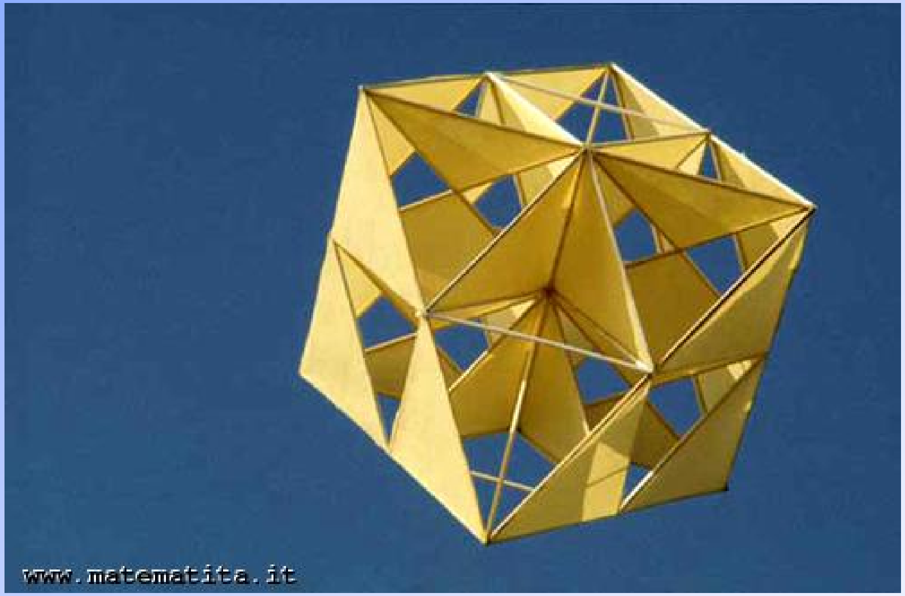
Costruzione di percorsi laboratoriali

… qualche esempio da MaTeinItaly



Giochi, modelli, storia
Milano, 3-5 ottobre 2014
M.Dedò

È ormai abbastanza universalmente riconosciuto che è necessario trovare la maniera di coinvolgere i ragazzi in una **partecipazione attiva** al processo di apprendimento .

E non è certo una novità!

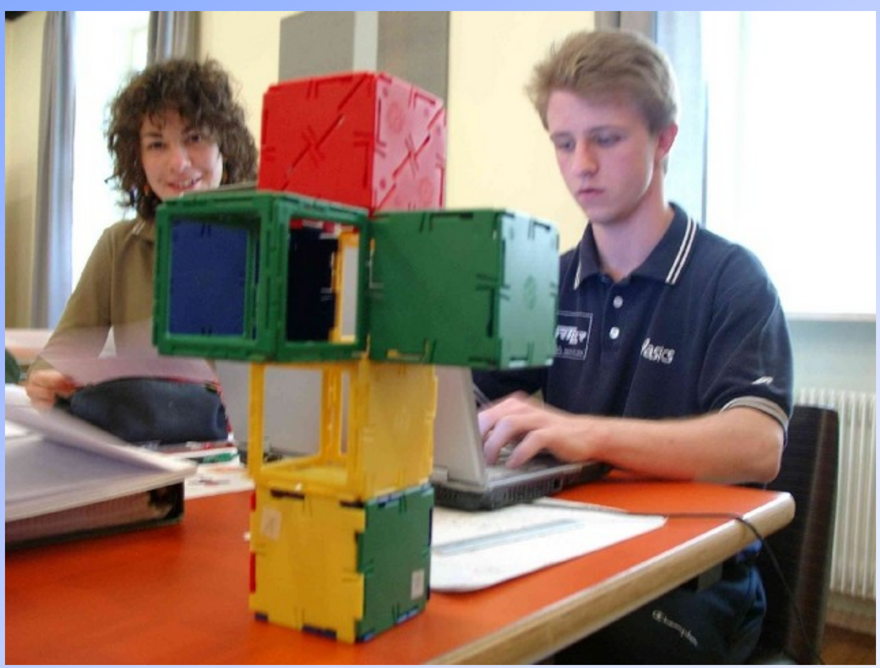
… una scuola in cui gli studenti non debbano "*imparare delle teorie prima di conoscere i fatti a cui esse si riferiscono*" o "*ripetere delle parole prima di essere in possesso degli elementi sensibili e concreti da cui per astrazione si può ottenere il loro significato*".

Vailati (**1863-1904**)

matematita

Elementi che caratterizzano un laboratorio (per me)

L'elemento principale
chi impara deve avere un **ruolo attivo**:
si è – o perlomeno si deve **credere di essere** – degli autodidatti!



matematita

Prima:
- La scelta del problema
- La costruzione del percorso
- La scelta del materiale di supporto

Durante:
- Diverso ruolo del docente
- Tempi rilassati (possibilità di raccogliere deviazioni)
- Concreto e astratto, immagini e modelli
- Linguaggio e rigore
- Informale e formale
- Lavoro a piccoli gruppi: comunicazione *inter pares*
- Ruolo dell'errore

Dopo
- tirar le fila: **sì!**;
- valutare i ragazzi (**no!** o perlomeno…);
- valutare il percorso fatto (**sì!** meglio in una discussione fra **più** insegnanti).

… a proposito di rigore e linguaggio

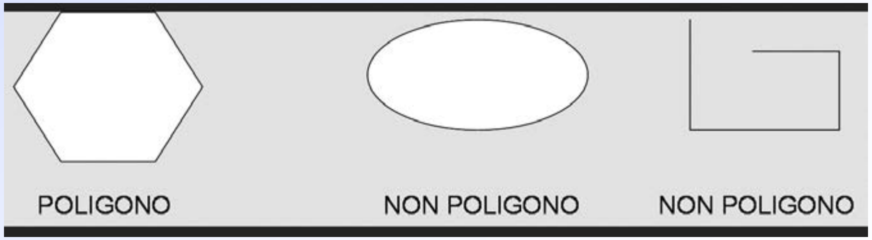
In una seconda artistico abbiamo risolto un'equazione e scritto alla lavagna "47=x". A voce ho detto "la soluzione è 47“. ***Molti*** *mi hanno chiesto se non dovevano però, prima di concludere che quella era la soluzione, "portare dalla parte giusta" ovvero scrivere che "- x=- 47" e poi cambiare i segni. … È una* ***lotta contro una specie di burocrazia!***

"perché OSSO non si riflette uguale, mentre OTTO sì?"
"perché la S guarda di lato, mentre la T ti guarda dritta".

… a proposito dei materiali

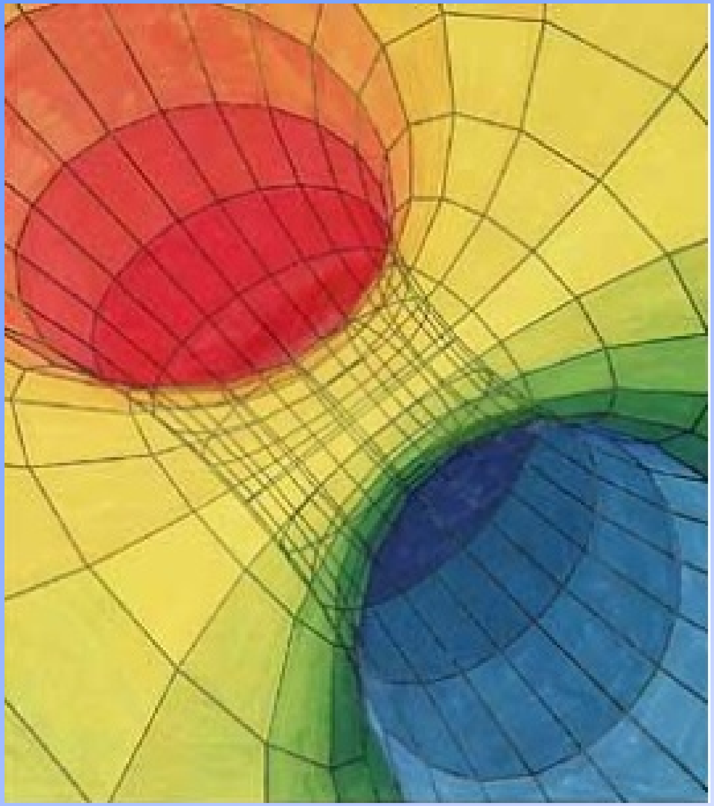
- Non è un dettaglio trascurabile, ma è parte integrante della struttura del laboratorio.
- Un esempio: la stessa attività con poche forme non avrebbe proprio alcun senso.

È «accettabile» una definizione informale di poligono del tipo: «questi sì e questi no»? Con esempi diversi non è la stessa cosa!!!



matematita

il problema del problema

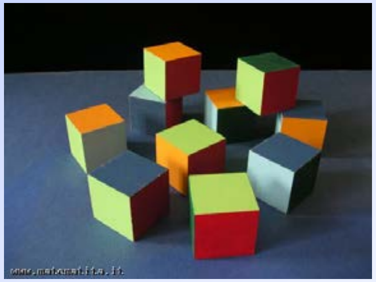


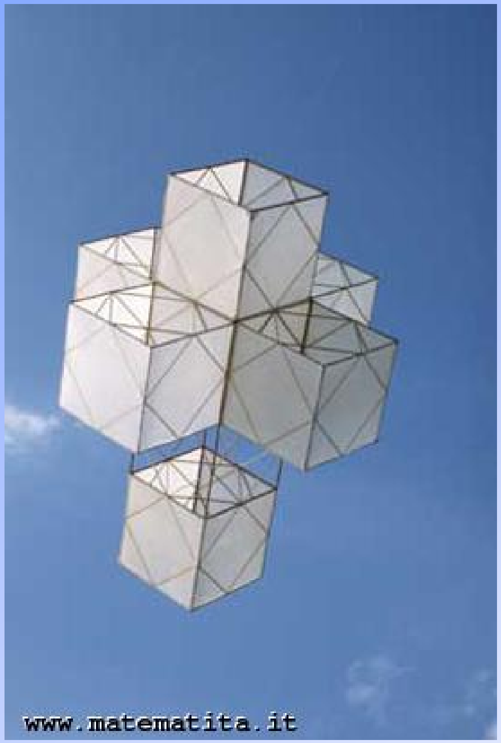
- tema **profondo** (leggibile a livelli diversi)
- tema **coinvolgente**
- elementare, cioè che usi **pochi prerequisiti**; (**ma** elementare non è sinonimo di facile)
- che tenga presente il **percorso globale**
- che **crei ponti** piuttosto che muri

matematita

Facile e difficile

La iattura della facilitazione continua: per facilitare le cose, le si fanno a pezzetti, e poi a pezzetti ancora più piccoli, con il risultato che diventano più difficili perché **si sposta l'attenzione dalle idee alla tecnica**. Occorre fare il viceversa! (Arnold?)

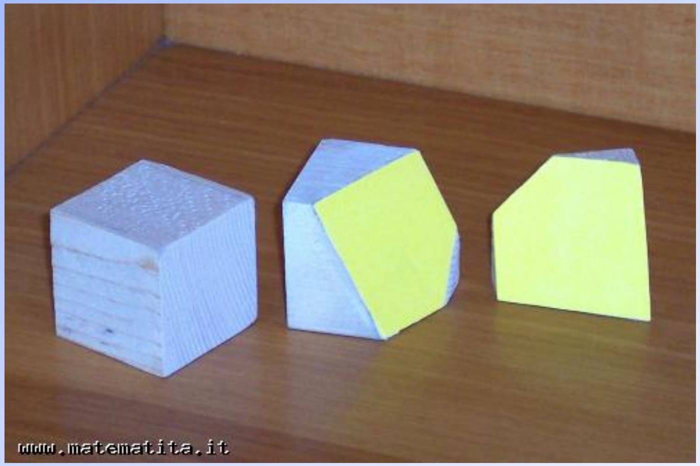




- I problemi difficili esistono! Non possiamo lasciare ai ragazzi l'impressione che la matematica si occupi solo di problemi facili!
- Il «facile» può essere più difficile del «difficile»…

Il problema del problema

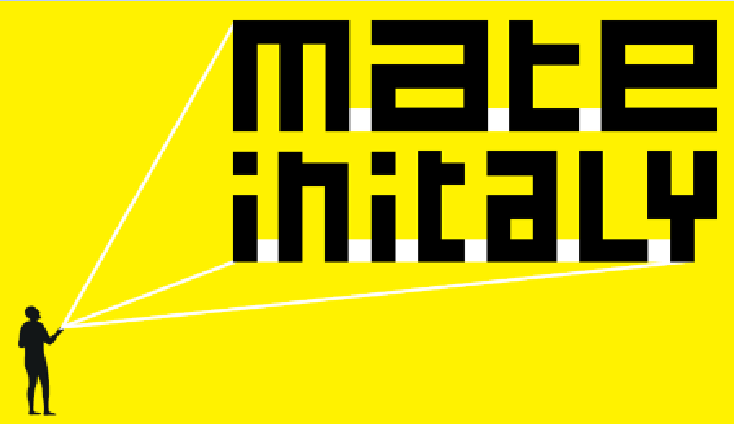
Only non interesting problems might be formulated unambiguously and can be solved completely.
Henri Poincaré



corollario…
i temi proposti a un laboratorio devono essere interessanti, **quindi** sono necessariamente formulati in modo un po' ambiguo e sarà difficile poterli risolvere completamente …

http://www.dmf.unicatt.it/~musesti/mateinitaly.webm

Cosa c'entra una mostra (e questa mostra in particolare) con l'insegnamento «normale»?



Questa mostra ha due ambizioni, una verso il «grande pubblico», un'altra verso il mondo della scuola

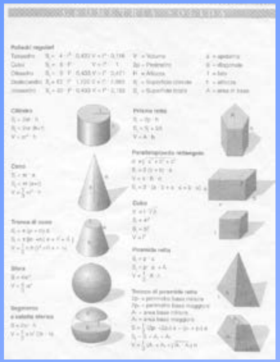
Verso il «grande pubblico»:

13. $\sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[mn]{a^{pn} \cdot b^{qm}}, (a, b \geq 0);$

14. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}, (a \geq 0);$

15. $\sqrt[m]{a^p} : \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[mn]{a^{pn} : b^{qm}}, (a \geq, b > 0);$

16. $\sqrt{a^2} = |a|, (a \in \mathbb{R});$

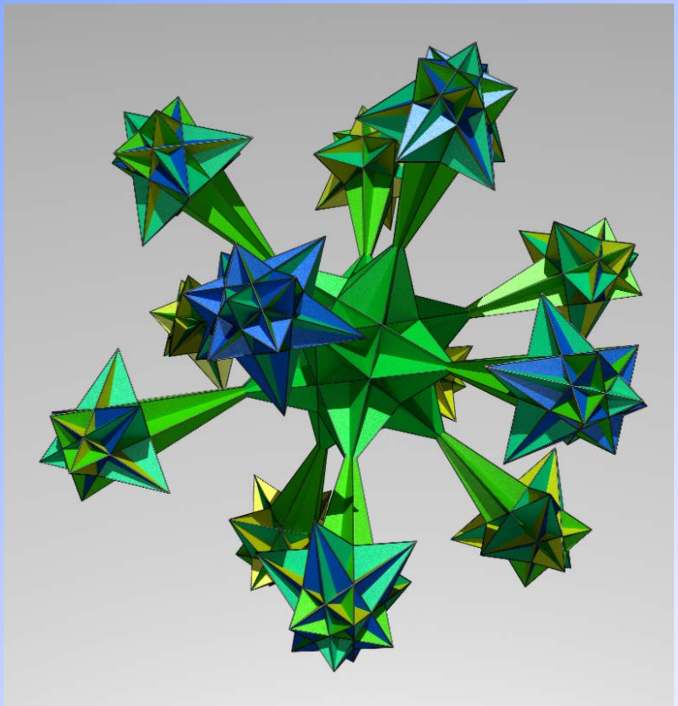


contribuire a **smontare i pregiudizi** diffusi verso la matematica e a costruirne
un'immagine diversa...

8077. IL NUMERO ESATTO

1525ª PROVA D'INTELLIGENZA

Si tratta di determinare esattamente un certo numero, basandosi esclusivamente sul ragionamento, ossia senza alcun ricorso alla matematica. Esso è formato da dieci cifre tutte diverse fra loro, e quindi da 0 a 9. Con

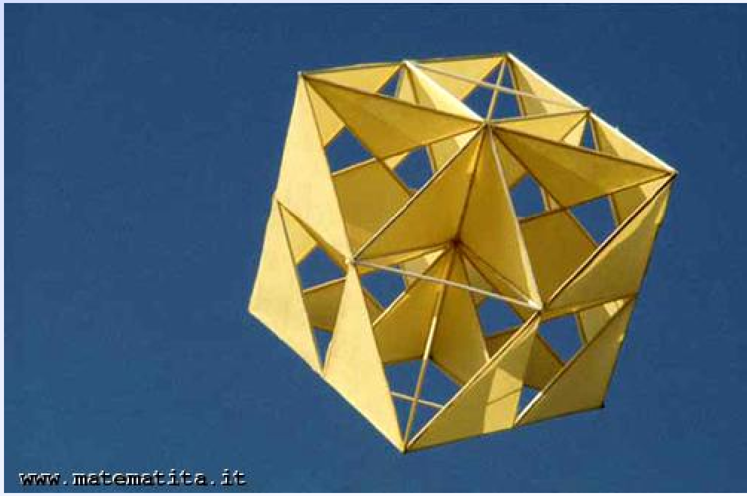


La matematica dell'immaginario collettivo è noiosa, piatta, prevedibile e soprattutto banale. Ma la matematica non è così:
è affascinante, è difficile e soprattutto è sorprendente.

matematita

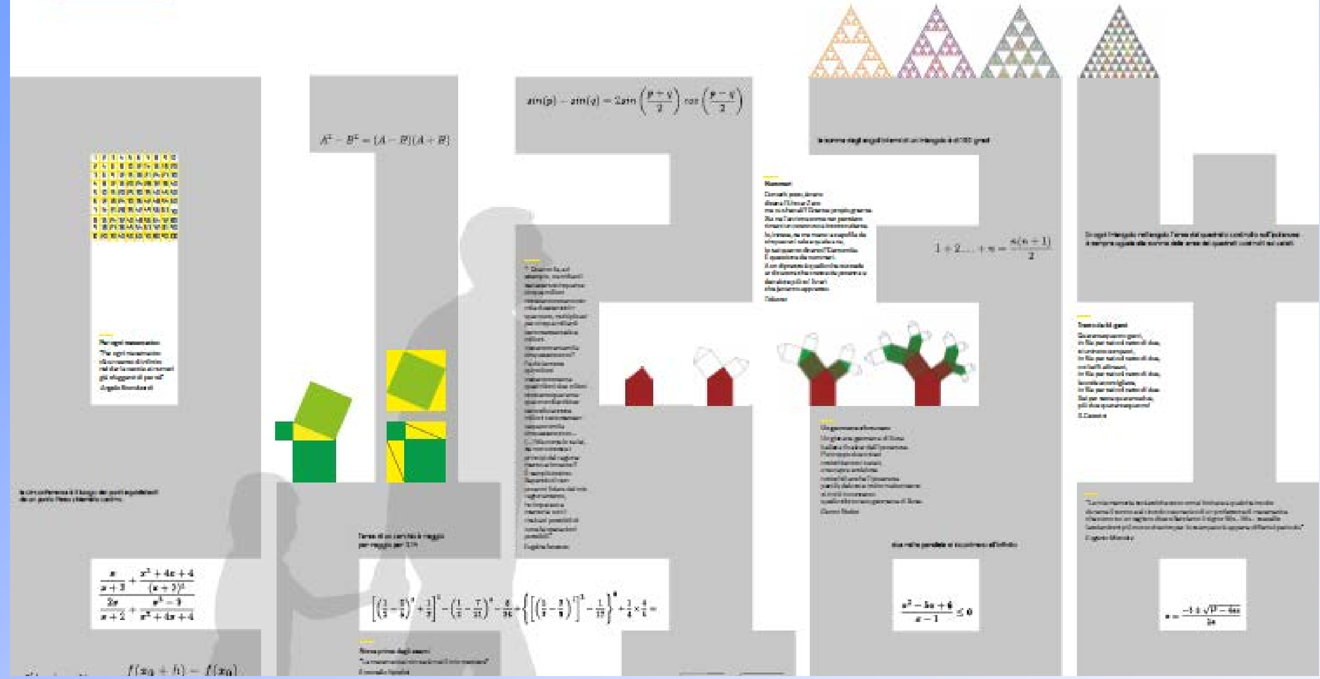
la matematica come un aquilone

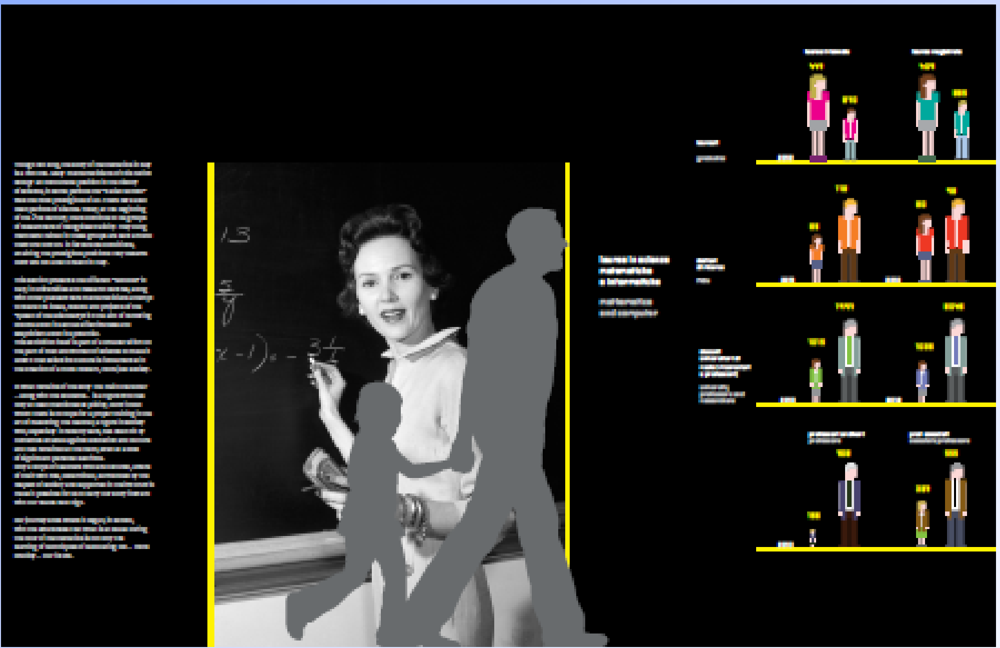
- leggerezza, fantasia, immaginazione
- vedere dall'alto significa scoprire nessi inaspettati (la potenza dell'astrazione...!);
- si vedono i ponti e non si è bloccati dai muri
- … e c'è sempre una persona che tiene il filo.



matematita

Verso il mondo della scuola:



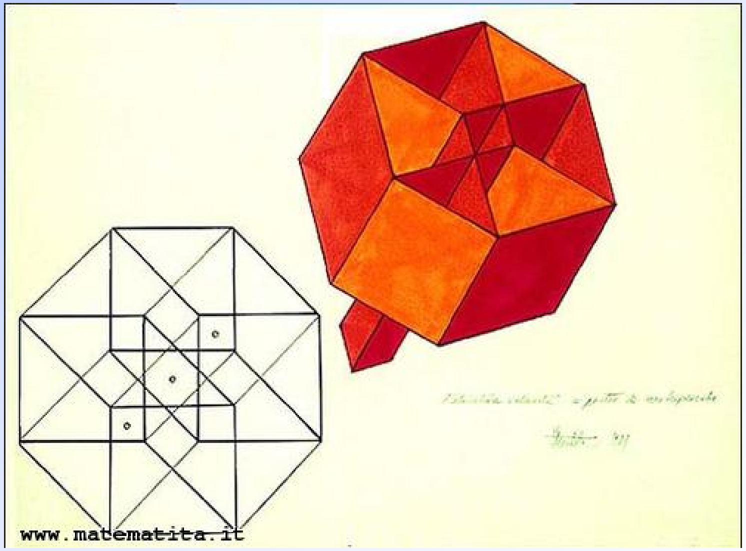


… non è un caso che la mostra parta dai ricordi scolastici e termini con un omaggio agli insegnanti!

matematita

Comunicare la matematica in una mostra e insegnare la matematica a scuola: che cosa c'è di UGUALE

- Una mostra procede per **idee forti** (anche l'insegnamento deve costruirsi intorno a **poche** idee forti)
- Una mostra cerca di **provocare delle domande** (e anche la scuola dovrebbe cercare di dare delle risposte **solo dopo** che se ne è avvertita l'esigenza)



matematita

Comunicare la matematica in una mostra e insegnare la matematica a scuola: che cosa c'è di DIVERSO

Una mostra non è una lezione, non deve insegnare, ma piuttosto **raccontare**, incuriosire, provocare domande, provocare la scoperta di insospettati legami fra settori che si immaginavano lontani.

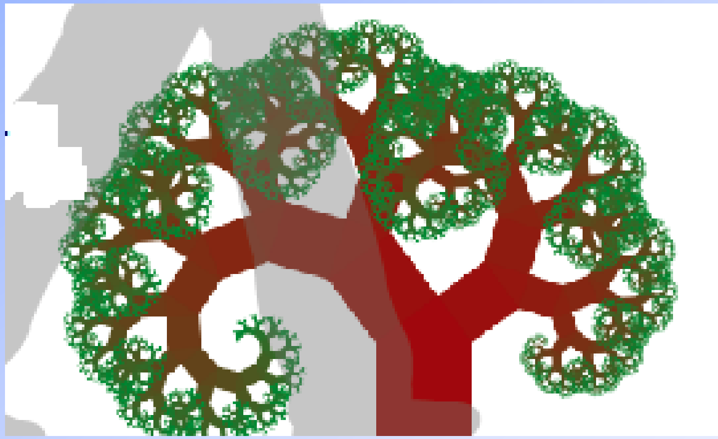
Può aiutare a creare le premesse per un successivo apprendimento più attivo e consapevole.

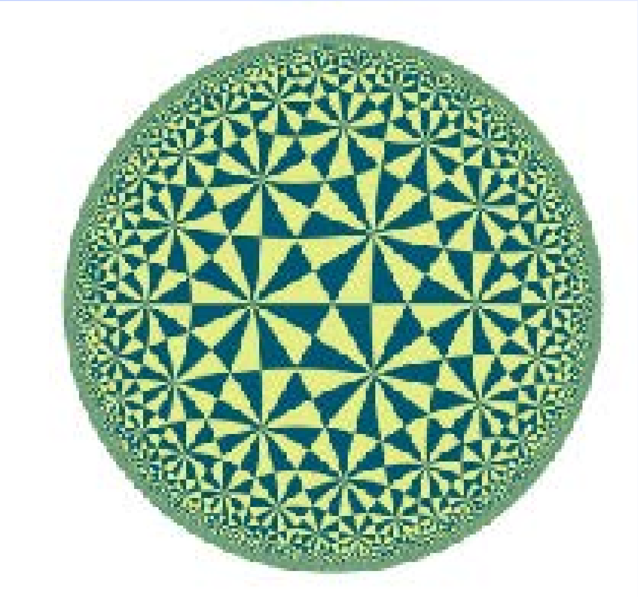
Può costituire un prezioso momento di ripensamento su cose già imparate, ma viste qui da un punto di vista diverso.

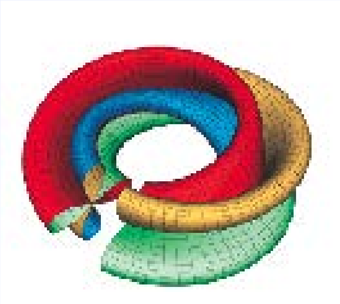
matematita

Riprendere la visita a una mostra in un percorso successivo in classe: qualcosa di diverso ancora

E qualcosa che vale la pena fare.
Lasciamo che sfruttino la mostra come mostra.
Ma dopo riprendiamola.
E durante osserviamo su che cosa più risuonano e cosa ci può dare spunti…







matematita

E non solo con una mostra, anche col mondo…

Uno dei fili della mostra è quello di far vedere o perlomeno «annusare» l’onnipresenza della matematica nel mondo che ci circonda.

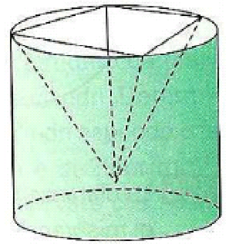
Quindi

cercare all’interno della mostra uno spunto intorno al quale costruire un percorso laboratoriale in classe è solo più comodo finché c’è la mostra a disposizione, ma si può (si deve…!) altrimenti cercare questi spunti … nel mondo.

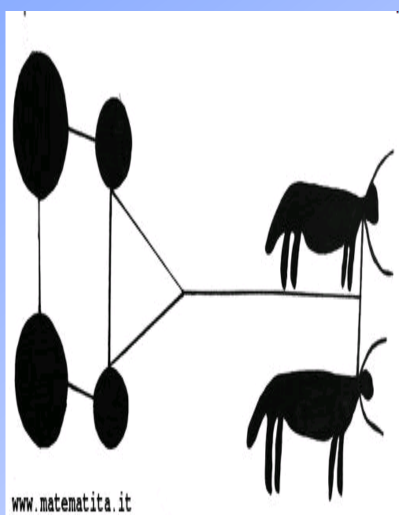
matematita

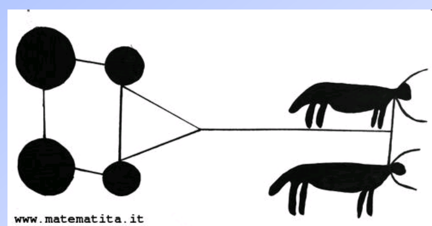
310 Un portaombrelli a forma di **cilindro** ha una cavità a forma di **piramide quadrangolare regolare**, con la base inscritta nel cerchio di base del cilindro. Calcola la misura dell'altezza della cavità, considerando che il volume della piramide è $\frac{1}{5}$ del volume del cilindro, che ha raggio ed altezza rispettivamente di 28 cm e 78 cm.

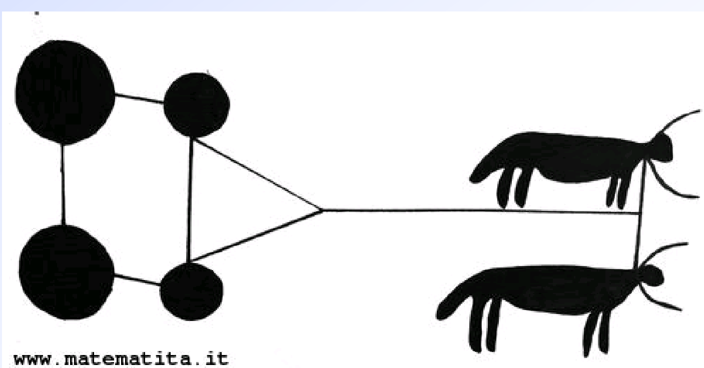
[R. 73,47 cm]

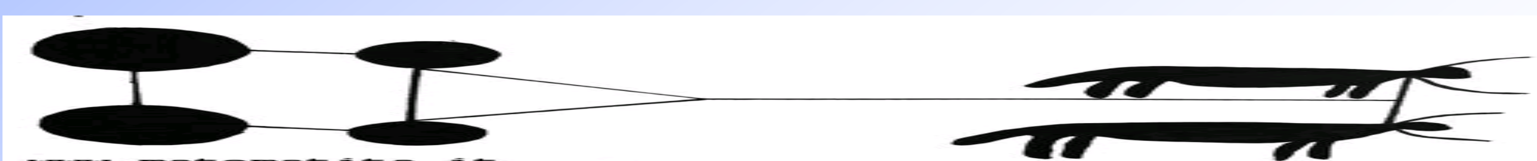


Cercare un collegamento (**VERO**) col «mondo» significa anche recuperare quelle cose che i ragazzi già sanno fare (**purché** non sappiano che si tratta di matematica…!)









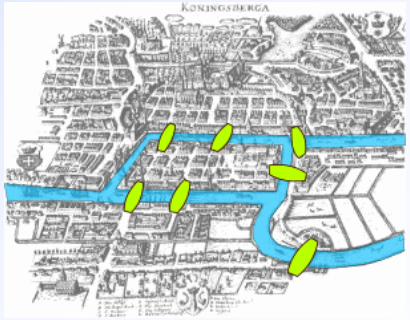
matematita

Qualche esempio:

1. La tabula peutingeriana, la metropolitana di Milano, grafi e topologia.
2. La torre di Hanoi e i percorsi hamiltoniani sull'ipercubo (e gli anelli metallici, e i giochi di luci…).
3. Le carte e la geometria sferica: la terra è tonda, ma il cilindro è piatto…!
4. Affettare un cubo: dal cubo all'ipercubo.
5. …
6. …
7. …

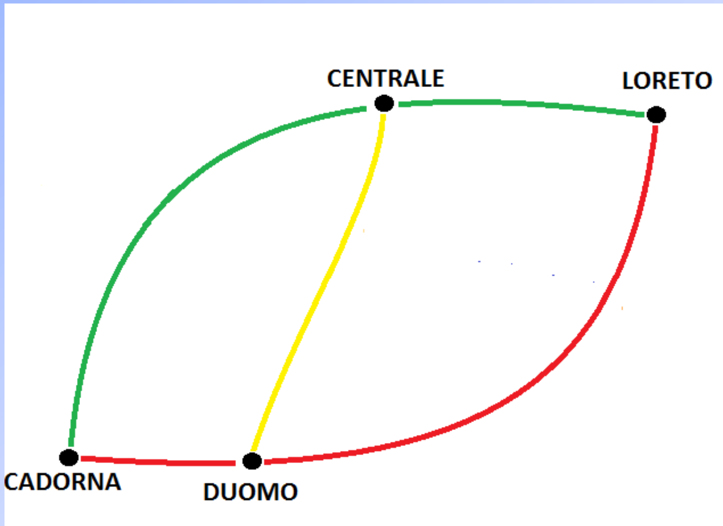
Dalla Tabula Peutingeriana alla Metropolitana Milanese

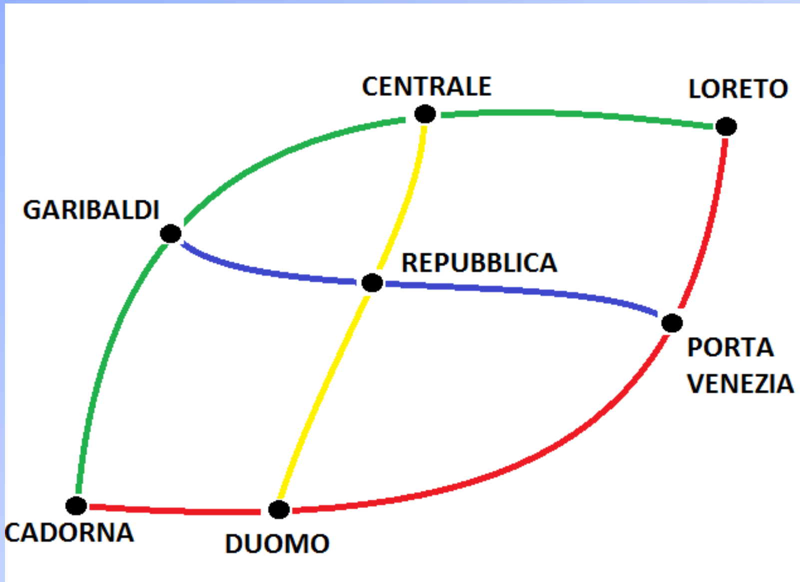
Si presta ai problemi stile ponti di Konigsberg



Per esempio:

È possibile trovare un ***percorso euleriano***, cioè un percorso che passi una e una sola volta per tutti i tratti in figura? Come? I punti di partenza e di arrivo sono obbligati? E se si chiede di tornare al punto di partenza? E se si aggiunge il passante? E se si aggiunge la linea lilla? E se…?

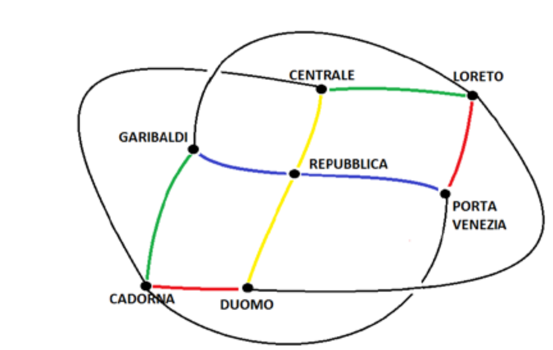


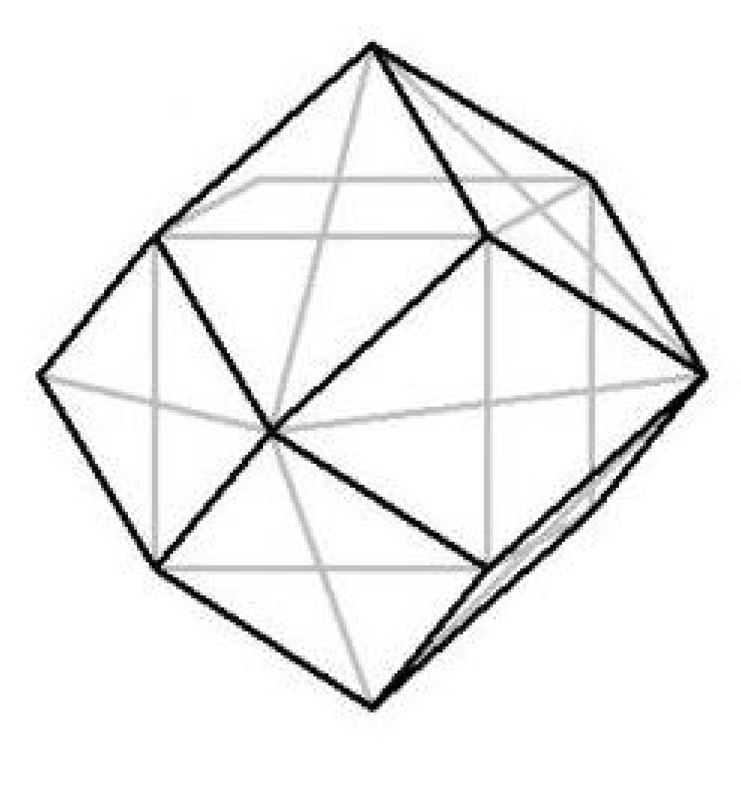


E se si vuole un giro che passi una sola volta per tutte le stazioni?
È un problema più facile o più difficile?

matematita

Un esempio di un grafo dove non è possibile trovare un ***circuito hamiltoniano**,* ovvero un percorso che passi una e una sola volta per ciascun nodo tornando al punto di partenza



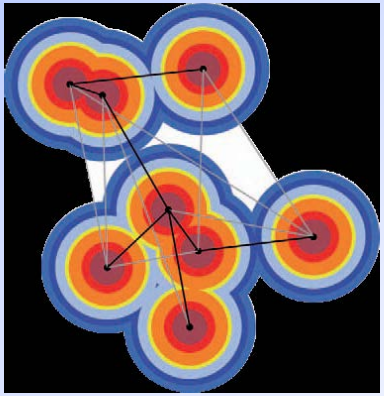


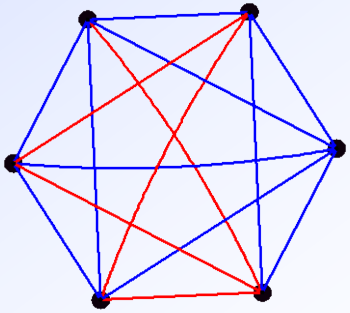
In questo caso dimostrarlo è elementare (ma non facile!); non c’è però un argomento universale per distinguere i grafi hamiltoniani.

matematita

Perché può aver senso un percorso laboratoriale sui grafi? (anche se non è in programma, anche se è troppo facile, anche se è troppo difficile…):

- un esempio di matematica qualitativa
- grafo come strumento per modellizzare un problema concreto (tornei, cavallo scacchi,…)
- scontrarsi con la difficoltà di scrivere un ragionamento con capo e coda (… il linguaggio!)
- recuperare degli aspetti (l'immaginazione, la fantasia, la visualizzazione) una volta stimolati dalla geometria sintetica e ora abbastanza abbandonati (***… alla ricerca della geometria perduta…***)

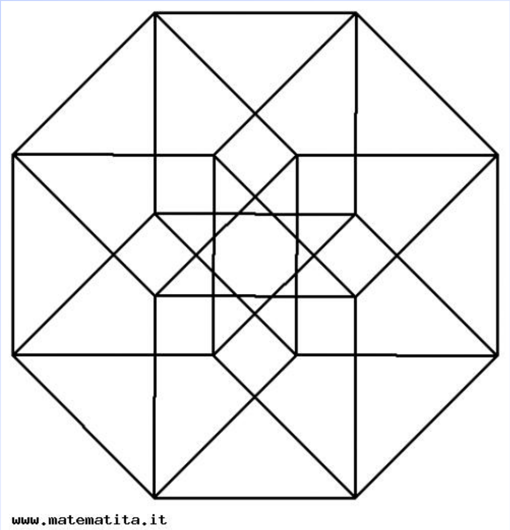




matematita

Un altro esempio: la torre di Hanoi

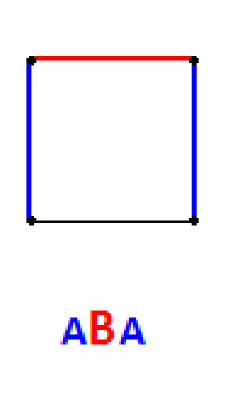
In mostra c'è una torre di Hanoi, ma ci sono anche…
gli ipercubi!



trovare la successione ottimale di mosse per spostare da un piolo a un altro una torre di Hanoi di N dischi

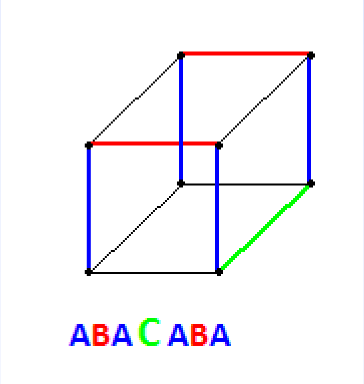
equivale a

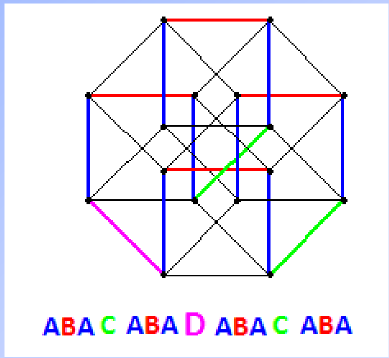
trovare un percorso hamiltoniano su un ipercubo di dimensione N



Circuito su un quadrato <-> torre con 2 dischi
3 mosse

Circuito su un cubo <-> torre con 3 dischi
7 (= 3+1+3) mosse





Circuito su un ipercubo <-> torre con 4 dischi
15 (=7+1+7) mosse

…

matematita

Astrazione = riconoscere la stessa struttura in situazioni diverse.
Qui è proprio la genesi iterativa che è la stessa nei due casi:
$k(N) = 2k(N-1)+1$
$k(N)$ = numero degli spigoli di un circuito hamiltoniano su un ipercubo di dimensione N
Oppure
$k(N)$ = numero minimo di mosse necessarie per spostare un pila di N dischi sulla torre di Hanoi.

Ci sono altri esempi di giochi ISOMORFI alla torre di Hanoi.
esempio: luci
esempio: anelli
…

http://www.atractor.pt/mat/JogosIsomorfos/index.html

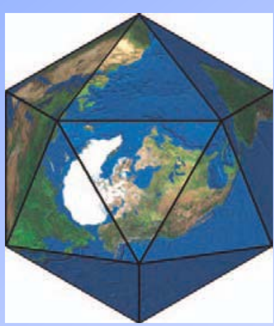
Perché può aver senso un percorso laboratoriale su torre di Hanoi e ipercubi (anche se …)?

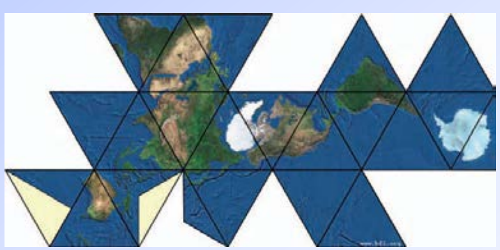
- avviare alle dimostrazioni per induzione
- mettere prepotentemente l'accento sull'astrazione (**però** lasciamo ai ragazzi l'effetto sorpresa; devono essere loro a trovare lo stesso schema in situazioni diverse!)
- educare a mescolare strumenti di tipo diverso
- …

Un altro esempio: non tutto quadra

Le carte geografiche si prestano a tanti percorsi diversi:

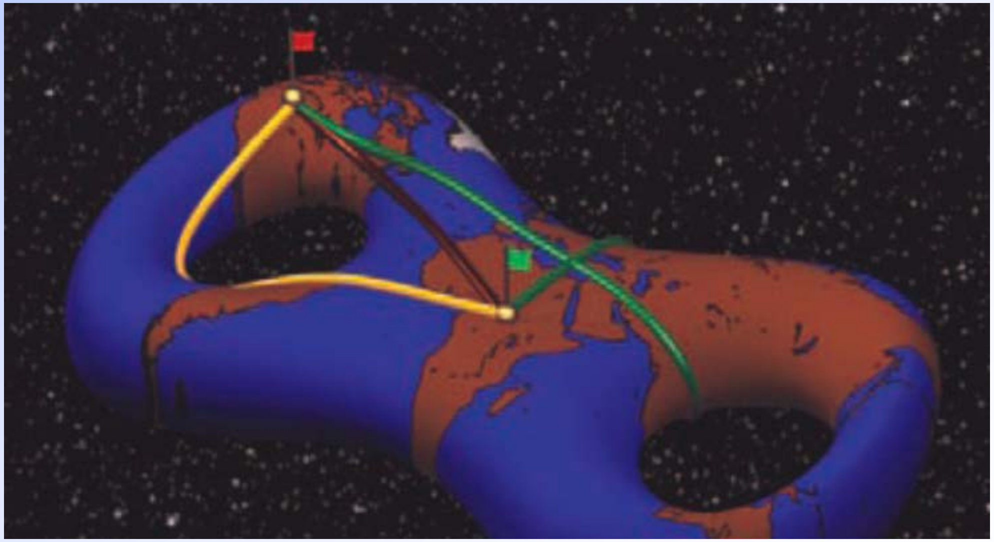
- la geometria sferica (angoli e area di un triangolo sferico)
- il concetto di funzione (una carta geografica non è un disegno)
- i sistemi di coordinate (sul piano e sulla sfera)
- la geometria delle proiezioni
- geodetiche (anche su poliedri)
- …





matematita

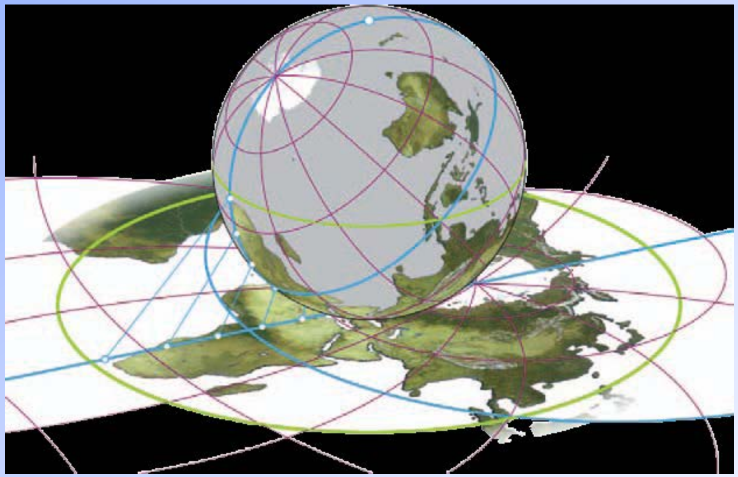
…e volendo si può passare alle colorazioni e quindi a topologia e grafi, magari con un po' di fantascienza per esplorare carte su pianeti non sferici…

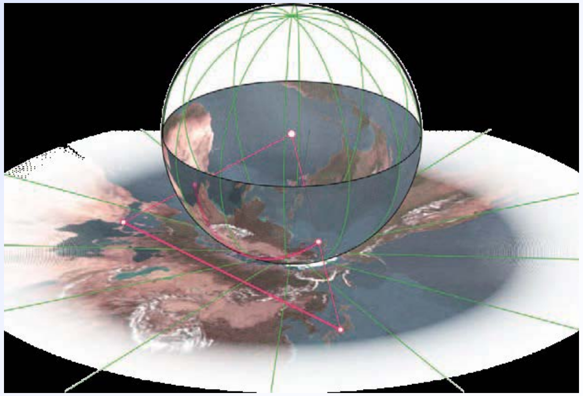


Un esempio (dalla tesi di E. Panzeri)

Si distribuiscono, a gruppi, diverse carte geografiche e si assegnano diverse professioni. Occorre individuare la carta adatta a ogni particolare compito. P.es.

- pilota d'aereo che deve minimizzare i costi del carburante
- ecologo che studia lo scioglimento dei ghiacciai
- navigatore del XV secolo (senza GPS…)
- turista che vuole stimare le distanze di diverse mete dal suo luogo di residenza

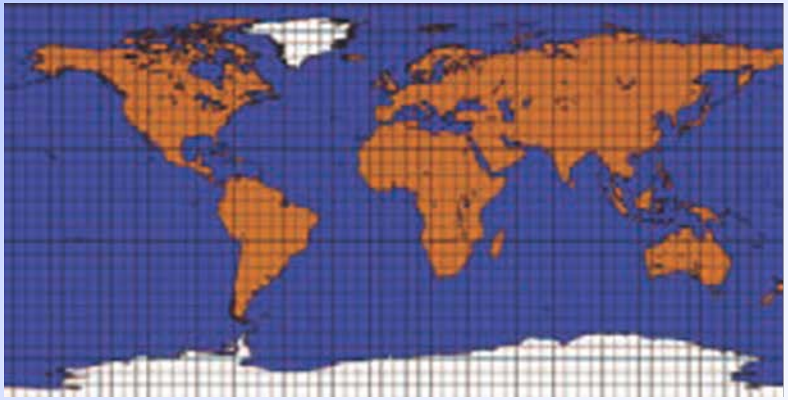




matematita

Perché può aver senso un percorso laboratoriale sulle carte geografiche (anche se …)?

- nessi storici e geografici (interdisciplinarietà **vera**)
- riprendere la geometria euclidea «normale» andando a vedere dove viceversa non vale
- introdurre, sia pure informalmente, un concetto profondo e significativo come la curvatura
- …



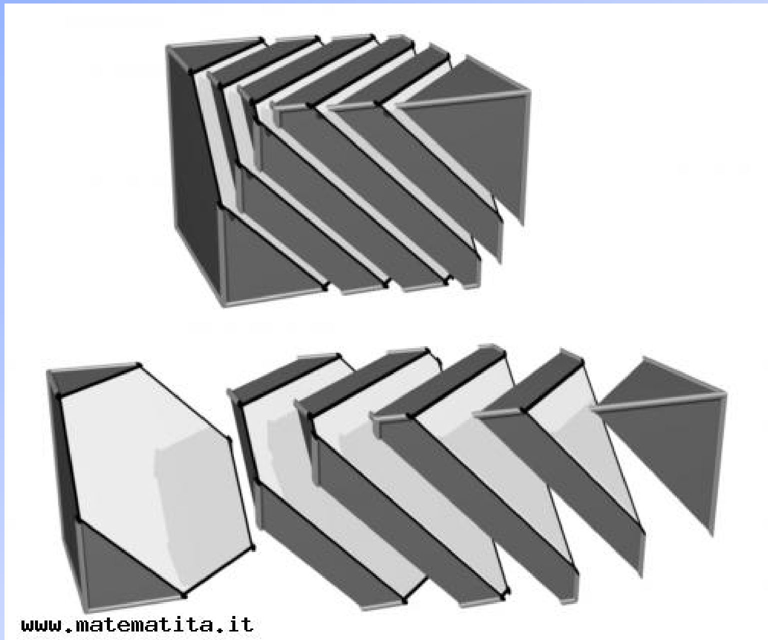
matematita

Un altro esempio: quattro e più di quattro

Un problema classico e adatto a una situazione laboratoriale:
esplorare le sezioni del cubo

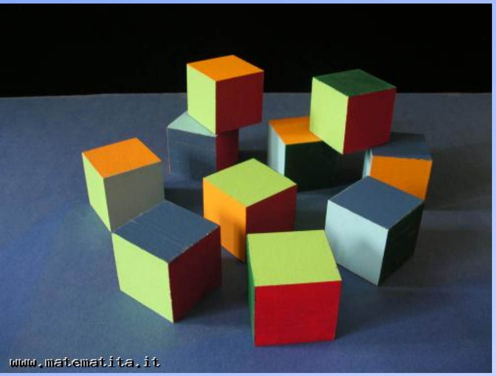
È un bel problema (anche restando nel 3d…!) perché può essere gestito a livelli molto diversi

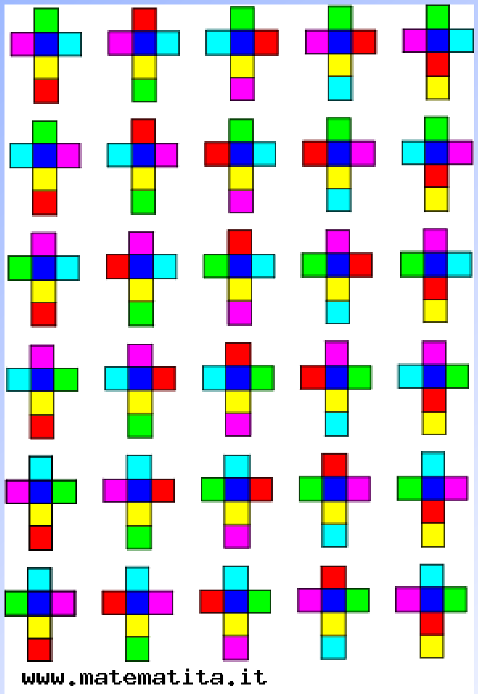
- un ottagono può essere sezione di un cubo?
- qualunque triangolo (a meno di similitudine) può essere sezione di un cubo?
- quali quadrilateri possono essere sezioni di un cubo?
- si può trovare un pentagono come sezione di un cubo?
- si può trovare un quadrato come sezione di un cubo rispetto a un piano che NON sia parallelo a una faccia?
- sezioni e simmetria: che cosa c’entra?
- …

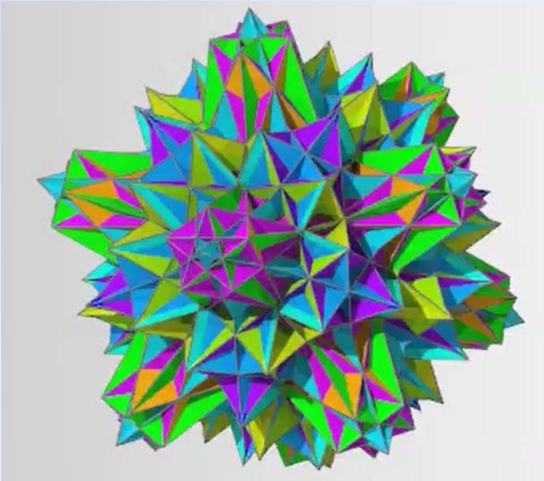


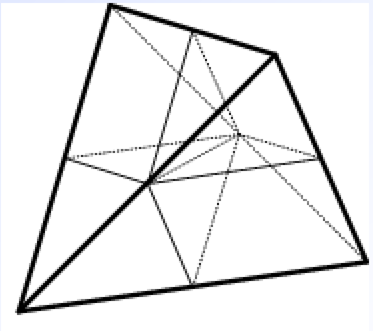
matematita

Si possono esplorare le sezioni di altri poliedri
oppure
esplorare altri problemi sul cubo (con o senza il loro contraltare nell’ipercubo…)
oppure, volendo, anche flatlandia e 4d…



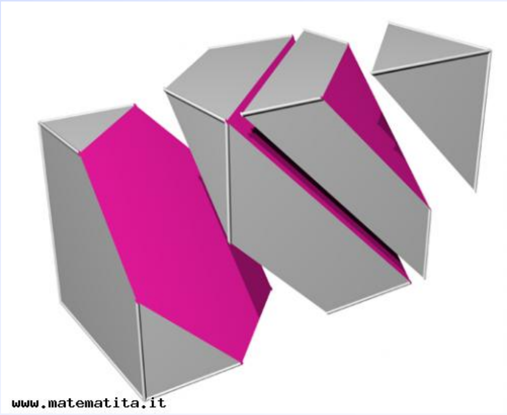




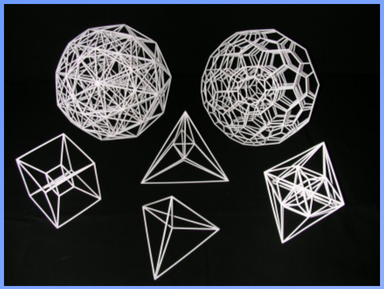


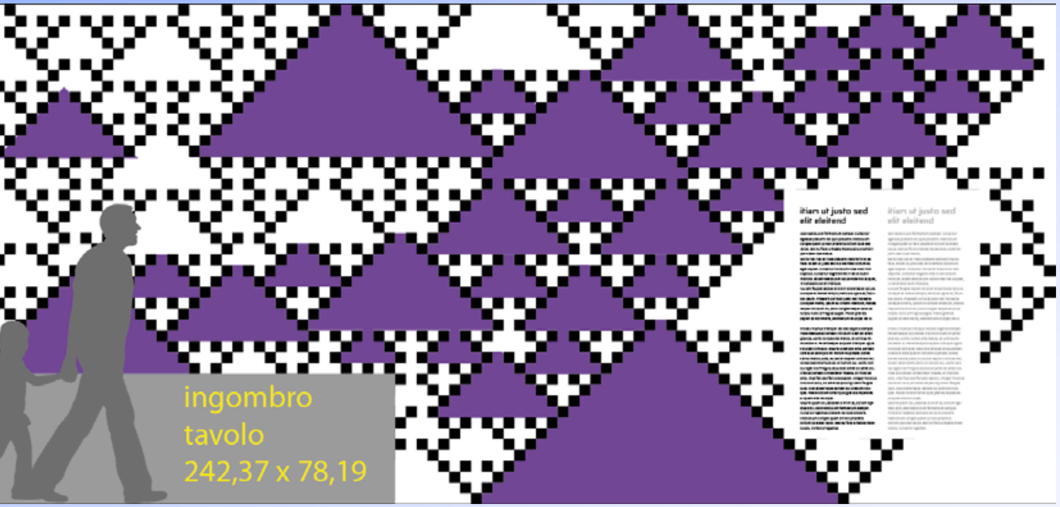
Perché può aver senso un percorso laboratoriale su cubi (e ipercubi) (anche se…)?

- stimolare fantasia, immaginazione, capacità di visualizzazione
- educare all’uso simultaneo di strumenti diversi (le coordinate, ma non solo)
- una scusa per riprendere e motivare qualcosa di geometria solida (3d) che è al momento assolutamente (e ingiustamente) trascurata
- esplorare la simmetria (in modo naturale collegata al problema)



… e naturalmente le possibilità non finiscono qui…





Grazie dell'attenzione!