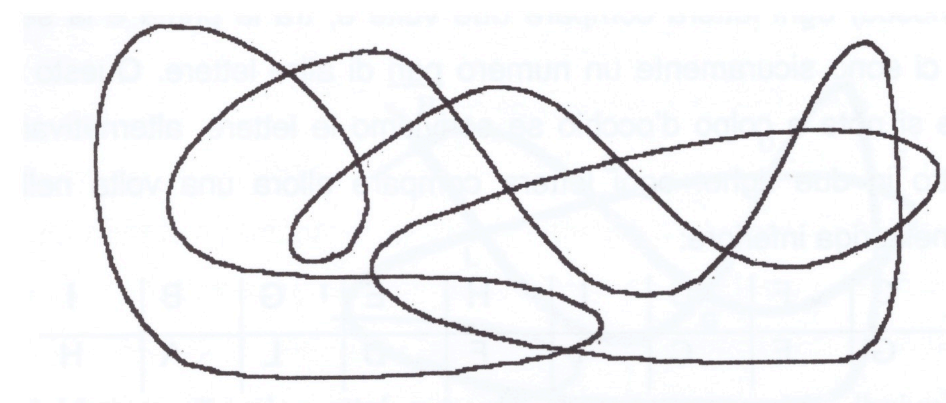


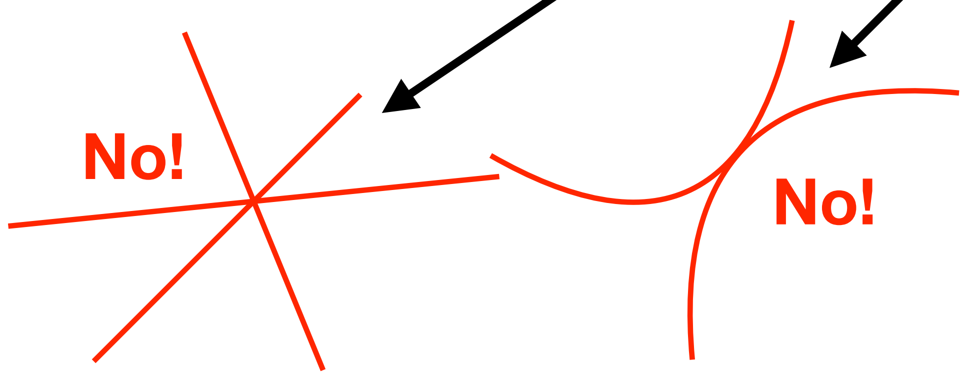
Da:
La formica e il miele,
Mimesis,
2005

5 è dispari:
la tartaruga è *fuori* dal recinto mentre la lattuga è *dentro* il recinto.

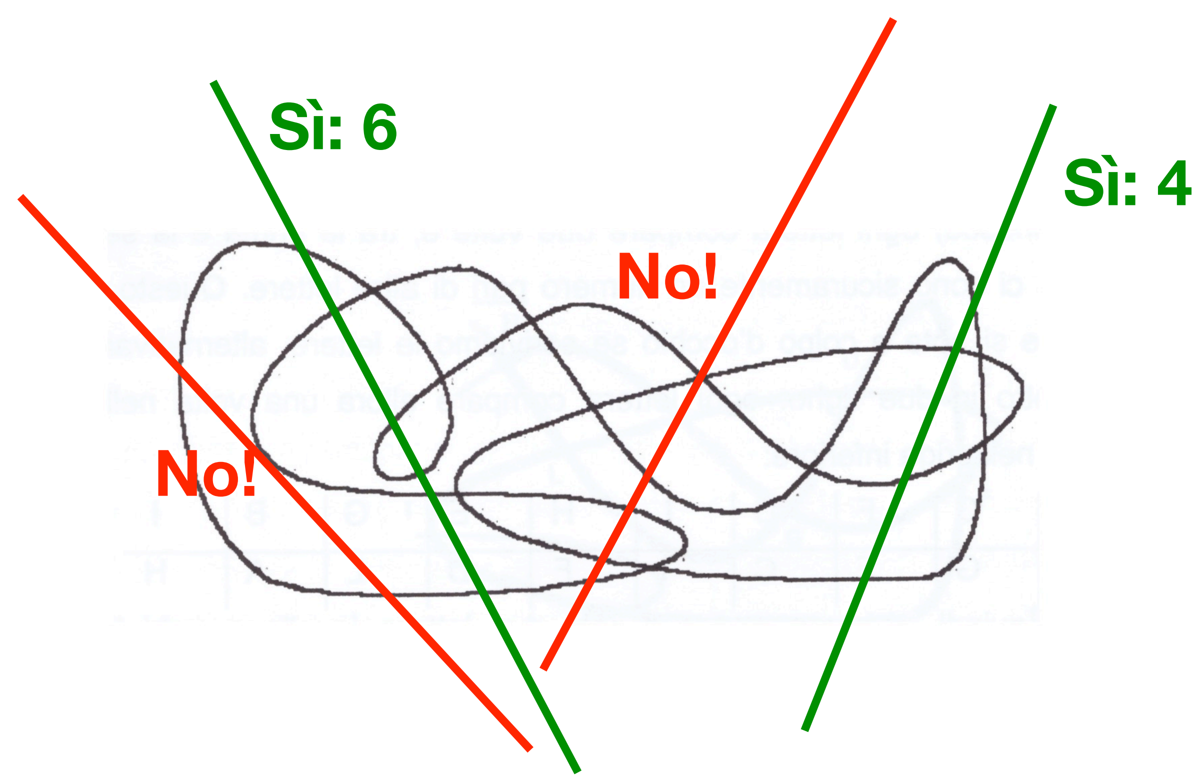
Variazioni sul tema…

Prendiamo in considerazione anche curve come questa, cioè non necessariamente semplici.
Le curve possono avere auto-intersezioni, ma queste devono essere **trasverse** (mai un ramo *tangente* a un altro ramo della curva) e sono sempre intersezioni di **soli due** rami.



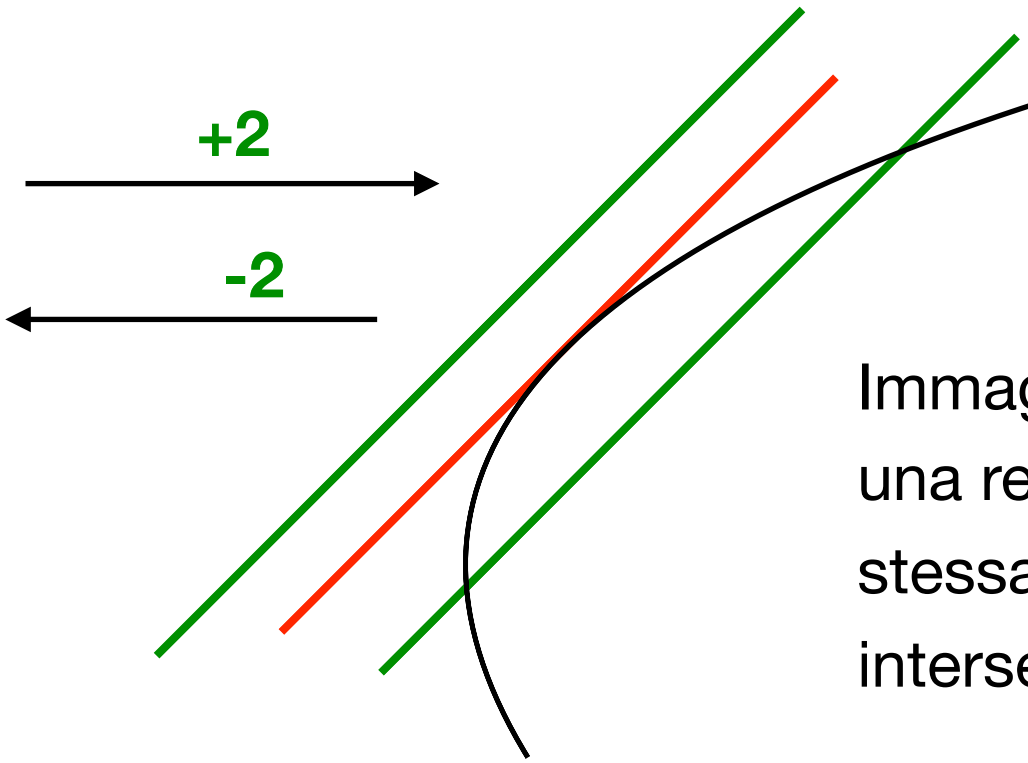


Anche per curve di questo tipo succede che *quasi tutte* le rette le intersecano in un numero **pari** di punti.

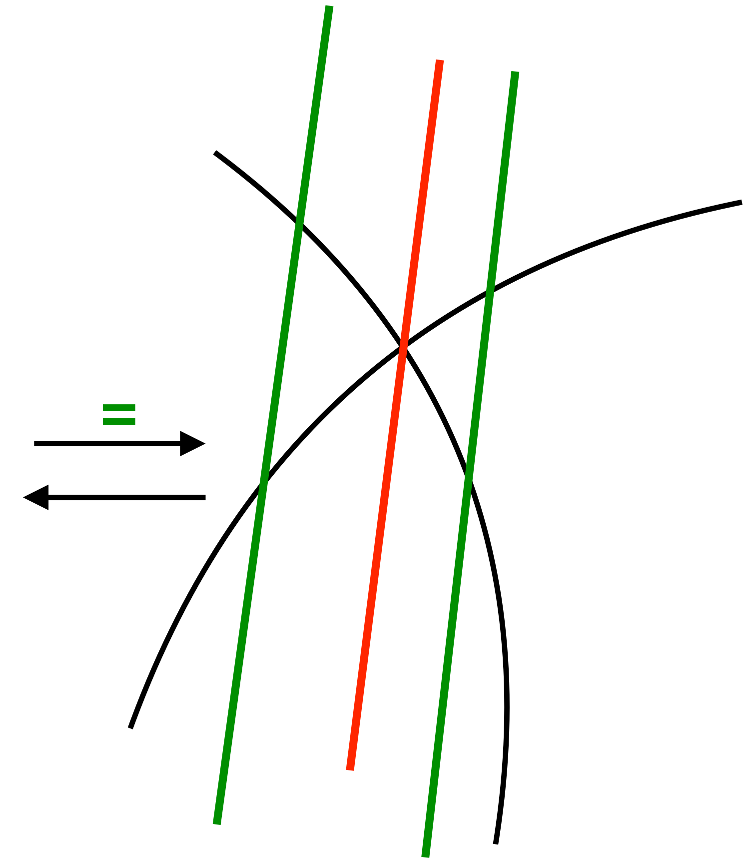


Cosa significa *quasi tutte*?
Vanno escluse le rette che passano per i punti di autointersezione della curva e le rette tangenti alla curva (sono condizioni *eccezionali*: le une e le altre, se si spostano di poco, perdono queste caratteristiche).

Perché sempre pari?

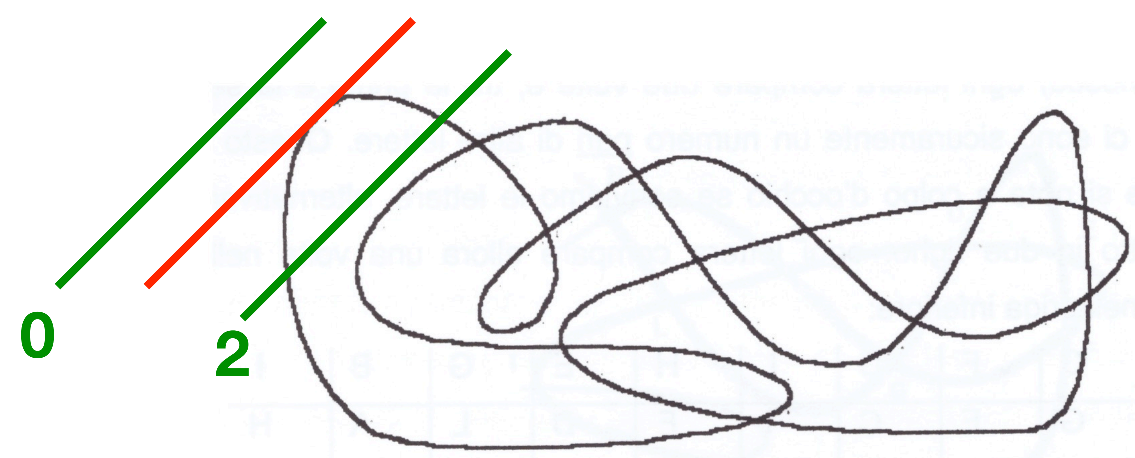


Immaginiamo di muovere una retta parallelamente a se stessa e di contare i punti di intersezione con la curva.

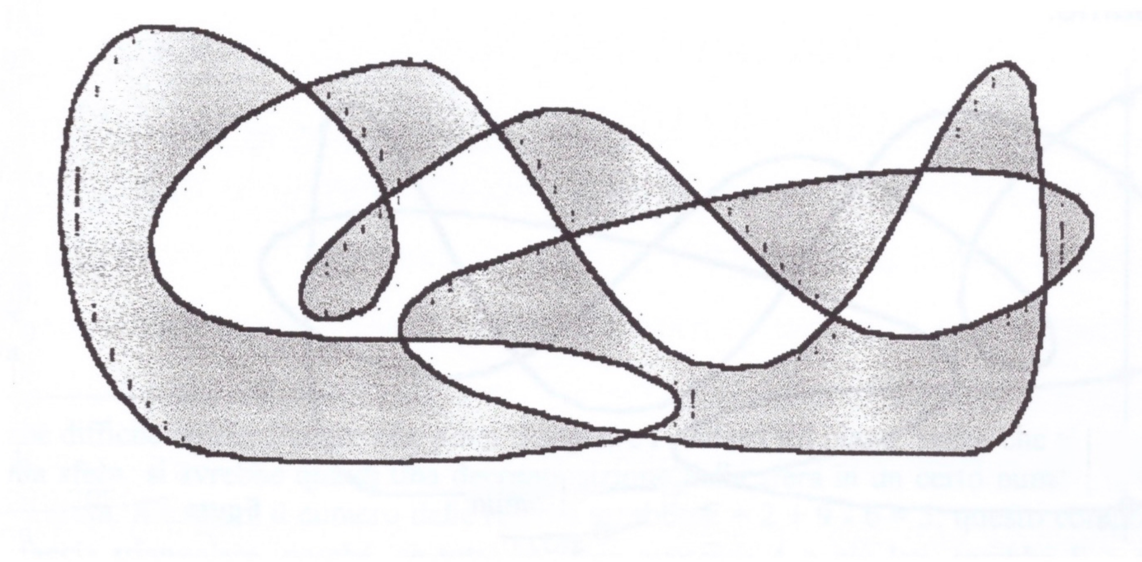


Quando si incontra una retta tangente alla curva, il numero di punti di intersezione aumenta o diminuisce di 2; quando si incontra una retta che passa per uno dei punti di autointersezione della curva, il numero di punti di intersezione non cambia.

Si comincia da 0: **quindi è sempre pari.**

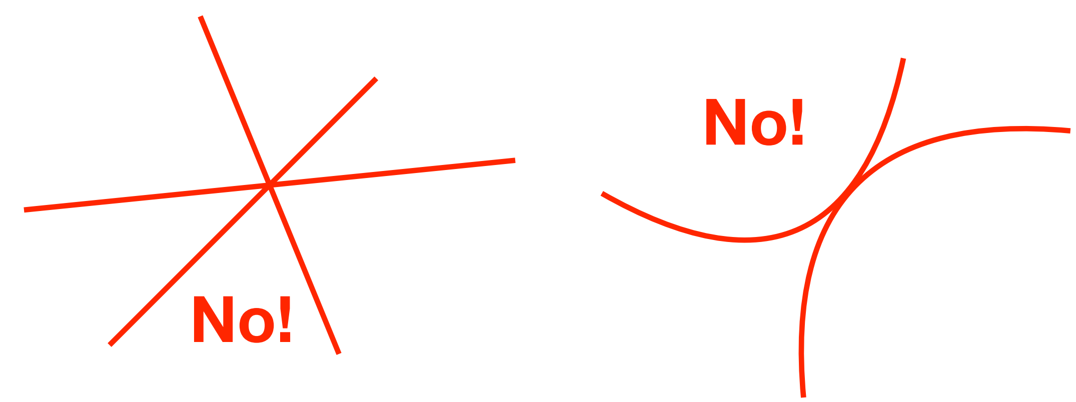


Colorare a scacchiera



Uno *scarabocchio* di questo tipo si può sempre *colorare a scacchiera*, cioè con due soli colori, utilizzando uno dei due colori per la zona illimitata all'esterno.

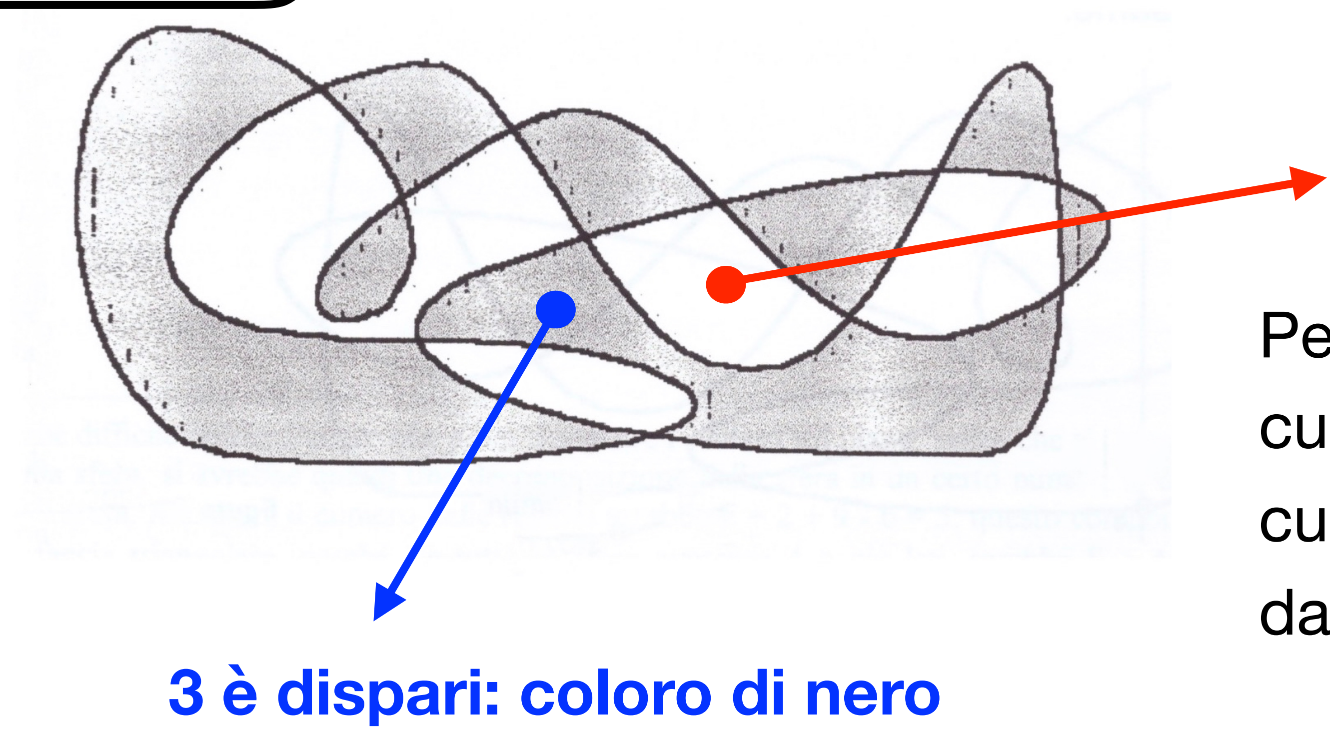
Qui, uno *scarabocchio* è una curva piana che può avere punti di auto-intersezione, ma in questi punti passano solo due rami della curva e inoltre tutte le auto-intersezioni sono trasverse (no tangenti).



Dire che si può *colorare a scacchiera*, significa che si possono colorare le regioni che rappresentano il complementare della curva nel piano utilizzando due soli colori e attribuendo colori diversi a regioni che si toccano lungo un arco.

$P + P = P$
$D + D = P$

Perché è sempre possibile?

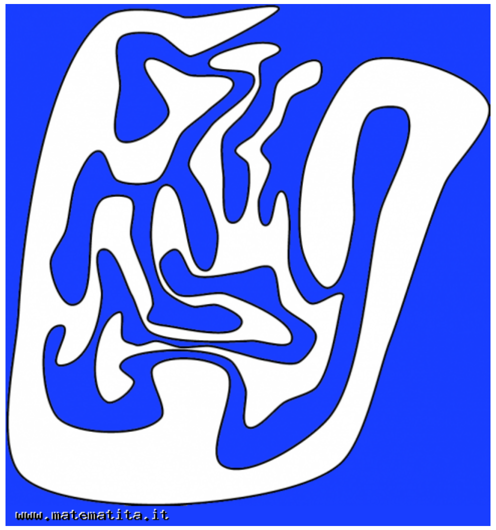


Per ogni punto del complementare della curva nel piano, conto le intersezioni con la curva di una (***qualsiasi!***) semiretta uscente da quel punto.

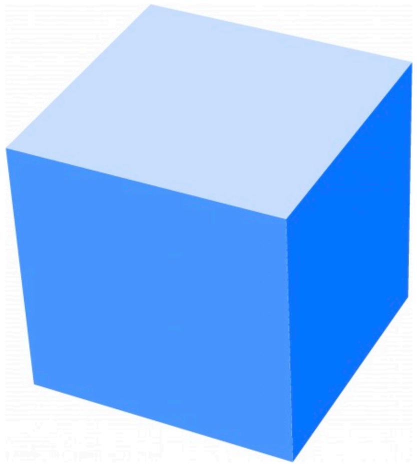
Naturalmente, andrebbero giustificate alcune cose, per esempio:

- fissato il punto, il numero di punti di intersezione con la curva di due semirette diverse uscenti da quel punto ha sempre la stessa parità;
- punti diversi nella stessa regione danno la stessa parità;
- punti in regioni adiacenti danno parità opposte.

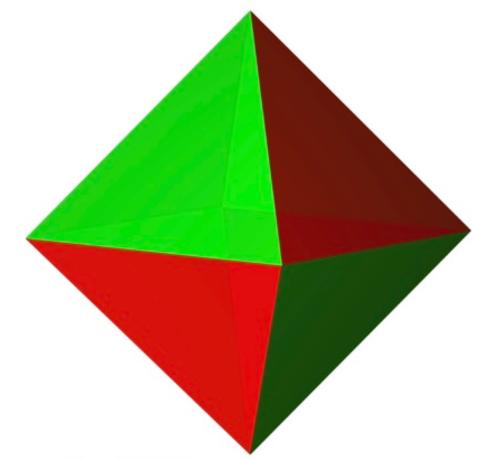
E se la curva non ha punti di autointersezione, si ritrova il dentro/fuori di Jordan…!



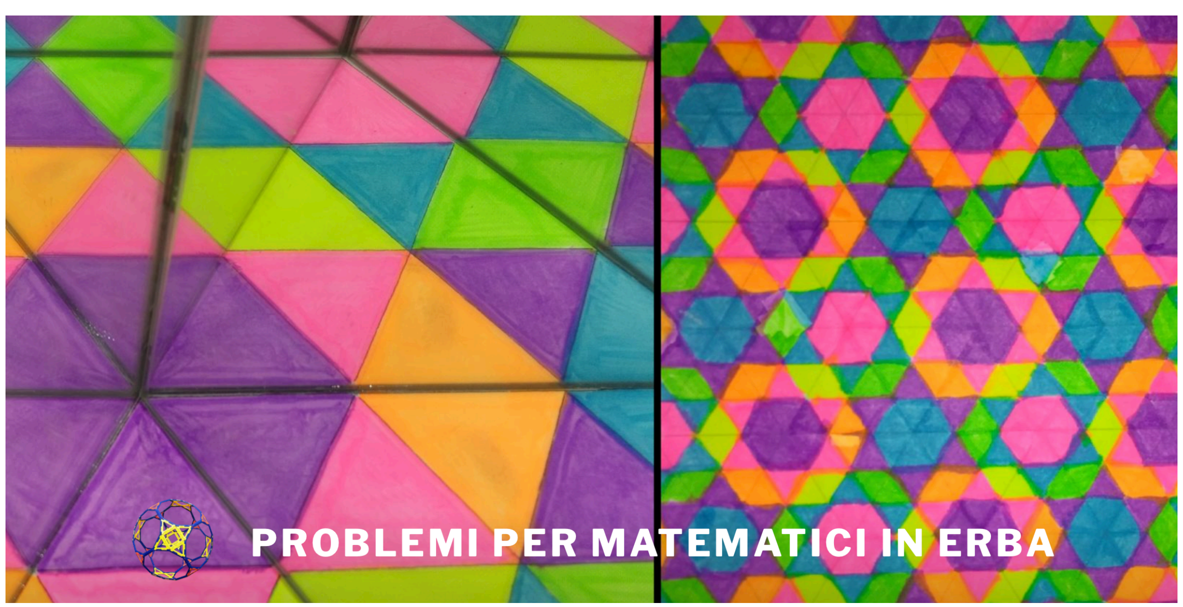
Un altro problema di colorazioni



Un ottaedro si può colorare a scacchiera, con due soli colori. Un cubo no; perché?



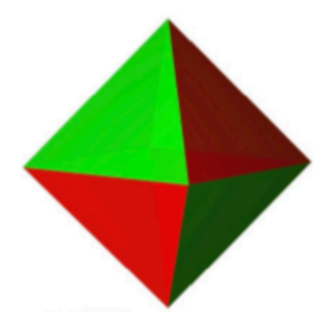
Un inciso (e uno *spot*…): si tratta di un problema che trovate anche sul sito ***Problemi per matematici in erba***: https://www.problemi.xyz



24 MARZO 2019

Colorare un cubo

Il poliedro in figura (si chiama ottaedro) è colorato a scacchiera: con questo intendiamo dire che è colorato con due colori, in modo tale che due facce che si toccano lungo uno spigolo hanno colori diversi, proprio come in una scacchiera.

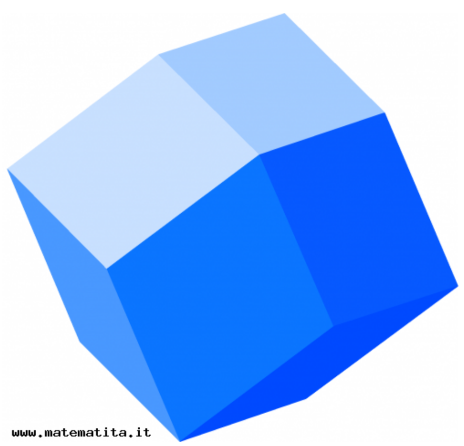


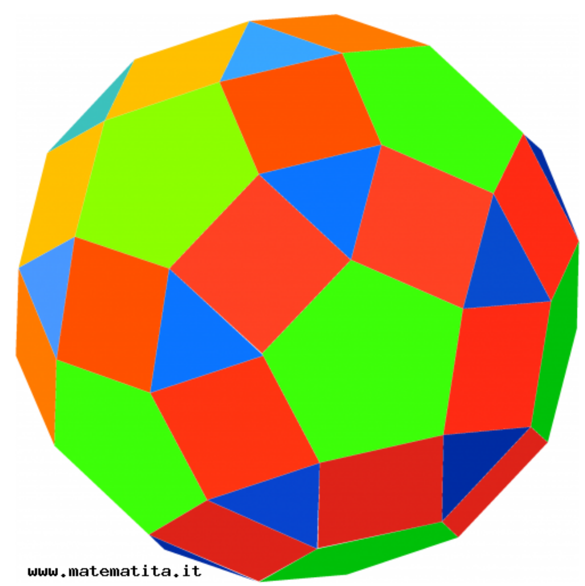
Sapreste colorare a scacchiera anche un cubo?
Se sì, diteci come avete fatto.
Se pensate che non sia possibile, spiegate perché. Ma spiegatelo bene, in modo che possa capire anche un bambino della scuola primaria.

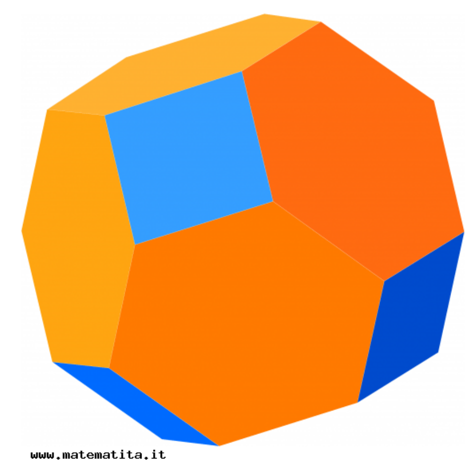
Un altro problema di colorazioni

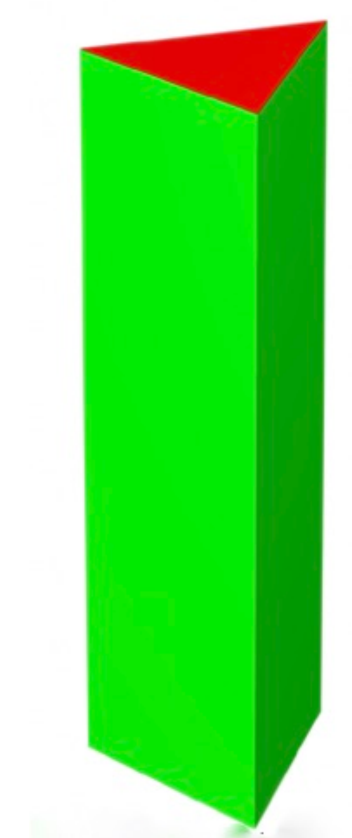
E fra questi altri poliedri qual è l'intruso, cioè l'unico che si può colorare con due soli colori come l'ottaedro?

Ce n'è almeno uno per cui non bastano neppure tre colori? Quanti e quali?

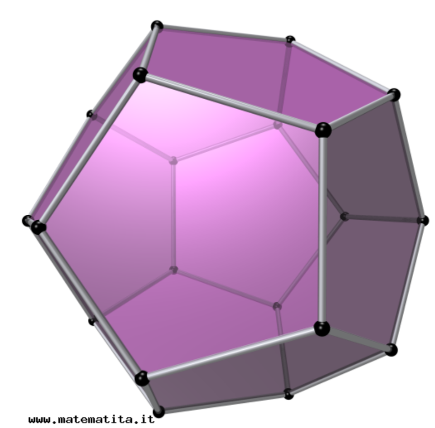




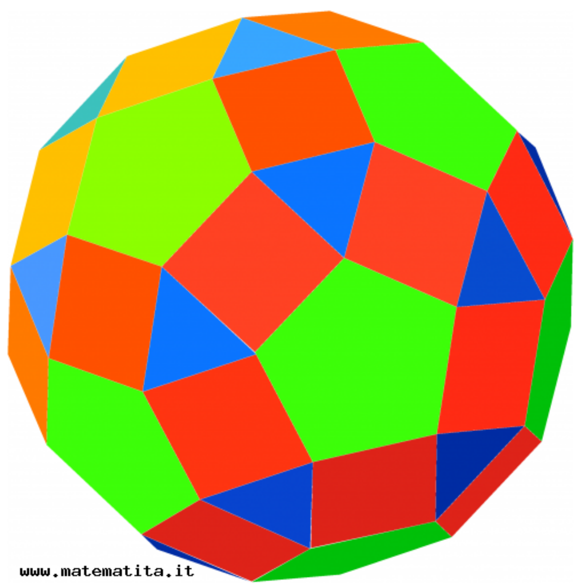




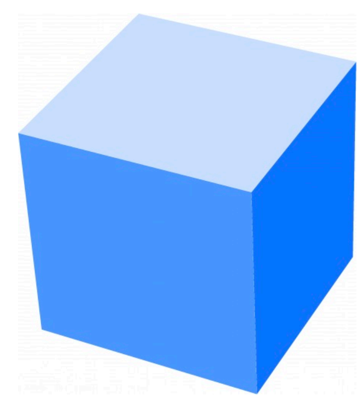
Stiamo sottintendendo che *colorare* significhi attribuire un colore ad ogni faccia in modo tale che facce **adiacenti** abbiano colori **diversi** (quindi ***NON come in queste figure***!).

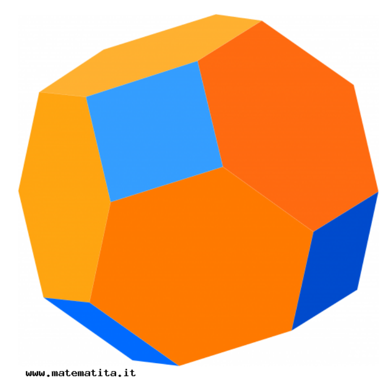


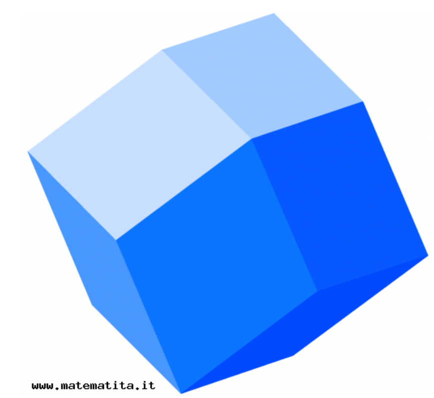
Risposte



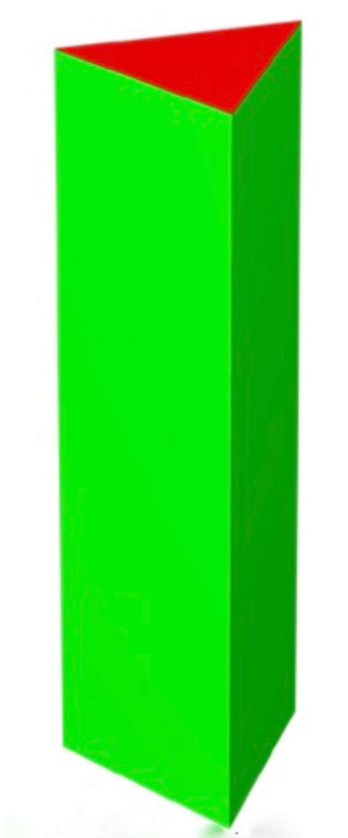
Questo è l’intruso (anche i pentagoni potrebbero essere blu).



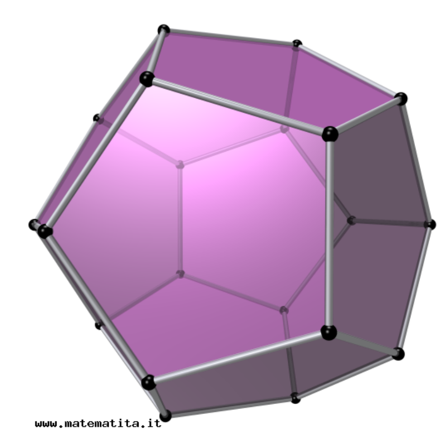




Tre colori sono sufficienti per un cubo (facce opposte dello stesso colore), e anche per questi altri due.

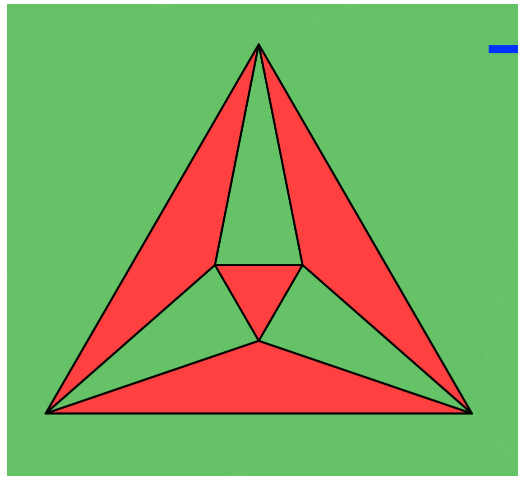


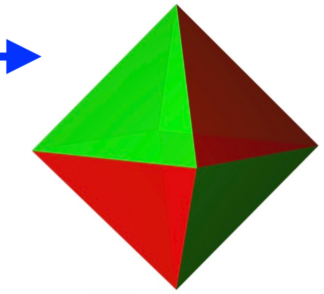
Tre colori **non** sono sufficienti per un prisma a base triangolare (e nemmeno per il dodecaedro o il pallone da calcio).



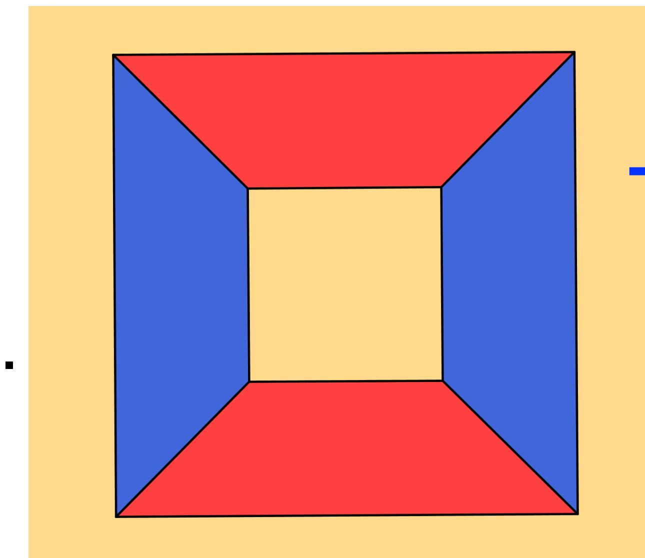
Come evitare di fare un disegno in 3d…

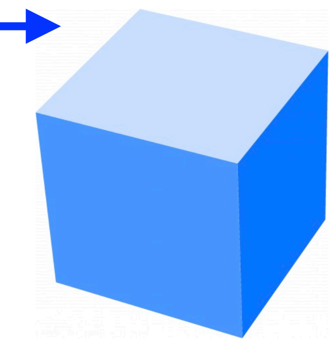
Due colori per l'ottaedro.



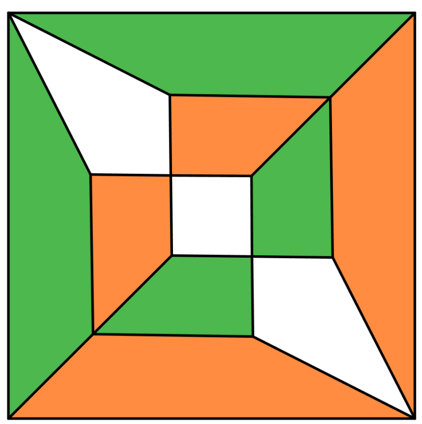


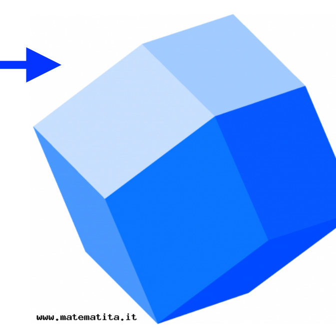
Tre colori per il cubo.



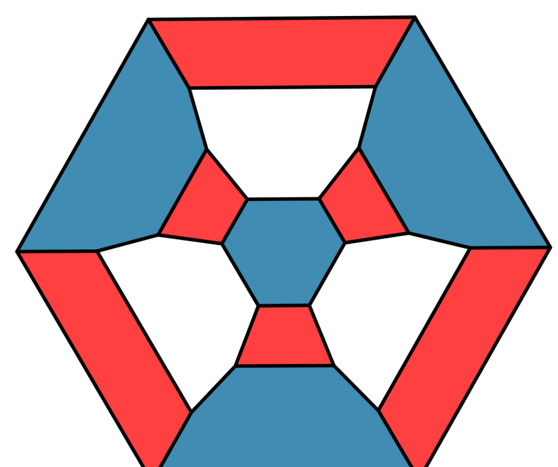


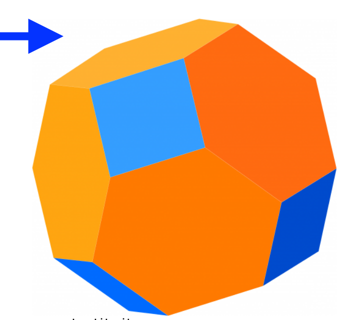
Tre colori per il cubottaedro.





Tre colori per il (4,6,6).

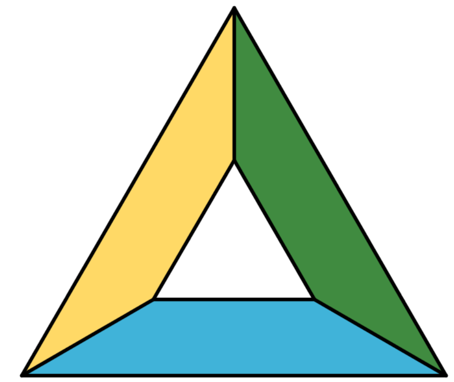


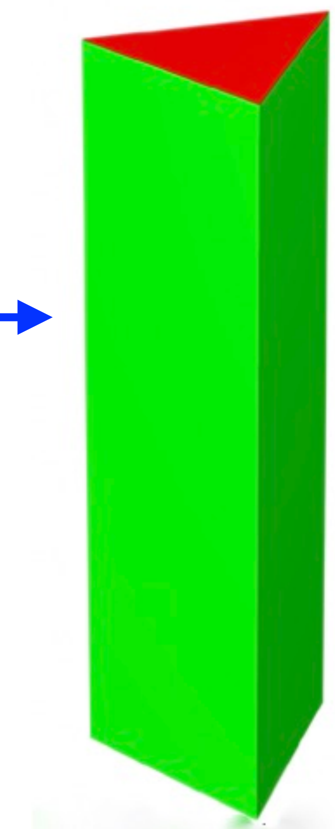


*… e insieme accorgersi che c'è un problema **uguale** a proposito di carte piane…*

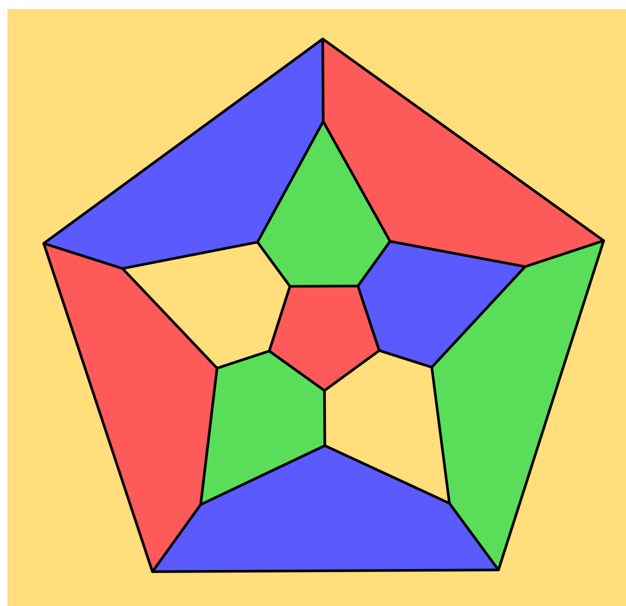
I casi che richiedono quattro colori

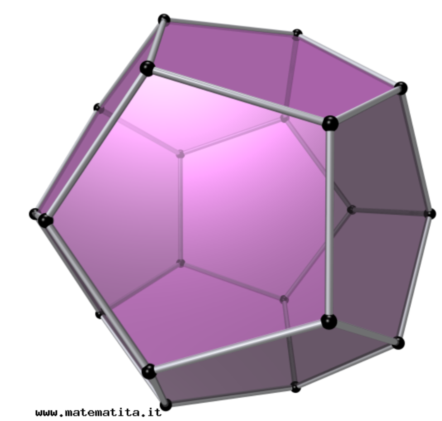
Quattro colori per un prisma
a base triangolare

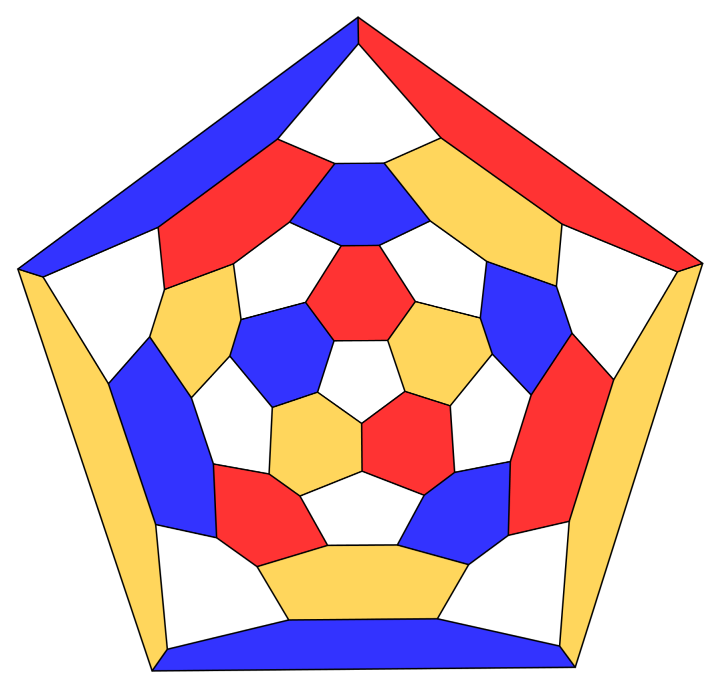




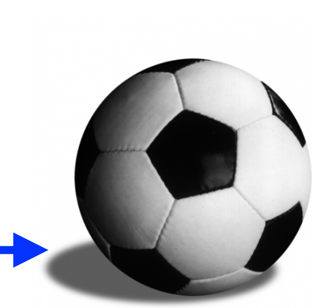
Quattro colori
per un
dodecaedro



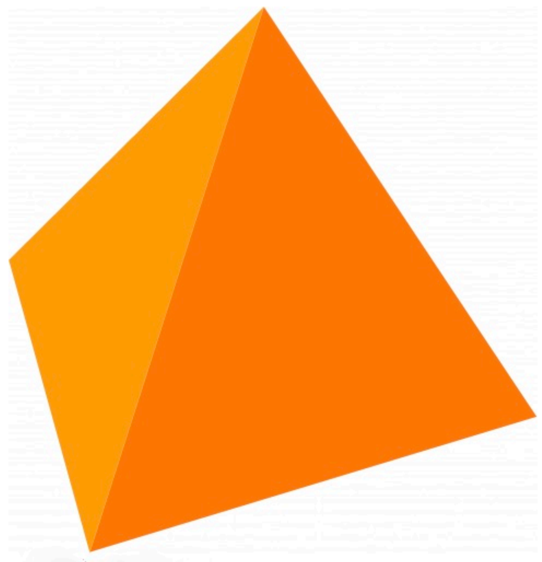




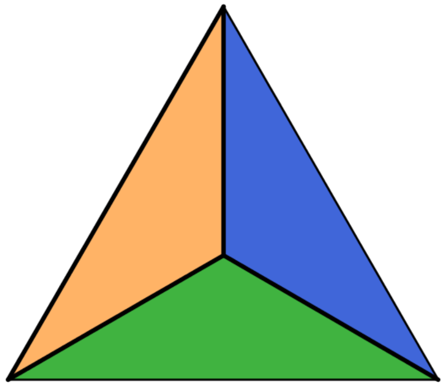
Quattro colori per un
pallone da calcio



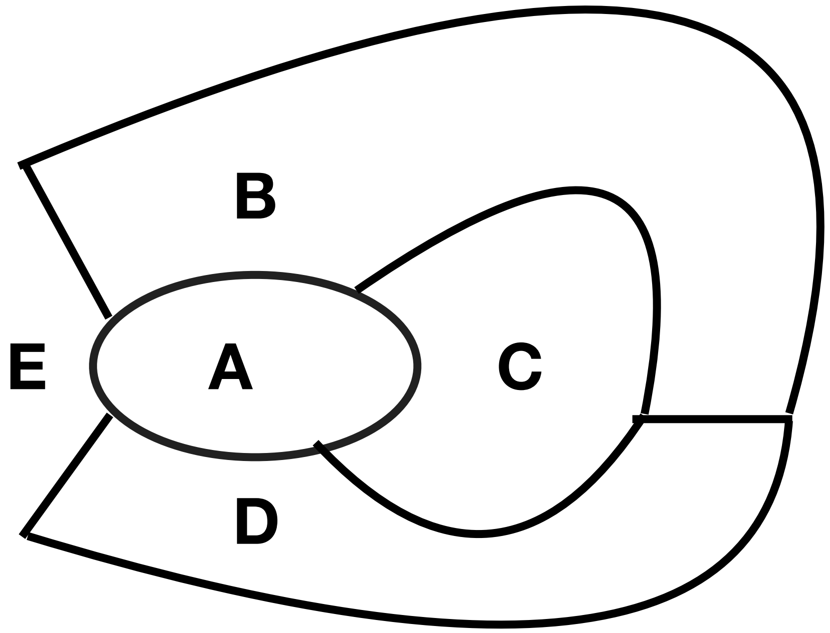
Andando alla radice…



Anche per un tetraedro tre colori non sono sufficienti; l'esempio (è il più semplice e) mostra esplicitamente una ostruzione chiara al problema: ci sono 4 regioni, messe in modo tale che ognuna tocca tutte le altre tre.



Lo stesso problema si pone, in una cartina geografica dell'Italia, per le 4 regioni Toscana Umbria Marche Lazio.

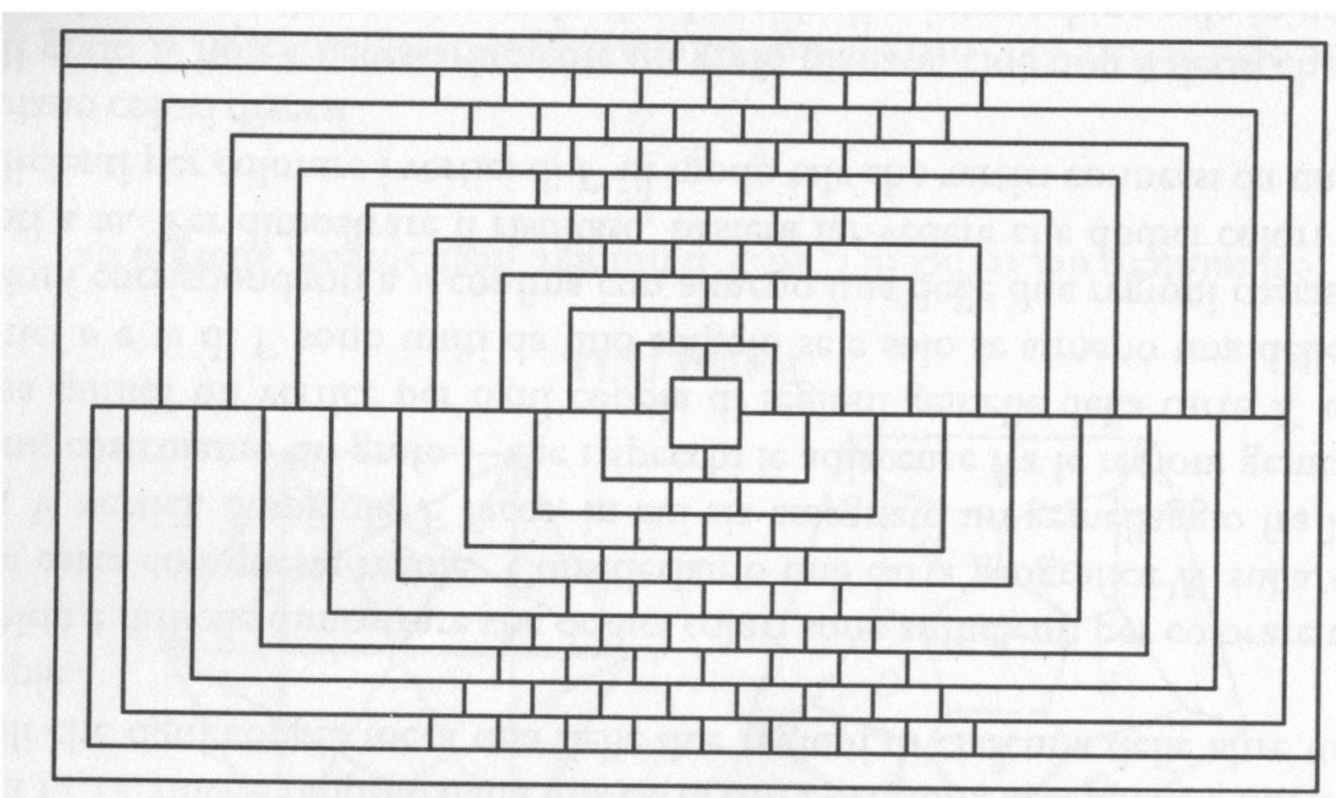


Non si riesce però, sul piano, a trovare 5 regioni messe in modo tale che ognuna tocchi tutte le altre 4 (Jordan…!).

Un problema che è passato alla storia

Proprio il fatto che non si trovino 5 regioni tali che ognuna sia adiacente a tutte le altre ha fatto subito sospettare che 4 colori fossero sufficienti per una ***qualunque*** carta geografica.

Il problema si è posto nel 1852 (Francis Guthrie) … ed è stato risolto (da Kenneth Appel e Wolfgang Haken) nel 1976!



1 aprile 1975: sulla sua rubrica sul Scientific American, Martin Gardner pubblica una carta di 110 regioni annunciando che si tratta di un controesempio alla congettura dei 4 colori.

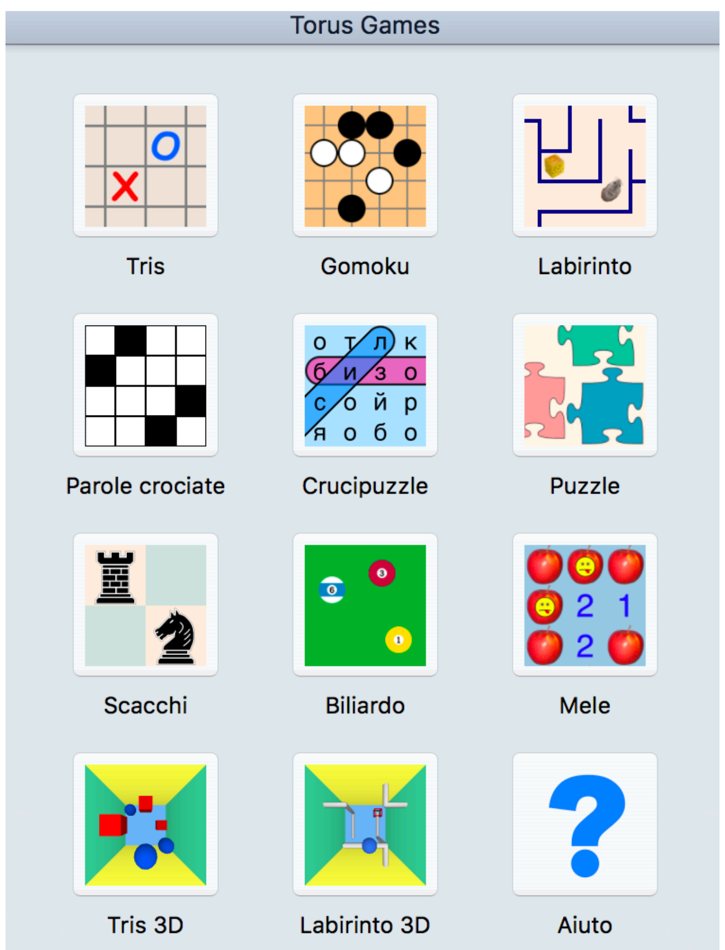
Una proposta in rete

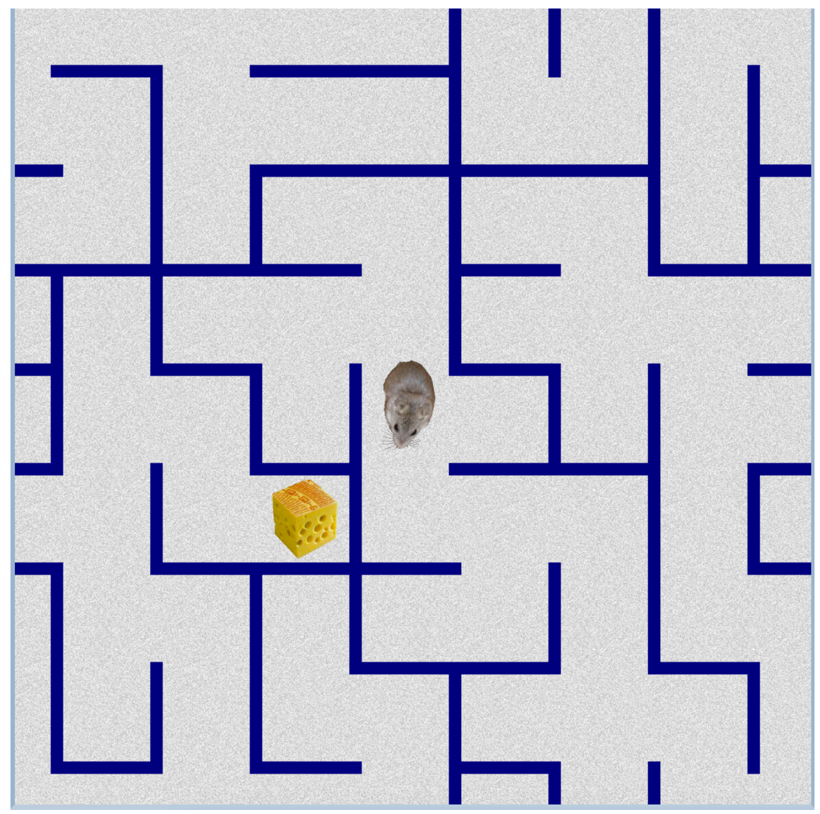
Torus Games

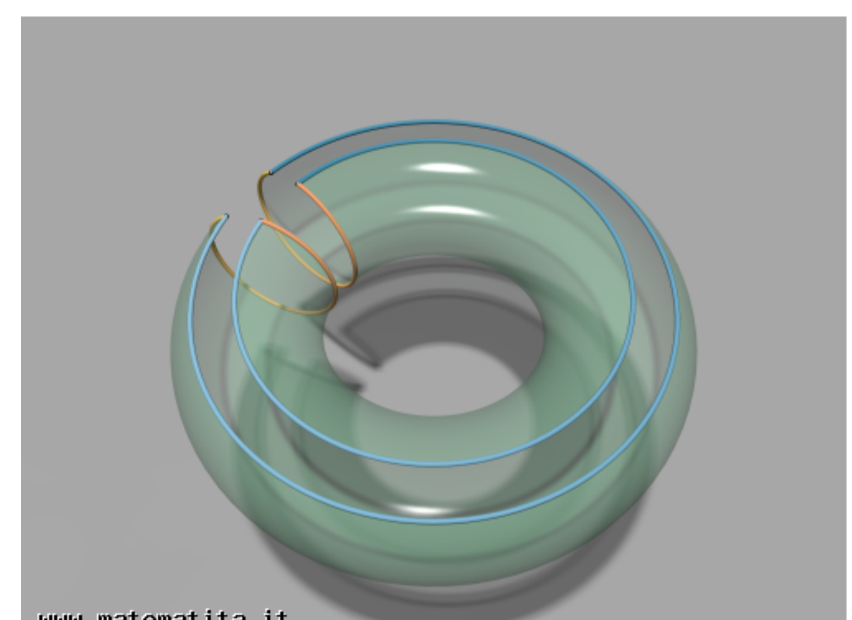
Otto giochi tradizionali introducono i ragazzi dai 10 anni in su al concetto di un universo finito ma senza limiti.

iOS, Android, macOS, Windows

http://geometrygames.org





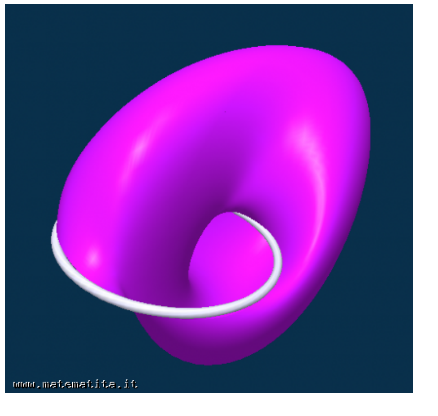


E a scuola?

Può essere interessante proporre a scuola qualche gioco/problema di natura topologica perché:

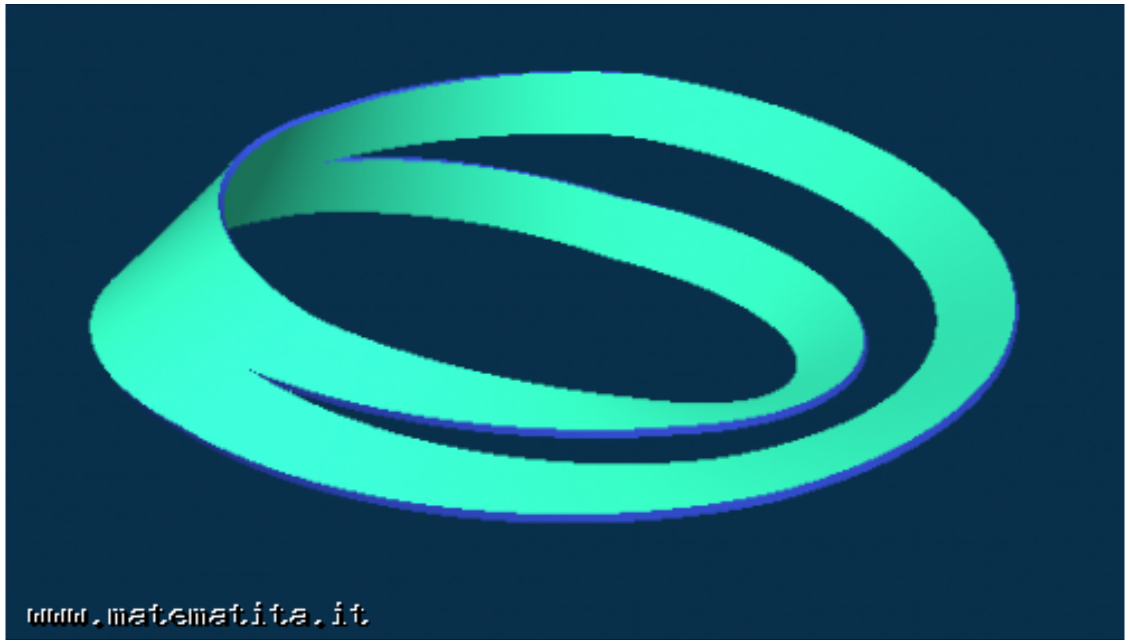
- spesso sono ***intriganti e sconcertanti*** (quesiti che non richiedono un particolare *background*, ma spiazzano, rompono gli schemi, incuriosiscono; risposte che non ci si aspetta…);
- spesso creano occasioni ***memorabili***;
- possono dare ai ragazzi l'idea di ***pensare in grande*** (e poi si ritorna alle equazioni *guardandole dall'alto in basso*);
- ci sono problemi ***accessibili anche ai primi livelli*** di scuola, e insieme affrontabili a gradi diversi di approfondimento;
- stimolano ***immaginazione e visualizzazione***;
- costringono al ***ragionamento*** (ma *perché* le cose vanno in questo modo?)
- …

Chissà che non sia proprio attraverso la Topologia che si possa recuperare un po' della Geometria che è andata perduta!



… grazie dell'attenzione!

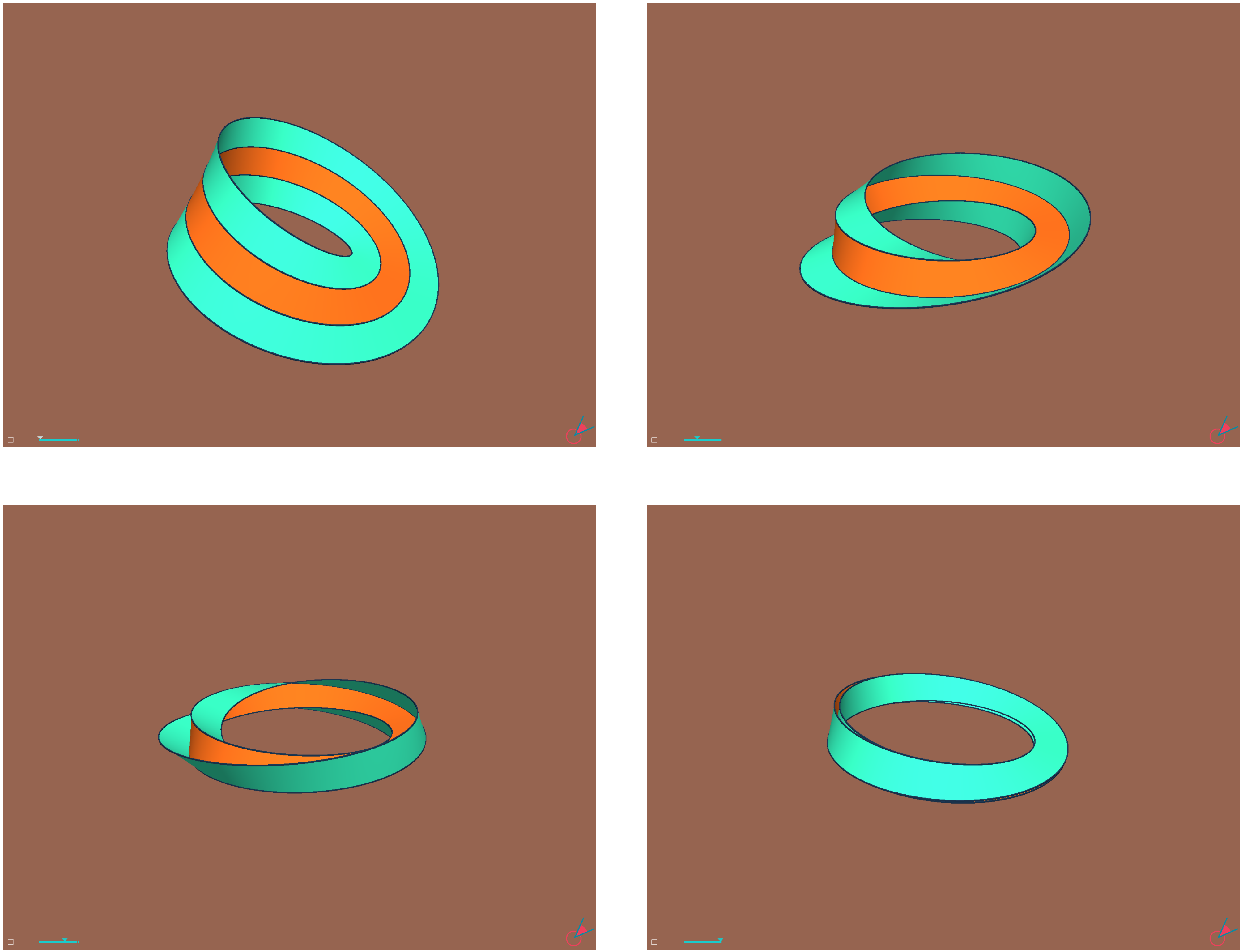
Nastri di Moebius



Probabilmente sappiamo tutti che cosa succede tagliando a metà un nastro di Moebius (ma se non lo sappiamo vale la pena sperimentarlo!)

Ma che cosa succede se si prova a *piegarlo* a metà?
E, verificato che questo non riesce, come si può fare per assottigliare un nastro di Moebius?

Nastri di Moebius



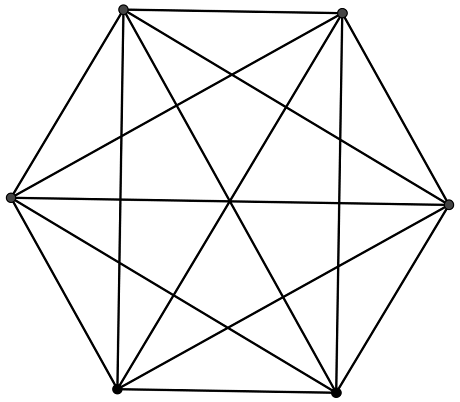
In realtà anche qua c'è una questione di pari/dispari: possiamo assottigliare un nastro di Moebius piegandolo in 3 parti (o 5, o 7, …), ma non in 2 (o 4, o 6, …).

Non solo pari e dispari: altri esempi di geometria senza misure…

Un problema di grafi: conoscenze da treno…

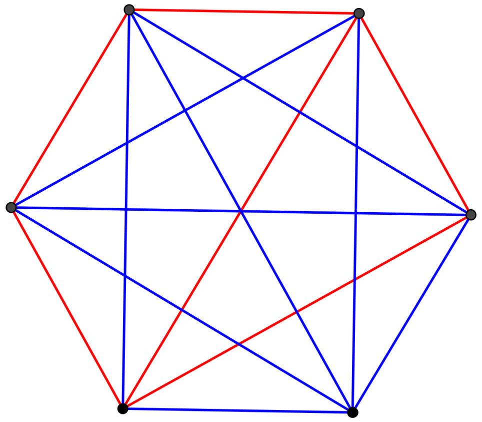
Gli scompartimenti ferroviari di una volta avevano sei posti. Immaginiamo sei persone in uno scompartimento ferroviario: se ne trovano sempre

- o tre che si conoscono tutt'e tre (a due a due);
- oppure tre che non si conoscono tutt'e tre (a due a due).



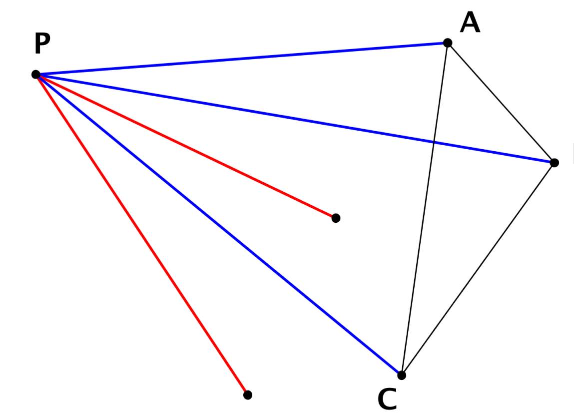
Che cosa c'entrano i grafi? Un punto per ogni persona. Un arco che collega ciascuna coppia di punti. Si colora un arco di rosso (rispettivamente, di blu) se le due persone corrispondenti si conoscono (risp. non si conoscono).

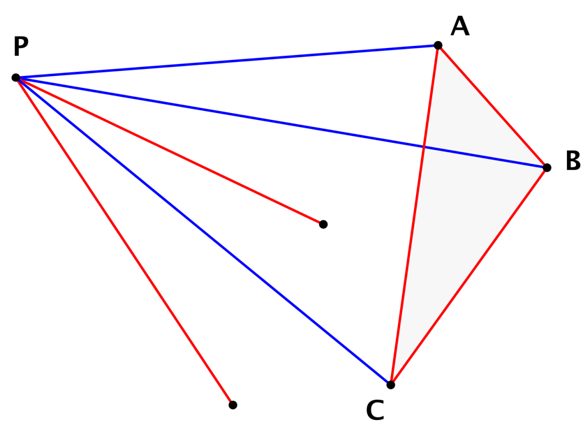
Il problema si traduce nel far vedere che c'è **sempre** o un triangolo tutto rosso o un triangolo tutto blu. Qui si vede: ma come si fa a giustificare che **sempre**, **comunque** si colori questo grafo (e le colorazioni possibili sono tante, $2^{15} = 32768$), spunta almeno un triangolo rosso oppure uno blu?

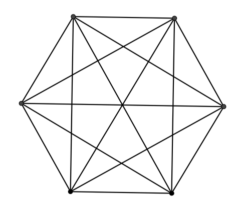


Qualche giustificazione

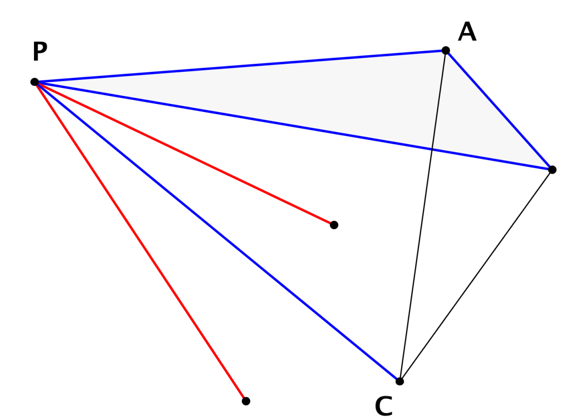
Fissiamo un vertice P. Da quel vertice escono 5 spigoli; di quei 5 ce n'è sicuramente 3 dello stesso colore. Supponiamo che siano 3 blu e che i 3 estremi siano i punti A, B, C.







Se i tre spigoli AB, AC, BC ***sono tutti e tre rossi,*** abbiamo trovato un triangolo rosso.



Se ***almeno uno dei tre è blu***, insieme ai due spigoli che congiungono gli estremi a P, si è trovato un triangolo blu.

Un altro problema

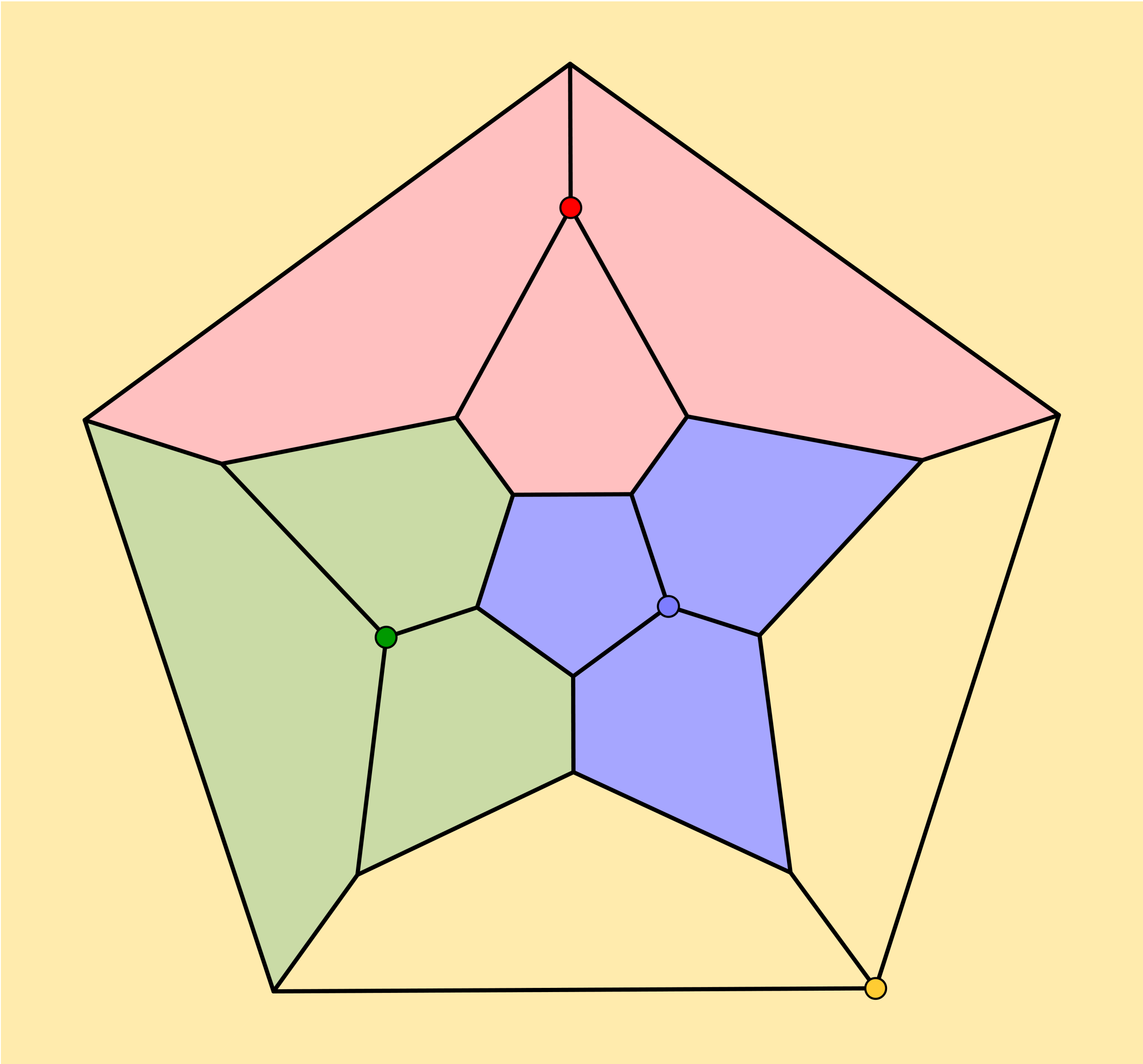
Si narra di una comunità di 20 persone con queste caratteristiche:

- ognuna ne conosce altre 9;
- per ognuna ne esiste (solo!) un'altra tale che le due non hanno nessuna conoscenza in comune;
- si possono trovare 5 persone (ma non 6…!) tali che tutti, fra questi 5, si conoscono fra loro a due a due;
- si possono trovare 4 persone (ma non 5…!) tali che tutti, fra questi 4, non si conoscono fra loro a due a due;
- si possono trovare 4 persone (ma non 3…!) tali che, mettendo insieme le loro conoscenze, si esaurisce tutta la comunità delle 20 persone.

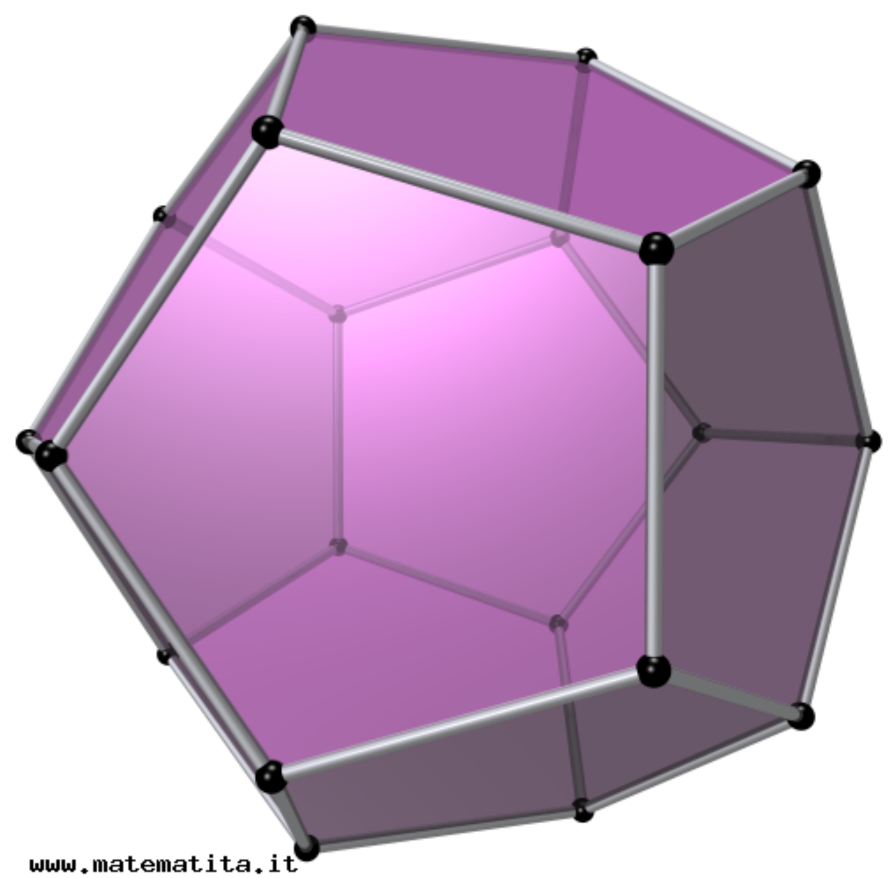
Si domanda: è possibile una comunità di 20 persone con queste caratteristiche?

E si domanda anche: ma dov'è la geometria, sia pure senza misure?

Qualche risposta



Le 20 persone si possono immaginare ai vertici di un dodecaedro.
Due persone si conoscono se appartengono a una stessa faccia del dodecaedro.



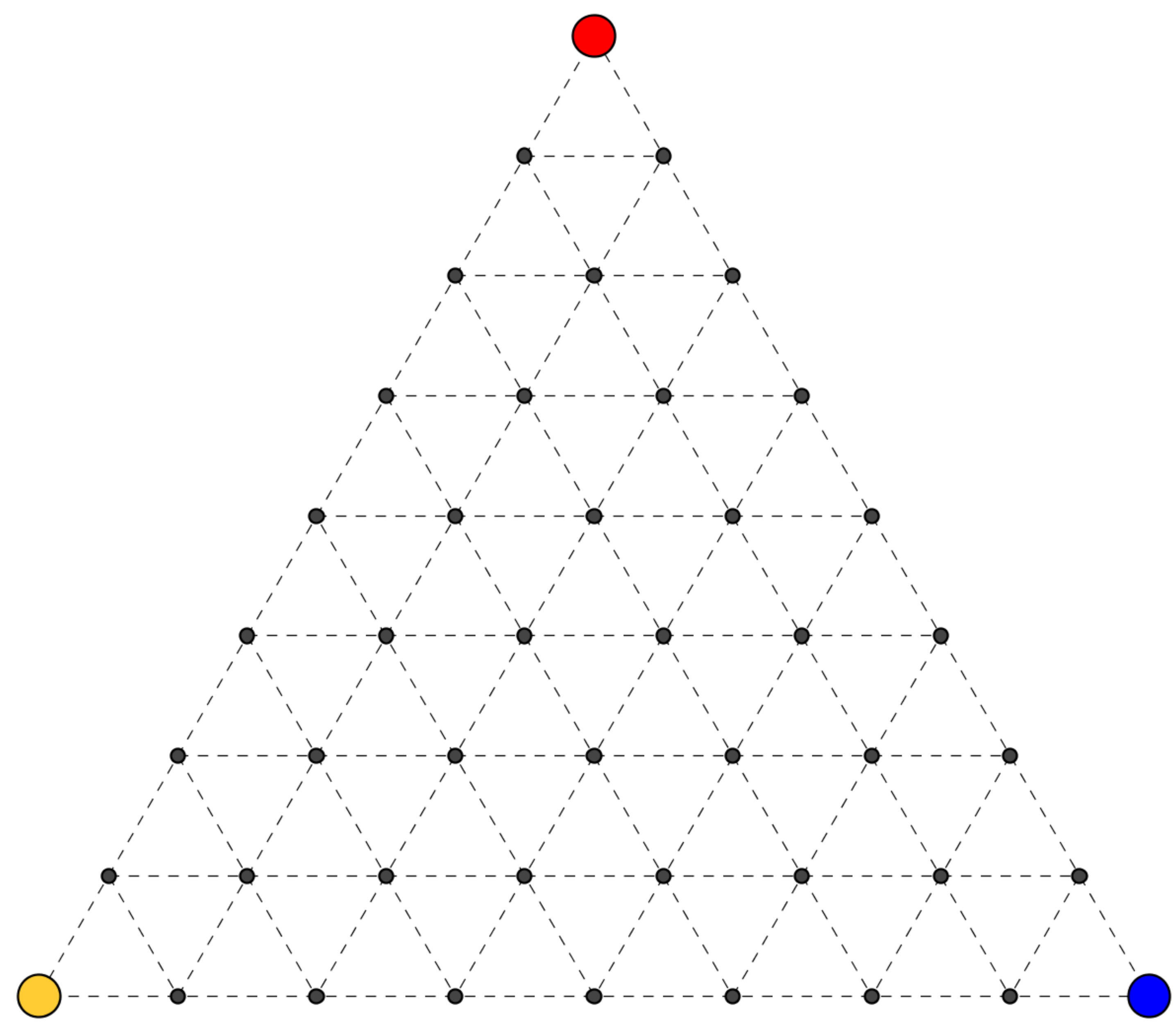
I 4 vertici evidenziati in figura rappresentano le 4 persone che a due a due non si conoscono e tali che ogni altra persona della comunità conosce almeno uno dei 4 (in realtà ne conosce 2 oppure 3).

Un altro esempio: il gioco di Sperner

Un triangolo con un vertice rosso, uno giallo, uno blu. Si divide ogni lato in *n* parti uguali (in figura n=8) e quindi il triangolo in n^2 triangolini.

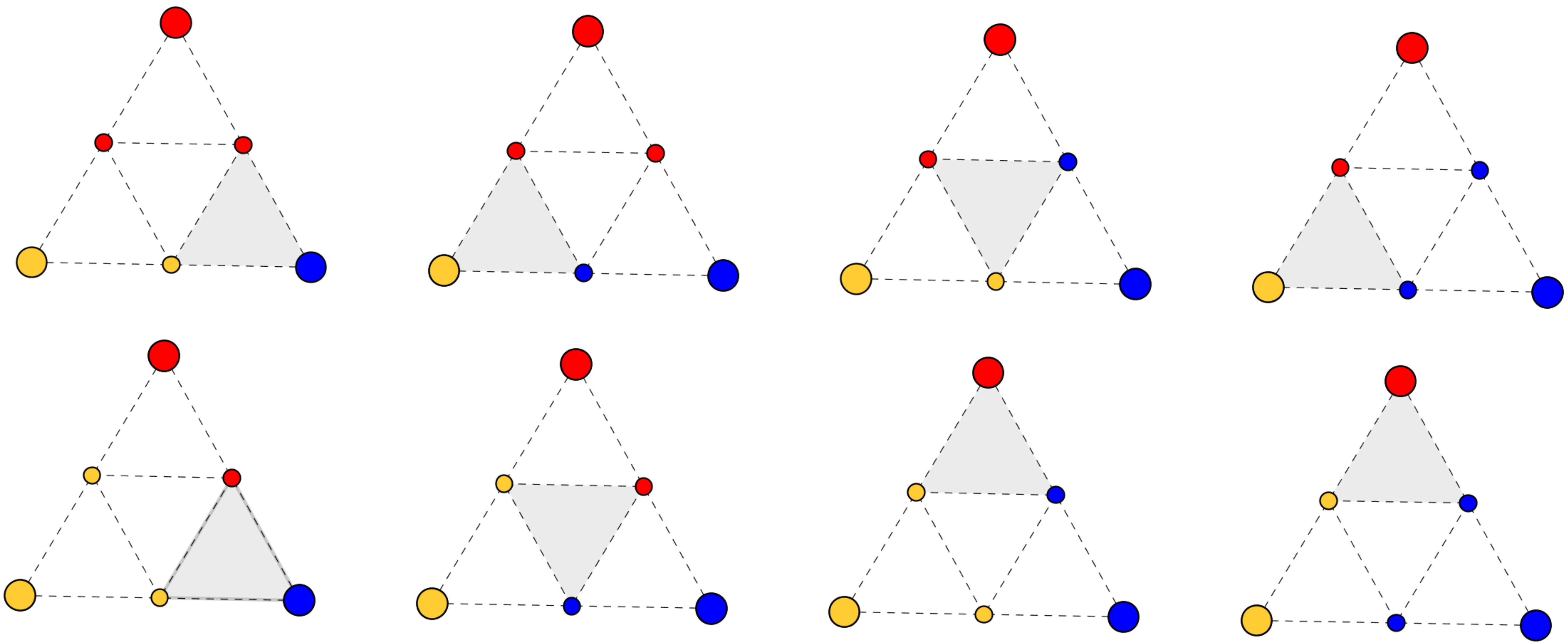
Si vorrebbe colorare ogni vertice in modo tale che:

- sul lato esterno rosso-giallo i vertici siano solo rossi o gialli;
- sul lato esterno giallo-blu i vertici siano solo gialli o blu;
- sul lato esterno blu-rosso i vertici siano solo blu o rossi.



Comunque li si colori (con queste regole), spunta ***sempre*** un triangolino con i tre vertici dei tre colori diversi.

Il gioco di Sperner nel caso *n*=2

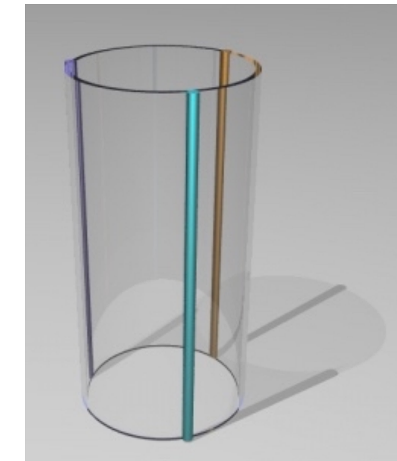


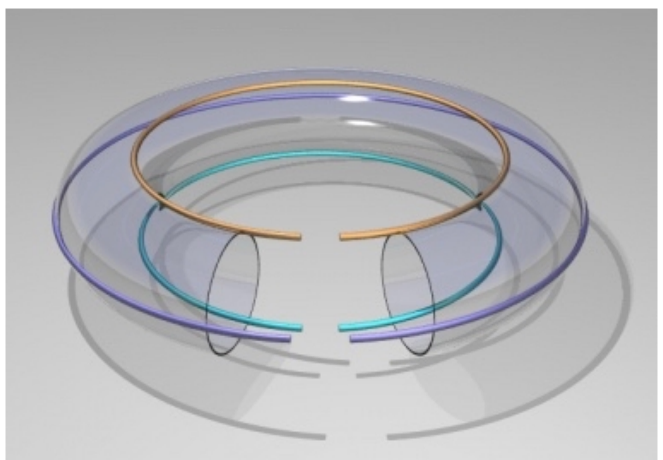
In questo caso si possono anche disegnare tutti i casi possibili (sono solo otto!).
Ma in generale?

Vedi, per esempio: https://www.atractor.pt/mat/Sperner/Sperner-_en.html

Nodi e MCD

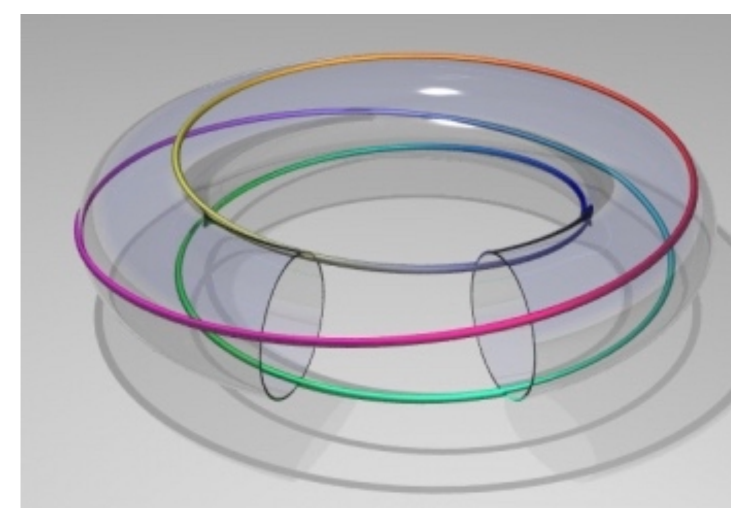
Ci sono dei nodi che si descrivono con due numeri (naturali). Si parte da un po' di fili (n, il primo dei due numeri; in figura n=3) sulla buccia di un cilindro, paralleli e equidistanziati (uno si ottiene da quello accanto con una rotazione di 360°/n intorno all'asse del cilindro).





Si immagina il cilindro flessibile e lo si richiude a formare una ciambella. Prima di richiuderlo, si trovano, l'uno di fronte all'altro, i due capi di ciascuno degli n fili.

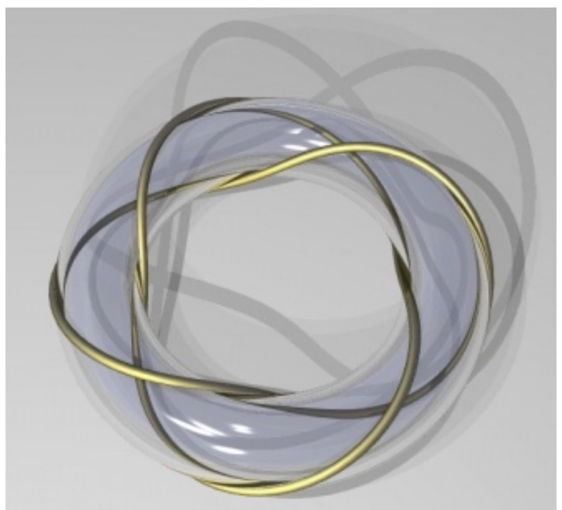
Si possono incollare così come sono (in tal caso, si otterrebbero n circonferenze e il secondo numero sarebbe k=0). Ma si può anche, prima di incollarli, dare una torsione in modo che il primo estremo del primo filo si incolli al secondo estremo di un filo diverso. Perché tutto si incolli per bene, questa torsione dovrà essere di un angolo di k x 360°/n : ecco il secondo numero k!).



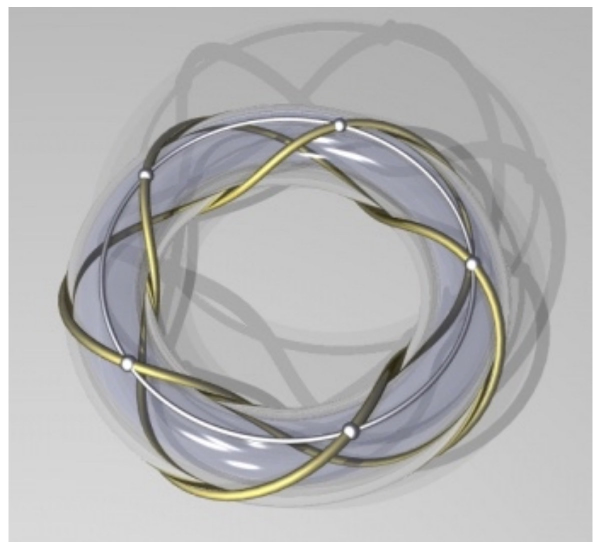
$n = 3 \quad k = 1$

Quante curve?

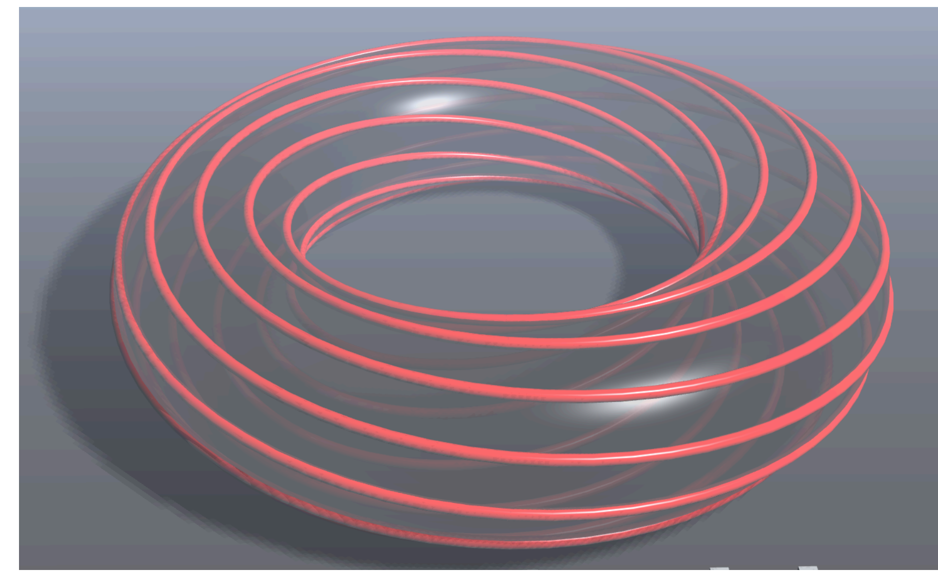
Il problema allora è il seguente: facendo questa operazione a volte si ottiene una sola curva; altre volte più di una: come si può prevedere in anticipo quante curve?



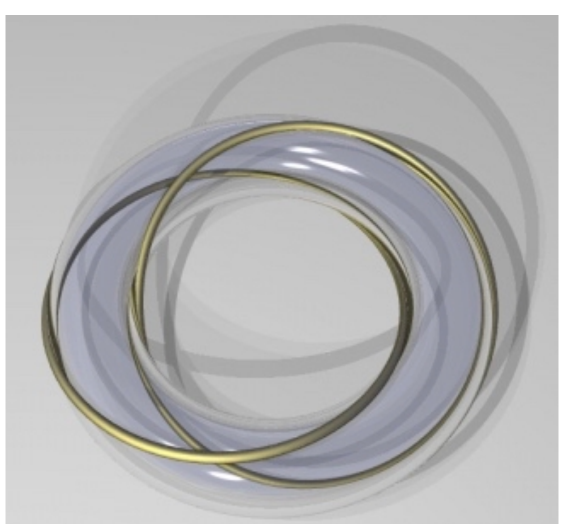
$n = 2 \quad k = 4$
due curve



$n = 2 \quad k = 5$
una curva

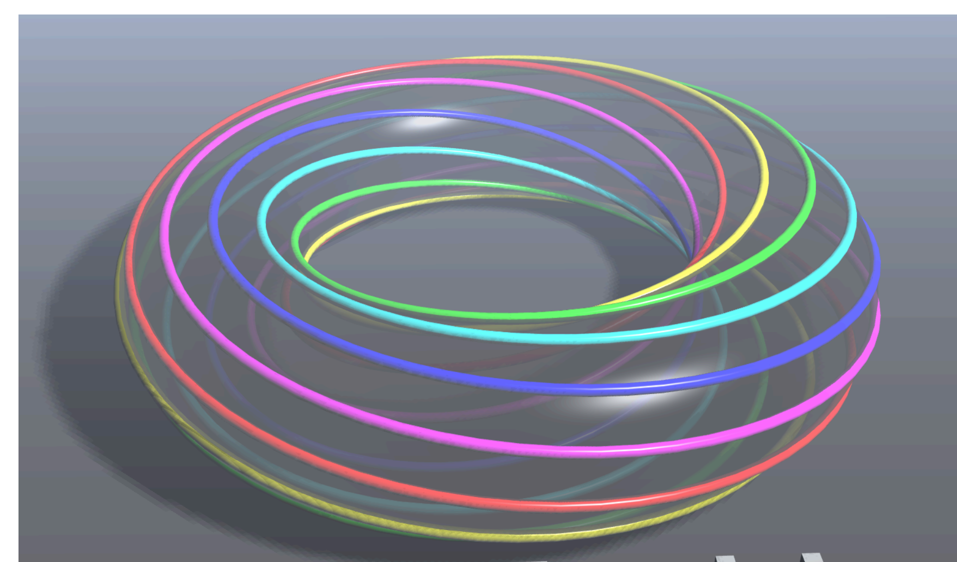


$n = 12 \quad k = 5$ una curva



$n = 2 \quad k = 2$
due curve

… e il numero di curve è proprio il MCD fra n e k.



$n = 12 \quad k = 6$ sei curve