Una passeggiata fra arte e matematica

di *Giordano Bruno*

Una passeggiata dove si incontrano sfere e bolle di sapone, poliedri e nastri infiniti, fiocchi di neve e frattali, labirinti e vie dritte impercorribili, ricami e topologia, quadrati magici e quarta dimensione, figure impossibili e l'infinito.

Parte I

In questi tempi di miserie onnipresenti, violenze cieche,

catastrofi naturali o ecologiche, parlare di bellezza

può sembrare incongruo sconveniente e persino provocatorio.

Quasi uno scandalo. Ma proprio per questo si vede

come, all'opposto del male, la bellezza si colloca

agli antipodi di una realtà con la quale dobbiamo fare i conti.

François Cheng, *"Cinque meditazioni sulla bellezza"*, Bollati Boringhieri, 2007.

Accolgo pienamente, qui con voi, la sfida lanciata da Cheng, anzi di più, parlerò di due bellezze: quella della matematica e quella dell'arte. Ci verrebbe subito da pensare ad una bellezza "apollinea" e ad una "dionisiaca", identificando rispettivamente la prima come appannaggio della matematica e la seconda dell'arte. Ma non è così. Al pari di quello che ci hanno insegnato i greci per i quali il "carattere" apollineo e quello dionisiaco non sono che le due facce di una stessa medaglia, così le due bellezze si esplicitano nelle due forme suddette per entrambe le nostre protagoniste: la matematica e l'arte.

Per un grande matematico come Hardy la *bellezza* è una delle caratteristiche della matematica e dice che *"Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere belle"*, *"le idee, come i colori o le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale; al mondo non c'è un posto perenne per la matematica sgradevole"* e ancora *"è senza dubbio molto difficile definire la bellezza matematica, ma questo è altrettanto per qualsiasi genere di bellezza"*.

Naturalmente è impossibile qui indagare tutti gli intrecci, le sfaccettature, le convergenze e le divergenze, tutti quegli aspetti, cioè, che rendono la matematica e l'arte una coppia, oserei dire, insolubile.

Perciò ho pensato di comunicarvi alcune delle molteplici sembianze sotto forma di una passeggiata, abbastanza casuale (ma non del tutto, in quanto quando scegliamo qualcosa piuttosto che un'altra il nostro daimòn segreto ci guida), ma tale da permetterci di affacciarci su un panorama che ci possa far dire: "Ne è valsa la pena arrivare qui!".

La Sfera

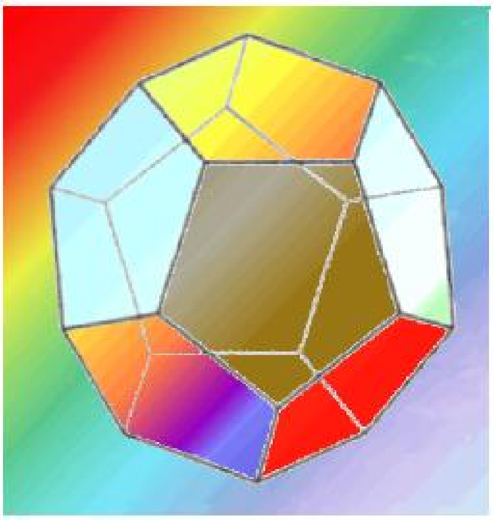
Mi piace aprire, allora, questa chiacchierata *peripatetica* (peripatetica in quanto come qualsiasi passeggiata che si fa chiacchierando tra amici non può che prevedere, anche più volte, il ritorno sui propri passi) partendo dalla **sfera**, la "divina" sfera come la definisce Abbot nel suo Flatlandia.

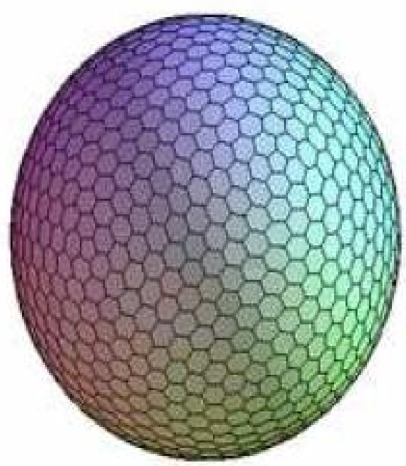
La sfera, il simbolo della perfezione, della regolarità assoluta. Tutti ricordiamo la sua definizione geometrica come "il luogo dei punti dello spazio che hanno tutti ugual distanza da un punto fisso, detto centro". Questa caratteristica, particolarissima rispetto a tutte le altre figure geometriche dello spazio, non poteva e non può che assegnarle un ruolo unico nel nostro immaginario collettivo. Ma ancora di più può catturarci se la consideriamo come figura "limite" della famiglia dei poliedri regolari di *n* lati, al crescere "indefinitamente" di *n*. Questa visione più moderna, che presuppone la scoperta infinitesimale, aggiunge ancora maggior mistero e fascino alla nostra sfera.

Il **dodecaedro** (uno dei cinque poliedri regolari, di cui poi parleremo), che ha per facce 12 pentagoni regolari, già secondo le teorie pitagoriche, approssima la sfera. E Platone nel *Timeo* lo designa così:

"Restava una quinta combinazione e il Demiurgo se ne giovò per decorare l'universo."

Il dodecaedro, quindi, è visto da Platone come immagine di perfezione e bellezza estetica.





Le proprietà della sfera ricordate spiegano, allora, facilmente come svariati artisti, poeti, letterati siano stati da essa attratti e ne abbiano fatto oggetto del loro interesse.

Borges nel suo l'*Aleph* ne parla così:

"Daneri (…)

Disse che la casa gli era indispensabile per terminare il poema, perché in un angolo della cantina c'era un Aleph. Spiegò che un Aleph è uno dei punti dello spazio che contengono tutti i punti.

(…) Chiusi gli occhi, li riaprii. Allora vidi l'Aleph.

(…) come trasmettere agli altri l'infinito Aleph, che la mia timorosa memoria a stento abbraccia? I mistici, in simili circostanze, son prodighi di emblemi: per significare la divinità, un persiano parla d'un uccello che in qualche modo è tutti gli uccelli; Alanus de Insulis, ***d'una sfera il cui centro è dappertutto e la circonferenza in nessun luogo****; (…)*

Quel che videro i miei occhi fu simultaneo (…)

Nella parte inferiore della scala, sulla destra, vidi una **piccola sfera cangiante***, di quasi intollerabile fulgore. Dapprima credetti ruotasse; poi compresi che quel movimento era un'illusione prodotta dai vertiginosi spettacoli che essa racchiudeva. Il diametro dell'Aleph sarà stato di due o tre centimetri, ma lo spazio cosmico vi era contenuto, senza che la vastità ne soffrisse. Ogni cosa (il cristallo dello specchio, ad esempio) era infinite cose, perché io la vedevo distintamente da tutti i punti dell'Universo. Vidi il popoloso mare, vidi l'alba e la sera, vidi le moltitudini d'America, vidi un'argentea ragnatela al centro di una nera piramide, vidi un labirinto spezzato (era Londra), vidi infiniti occhi che si fissavano in me come in uno specchio, vidi tutti gli specchi del pianeta e nessuno mi rifletté, (…), vidi (…), vidi (…), vidi l'Aleph, da tutti i punti, vidi nell'Aleph, la terra e nella terra di nuovo l'Aleph e nell'Aleph la terra, vidi il mio volto e le mie viscere, vidi il tuo volto, e provai vertigine e piansi, perché i miei occhi avevano visto l'oggetto segreto e supposto, il cui nome usurpano gli uomini, ma che nessun uomo ha contemplato: l'inconcepibile universo."*

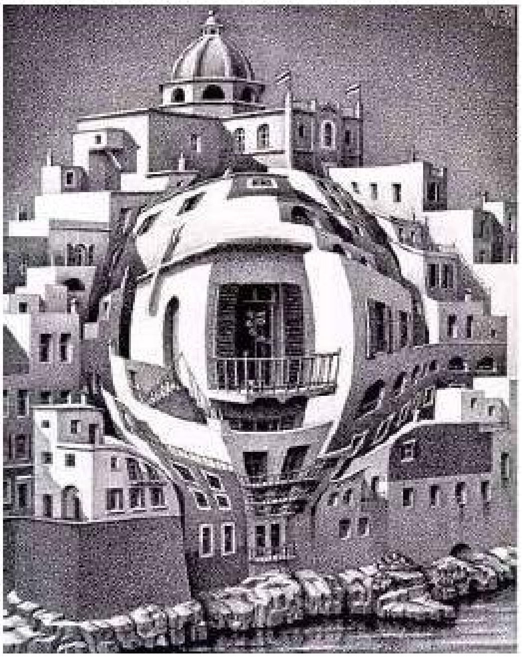
Nel racconto "*L'ultimo ponte di Einstein-Rosen"* di Rudy Rucker, un bambino trova in un campo di asparagi una sfera brillante, delle dimensioni di una pallina da albero di Natale; osservandola vede in essa un'immagine che inizialmente interpreta come il suo riflesso, guardandola meglio vede una figura aliena, un essere di un altro mondo, e dietro essa altre figure, un cielo, un campo, tutto all'interno della piccola sfera. La sfera è un "ponte di Einstein-Rosen" (ovvero un oggetto, teorizzato da Einstein in un articolo scritto in collaborazione con Nathan Rosen nel 1935, che esprime la possibilità che si formino dei "tunnel" di comunicazione tra due universi differenti): per il bambine è come se un intero universo dalle dimensioni infinite fosse contenuto in quella pallina di dimensioni finite.

Questa idea della presenza di un mondo infinito in uno spazio finito è espressa da M.C. Escher in più di una sua opera: è curiosa la somiglianza tra la situazione riportata nel racconto di Rucker e l'illustrazione *Mano con sfera riflettente*, in cui è rappresentata la mano dell'artista che sorregge una sfera riflettente. L'evocazione di mondi simultanei è descritta così dallo stesso Escher:

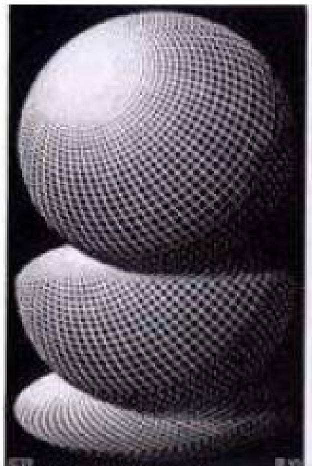
"In questo specchio egli [il disegnatore] *vede un'immagine molto più completa dell'ambiente circostante, di quella che avrebbe attraverso una visione diretta. Lo spazio totale che lo circonda – le quattro pareti, il pavimento e il soffitto della sua camera – viene infatti rappresentato, anche se distorto e compresso, in questo piccolo cerchio."*

Mano con sfera riflettente, M.C. Escher, 1935

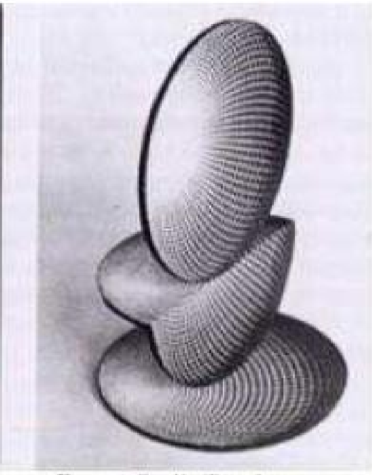
Altre opere di Escher riguardanti la sfera sono:



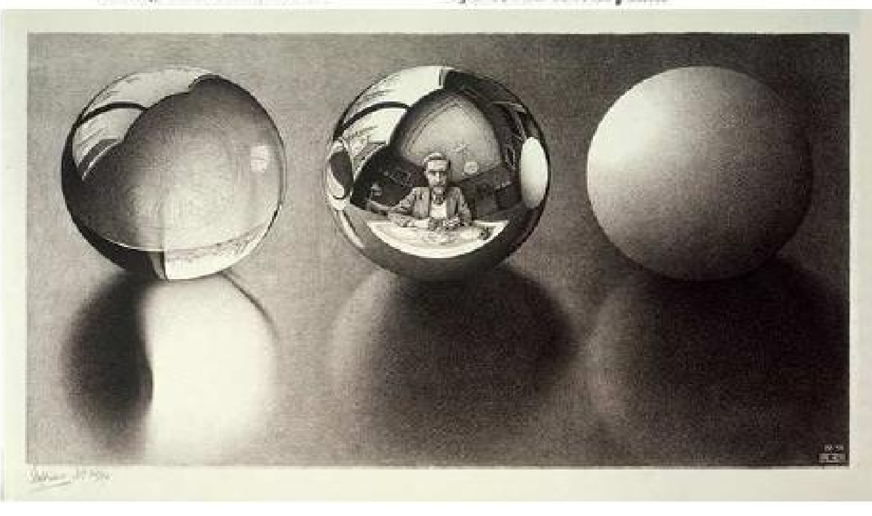
Balcone, M.C. Escher, 1945



Tre sfere I, silografia su legno di testa, 1945



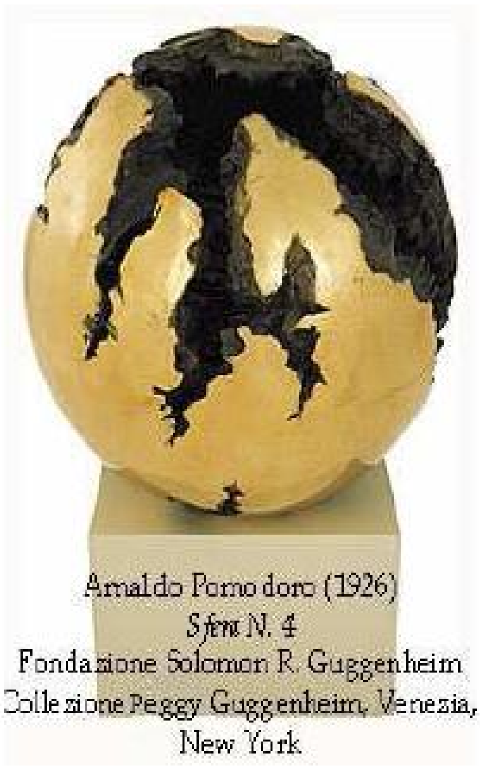
Fotografia di «Tre sfere» – non sfere, ma cerchi piatti



Tre sfere, M.C. Eschar, 1946

Passiamo, ora, ad Arnaldo Pomodoro e Lucio fontana.

Sfera con sfera, A. Pomodoro, Trinità College, Dublino



Sfera N. 4, A. Pomodoro, Collezione Peggy Guggenheim

Arnoldo Pomodoro, Pesaro

Arnaldo Pomodoro, Musei Vaticani

Giulio Carlo Argan si esprime così su Lucio Fontana:

"Un dipinto è sempre una superficie colorata; la sua forma ideale è il piano; una scultura è sempre un volume plastico, la sua forma ideale è la sfera.

Come scultore, Fontana distrugge la scultura: modella grandi sfere e le spacca. E' un gesto: ma il gesto che spacca la sfera mette in comunicazione lo spazio esterno con l'interno."

Lucio Fontana - Sfere - 1957
Mic (Museo Internazionale delle Ceramiche) di Faenza

Lucio Fontana, Concetto spaziale Natura 1959-60

E come meglio concludere sulla "esplorazione" della sfera se non con la pittura surreale e misteriosa di René Magritte. Il mistero che, come lo stesso Magritte ha sottolineato, è uno strumento attraverso il quale *"distruggere le abitudini visive e la logica dei luoghi comuni!"*.

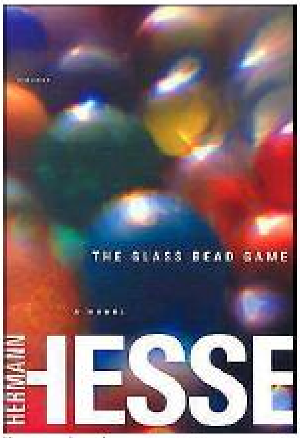
Le faux miroir, Magritte, 1928

La fée ignorante ou Portrait d'Anne-Marie Crowet, Magritte, 1956

L'heureux donateur, Magritte, 1966

Ritorniamo, infine, alla letteratura solo per citare un meraviglioso libro.

"Il gioco delle perle di vetro" **di Herman Hesse**



Il gioco delle perle di vetro, Herman Hesse, 1943

Il romanzo tratta della vita che si svolge in un monastero. Un ruolo centrale viene svolto da un gioco (immaginario), il "gioco delle perle di vetro" da cui il titolo dell'opera. Le regole del gioco non sono note, ma si intuisce che siano estremamente sofisticate. In un certo senso, il gioco esprime la sintesi di tutto lo scibile umano; le mosse dei giocatori consistono nello stabilire relazioni fra soggetti apparentemente lontanissimi fra loro (per esempio, un concerto di Bach e una formula matematica):

Il nome del gioco deriva dal fatto che, secondo il romanzo, esso veniva un tempo giocato usando "pezzi" (appunto perle di vetro) per rappresentare combinazioni astratte, in sostituzione di lettere, numeri, note musicali (soprattutto) o altri segni grafici. Nell'epoca in cui il romanzo è ambientato, tuttavia, il gioco viene giocato senza alcun supporto fisico. Il piacere che i giocatori traggono da una partita viene rappresentato come equivalente a quello che deriva dall'apprezzamento dell'armonia della musica o dell'eleganza in matematica.

Bolle di sapone

"Fate una bolla di sapone e osservatela: potreste passare tutta la vita a studiarla"

(Lord Kelvin)

Potrebbe sembrare una affermazione esagerata, cosa c'è di più semplice di una bolla di sapone?

Lo studio delle bolle e delle lamine di sapone è solo un esempio del problema molto complesso delle "superfici minime", uno dei temi di ricerca del settore della matematica noto come "Calcolo delle variazioni".

Per illustrare i problemi che vengono affrontati in questo settore consideriamo il cosiddetto problema di Didone o isoperimetrico: Virgilio, nell'Eneide, racconta che la regina Didone arrivata sulle coste africane chiese a Labra, re della regione, un pezzo di terra dove fondare una città. Il re per schermirla gli propose tanta terra *"… quanta cerchiar di un bue potesse un tergo"*; un pezzo di terra grande solo quanto la pelle di un bue. Ma Didone tagliando la pelle di bue in strisce sottilissime cucite insieme e, partendo da un punto sulla costa si mise a recintare con le strisce la terra su cui fondare Cartagine.

Il problema che Didone doveva risolvere era quello di circondare con la lunghezza delle strisce la maggior estensione di terra possibile. Risolse brillantemente il problema disegnando un semi-cerchio.

Didone e la fondazione di Cartagine

Il problema "tra tutte le figure piane che hanno lo stesso perimetro qual è che ha la maggior area all'interno", che ha come risposta il cerchio, è stato trattato per la prima volta in termini matematici da Pappo nel libro V dei suoi volumi di matematica e Fisica, intorno al 390 A.D. Tuttavia per la formulazione rigorosa dei problemi legati alla ricerca dei massimi e minimi, cioè quei problemi che in matematica sono studiati dal "Calcolo delle Variazioni", è necessario aspettare il XIX secolo con i risultati di Eulero e Lagrange. Nel 1873 Joseph Plateau pubblicò gli esiti dei suoi lavori sperimentali sulle lamine e agglomerati di bolle di sapone, relativi a proprietà sulle superfici minime; ma è soltanto un secolo più tardi, nel 1973, che la matematica Jean Taylor fu in grado di dimostrare che le leggi di Plateau erano vere.

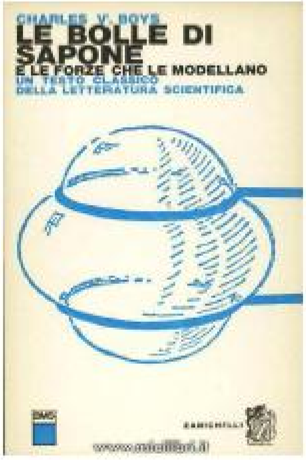
Nell'arte sono innumerevoli le raffigurazioni relative alle bolle di sapone.


Bolle di sapone Jean-Baptiste-Siméon Chardin, XVIII secolo


Les Bulles de savon, Édouard Manet (1867)


Charles Joshua Chaplin, Blowing Bubbles, seconda metà XIX secolo

Cito due testi, soltanto, a proposito:



Charles V. Boys, ***Le bolle di sapone e le forze che le modellano***, Zanichelli.

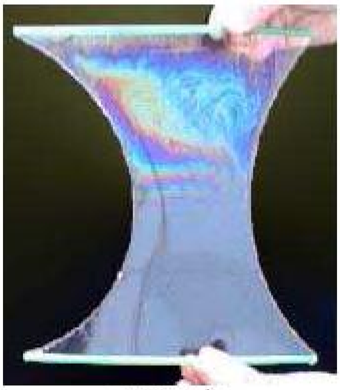
Michele Emmer, ***Bolle di sapone***, Bollati Boringhieri.

Lamine saponate

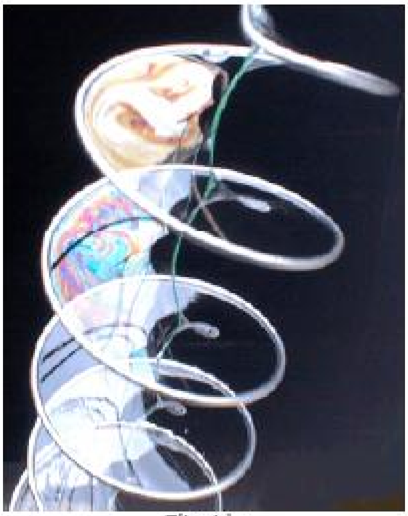
Saper prevedere *come si dispone una pellicola saponata* costituisce un problema matematico noto come *Problema di Plateau*, dal nome del fisico belga J.A.F. Plateau (1801 – 1883).

La lamina di sapone si dispone a formare una superficie la cui **area** sia la **minima possibile** tra quelle **aventi quel dato contorno**. Questo avviene perché la tensione superficiale della lamina saponata tende a ridurne il più possibile l'estensione.

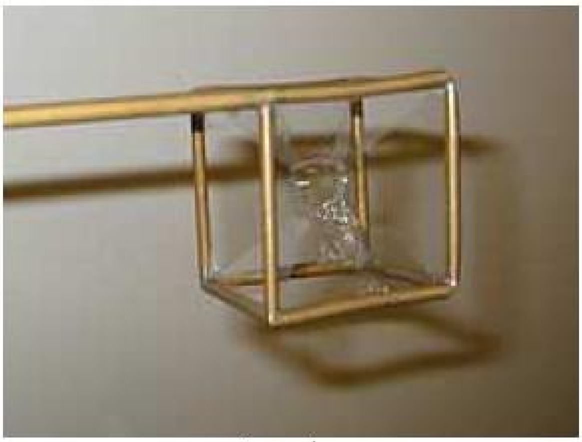
Se il contorno è costituito da due cerchi paralleli sufficientemente vicini, la superficie che osserviamo *non* è il **cilindro**, come forse potremmo pensare. Osserviamo invece che una superficie di rotazione chiamata **catenoide**, Infatti, se è vero che nella catenoide le curve verticali che costituiscono le generatrici della superficie sono più lunghe dei segmenti di retta che abbiamo nel cilindro, la nostra superficie è però più stretta al centro e questo a conti fatti ci fa risparmiare area! Questo è un fatto matematico che le lamine di sapone illustrano alla perfezione.


Catenoide

Del resto, le lamine di sapone sono anche perfettamente in grado di costruire una scala a chiocciola, senza bisogno dei disegni di un architetto: la superficie sotto si chiama **elicoide**.


Elicoide

Non solo ma sanno costruire anche degli ipercubi, ovvero cubi quadridimensionali.


Ipercubo

Ed eccone le applicazioni.

Watercube, Piscina olimpica Pechino

Watercube, Piscina olimpica Pechino 2

Una bolla veramente singolare!

Bolla di sapone gigante

E infine un inno alla vita, al gioco, alla gioia!

Cagnaccio di San Pietro (Natale Scarpa), La bolla di Sapone, 1927

Ma… anche i cantautori sono attratti dalle bolle di sapone:

“Per le parole non preoccuparti

È più facile di quello che pensi…

Come le Bolle di Sapone………bing

Se “soffi” piano vengono da sole”

da *“Bolle di sapone”* di Vasco Rossi

Poliedri (omaggio a Ugo Adriano Graziotti)

I poliedri e il loro studio riempiono, potremmo dire, tutta la nostra storia. La letteratura, e non solo matematica, su di essi è sconfinata. Richiamo brevemente alcuni elementi, per poi passare a presentare – anche qui in minima parte – il lavoro di un artista-matematico Adriano Graziotti (1912 – 2000), del quale ho avuto il privilegio di essere amico e con il quale ho condiviso molte giornate. Nel parco della sua casa dove erano collocate alcune delle sue sculture, raffiguranti animali, già molto anziano e malato, trascorrevo il tempo accanto a lui mentre seduto in carrozzina, una spazzola di metallo in mano, "lisciava" le sue opere (un'opera non è mai conclusa, mi diceva). Spesso rimanevamo per lungo tempo in silenzio: non ho mai comunicato tanto con un essere umano!

La prima costruzione dei cinque poliedri regolari è dovuta, quasi sicuramente, alla scuola Pitagorica. Sempre **Proclo** a proposito di Pitagora afferma: *"Egli scoprì il fatto degli irrazionali e la costruzione delle figure cosmiche (poliedri regolari)"*.

Platone assegna a queste figure un ruolo importante nella sua filosofia. Nel dialogo Timeo, egli associa ai quattro elementi da cui trae origine il mondo, quattro dei cinque poliedri:

fuoco $\longrightarrow$	tetraedro
terra $\longrightarrow$	cubo
aria $\longrightarrow$	ottaedro
acqua $\longrightarrow$	Icosaedro

Utilizza solo 4 elementi poiché tanti erano gli elementi fondamentali secondo la filosofia antica. Al dodecaedro, come abbiamo già visto, dà **un ruolo di ornamento e di completamento**.

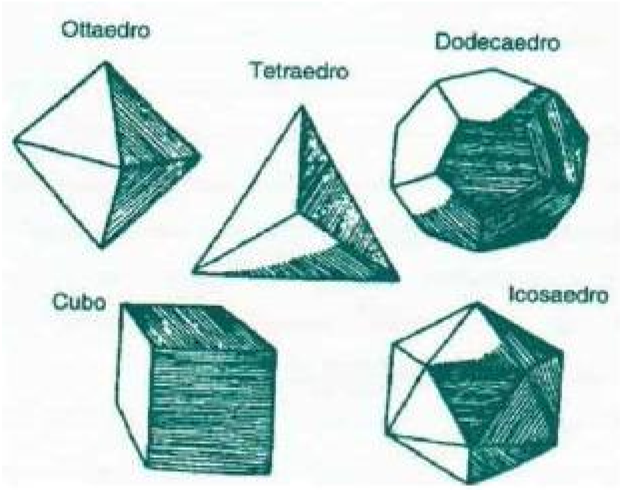
Un **poliedro** si dice **regolare** quando le sue facce sono poligoni regolari congruenti e i suoi angoloidi sono pure congruenti tra loro. Per questo motivo se ne possono costruire solo cinque.

Ritroviamo i cinque poliedri con **Euclide**. Infatti, nel XII libro degli *"Elementi"*, Euclide propone di inscrivere ciascun poliedro in una sfera di dato diametro e quindi di determinare il rapporto tra lo spigolo del poliedro inscritto ed il diametro della sfera circoscritta. In tal modo le misure degli spigoli diventano tra loro rapportabili.

Nell'ultimo capitolo del suo libro, Euclide dimostra che non ci possono essere altri poliedri regolari al di fuori dei cinque.

Un poliedro ha almeno 4 facce e in tal caso si chiama **tetraedro**.

Un poliedro con 6, 8, 12, 20 facce si chiama **esaedro**, **ottaedro**, **dodecaedro**, **icosaedro**.



Solidi platonici

Un poliedro è una parte finita di spazio, nel senso che non contiene rette o semirette. Le parti finite di spazi sono dette **solidi**.

Dopo Euclide, **Archimede** si occupò dei poliedri, ma non di quelli strettamente regolari.

Egli richiede che:

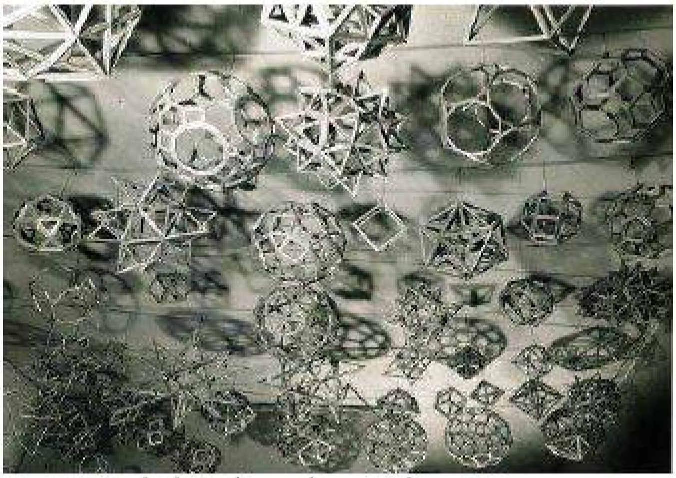
- Le facce siano dei poligoni regolari, anche diversi tra loro (ad esempio: triangoli equilateri, quadrati).
- Le facce poligonali devono essere disposte nello stesso modo intorno ad un vertice.

Si parla in tal caso di **poliedri semiregolari o *Archimedei***. Anche per questi solidi c'è un numero limitato di possibilità: in tutto **13**.

Piero della Francesca nel trattato *"De quinque corporibus regularibus"* sostiene che il mondo è pieno di corpi complessi o senza una particolare forma, ma ognuno di essi può essere ricondotto ai cinque poliedri regolari che rappresentano l'eterna perfezione.

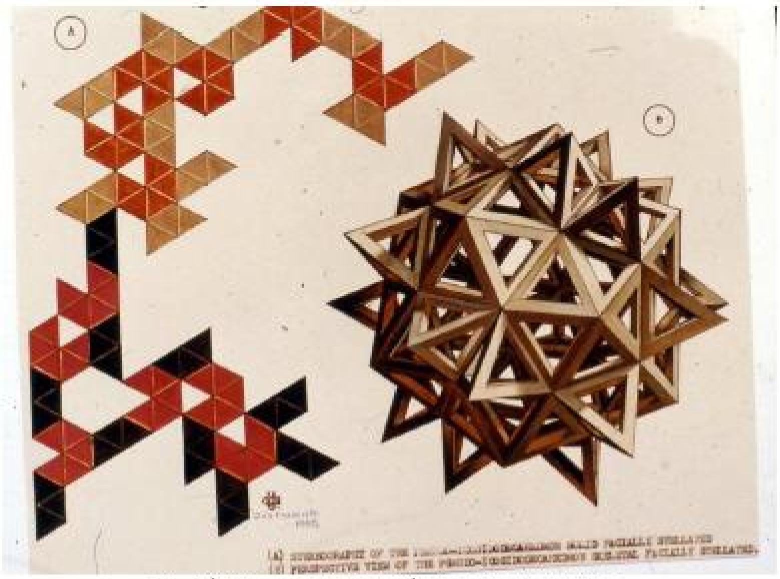
Di questo trattato esiste una versione in volgare nella *"Divina Proporzione"* di **Fra' Luca Pacioli**. I disegni per questo libro sono stati eseguiti da **Leonardo da Vinci**.

Adriano Graziotti ha "costruito" una grandiosa collezione di poliedri, tutti realizzati manualmente da lui – di cui un centinaio sono esposti al Dipartimento di Matematica "Guido Castelnuovo" della Sapienza di Roma – scoprendo anche forme nuove.



Poliedri realizzati da Ugo Adriano Graziotti

Dei poliedri ha studiato inoltre lo sviluppo **stereometrico**. Cioè il dispiegamento e la proiezione sul piano di un poliedro. Scienza nota fin dall'antichità, particolarmente utile per visualizzare le modalità di connessione degli spigoli dei poligoni regolari che formulano il solido. La successione dei poligoni può essere colorata secondo principi cromatici e successioni differenti che costituiscono, a tutti gli effetti, un vero e proprio linguaggio musicale.



U. Adriano Graziotti, Sviluppo stereometrico

Ha esplorato anche a fondo il problema della **dualità**. Lo studio della geometria classica che prende in esame le proprietà metriche delle figure, cioè le misure di angoli e di lati che restano invariati se la figura stessa viene sottoposta a movimenti rigidi cioè traslazioni, rotazioni e ribaltamenti. Sottoponendo le figure ad un diverso tipo di trasformazione si giunge ad una nuova geometria.

E' quello che è accaduto a partire dal '500 con la **teoria della prospettiva**. Il problema di quali siano le proprietà geometriche della figura reale che si conserva passando alla sua immagine mediante proiezione, viene sollevato per la prima volta da **Leone Battista Alberti**.

Ad esempio nella prospettiva due linee che nella realtà sono parallele vengono rappresentate in modo da incontrarsi in un punto, le lunghezze e gli angoli perciò si alterano.

Nel '600 prendono avvio i primi studi di geometria proiettiva ad opera di **Desargues** e **Pascal**.

Un concetto curioso ed importante nella geometria proiettiva è il **principio di dualità**.

Consideriamo i due assiomi relativi al piano proiettivo:

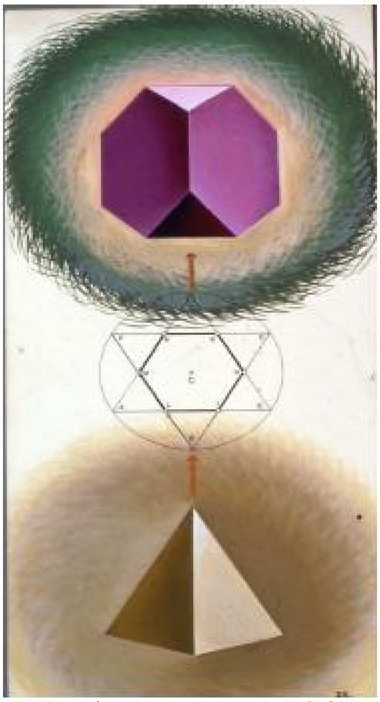
1. **Due punti distinti determinano una ed una sola retta.**
2. **Due rette distinte determinano uno ed un solo punto.**

Ebbene, partendo dal primo assioma è possibile ottenere il secondo scambiando fra loro i termini punto e retta e viceversa.

Questo accade per tutti i teoremi della geometria proiettiva e si dice che punto e retta sono elementi duali.

Così due **figure sono duali** tra loro quando una è ottenibile dall'altra sostituendo ad ogni elemento l'elemento duale. Anche per la geometria proiettiva nello spazio vale il principio di dualità.

Tale principio applicato ai poliedri fa corrispondere facce a vertici ed implica così che **da ogni poliedro** possiamo ottenere il suo poliedro duale scambiando fra di loro **il numero delle facce** con **il numero dei vertici** e lasciando inalterato il numero degli spigoli.



U. Adriano Graziotti, Dualità

E si è dedicato anche allo studio e alla realizzazione di **cupole geodetiche**.

Una **cupola geodetica** è una struttura emisferica composta da una rete di travi giacenti su cerchi massimi (geodetiche). Le geodetiche si intersecano formando elementi triangolari che giacciono approssimativamente sulla superficie di una sfera; i triangoli sono tutti molto simili tra loro ed essendo rigidi garantiscono la robustezza locale, mentre le geodetiche formate dai loro lati distribuiscono gli sforzi locali sull'intera struttura. La cupola geodetica è l'unica struttura costruita dall'uomo che diventa proporzionalmente più resistente all'aumentare delle dimensioni. Quando la struttura forma una sfera completa, viene detta *sfera geodetica*.

Fra tutte le strutture costruite con elementi lineari, la cupola geodetica è quella con il massimo rapporto fra volume e peso racchiuso: strutturalmente sono molto più forti di quanto sembrerebbe guardando le travi che le costituiscono. Durante la costruzione di una nuova cupola geodetica c'è un momento in cui la struttura raggiunge la “massa critica” necessaria e si assesta verso l'alto, sollevando i ponteggi ad essa fissati.

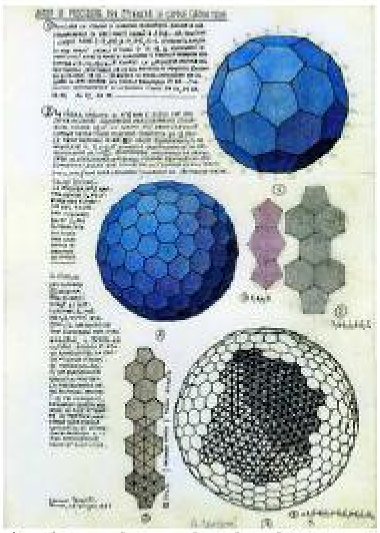
Il progetto di una cupola geodetica è molto complesso, in parte perché non esistono progetti standard di cupole geodetiche pronti, da scalare dimensionalmente secondo le necessità, ma ogni cupola deve essere progettata da zero in base alle dimensioni, alla forma e ai materiali. Esistono dei criteri di progettazione basati sull'adattamento di solidi platonici, come l'icosaedro: essenzialmente consistono nel proiettare le facce del solido sulla superficie della sfera che lo circoscrive. Non c'è un modo perfetto di eseguire una simile operazione, perché non è possibile conservare contemporaneamente i lati e gli angoli originali, il risultato è una soluzione di compromesso basata su triangoli e geodetiche solo approssimativamente regolari.

Il progetto di geodetiche si può estendere a superfici di forma qualsiasi, purché curva e convessa; in questi casi però si rende necessario calcolare separatamente ogni trave della struttura, facendo lievitare i costi.

A causa delle difficoltà di progetto delle cupole geodetiche i costruttori tendono a standardizzarle e a costruire solo pochi modelli di dimensioni prefissate.

La Biosfera di Montreal, R. Buckminster Fuller, Isola di Sainte-Hélène.

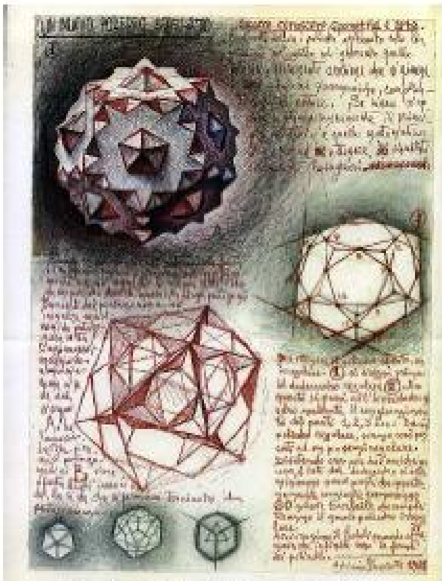
Gli studi di Graziotti



Studio di cupole geodetiche di A. Graziotti

Altre realizzazioni e immagini relative a Ugo Adriano Graziotti:

Icosaedro stellato solido di U. Adriano Graziotti. Costituito da 20 tetraedri regolari e da 12 piramidi pentagonali rette, ognuna delle quali si compone di cinque triangoli "sublimi", costruiti cioè con l'osservanza della proporzione aurea (la divina proporzione) tra la lunghezza dello spigolo e quella della base.



Studio di U. Adriano Graziotti

Lucio Saffaro scrittore e pittore italiano, ha studiato i solidi e sopratutto gli icosaedri esistenti in natura e li ha rappresentati anche dipingendoli in quadri.

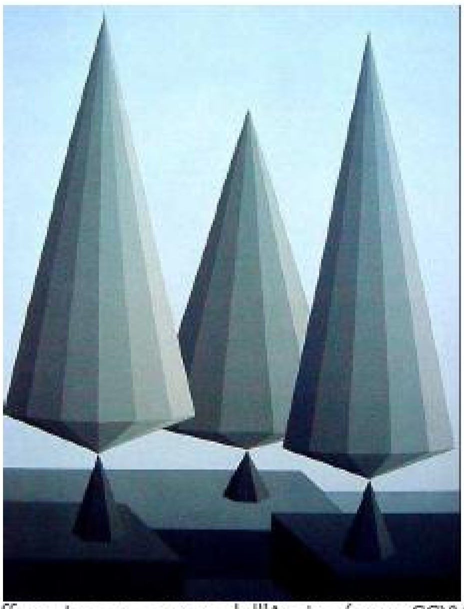
San Francisco 1964

Cattolica 1995

Lucio Saffaro scrittore e pittore italiano, ha studiato i solidi e sopratutto gli icosaedri esistenti in natura e li ha rappresentati anche dipingendoli in quadri.


Ritratto di Keplero, Lucio Saffaro, 1967


Lucio saffaro, Opus CIXI, 1971


Lucio Saffaro, La conoscenza dell'Austro (opus CCXVI), 1975

Lucio Saffaro, Il secondo Palladio, 1974

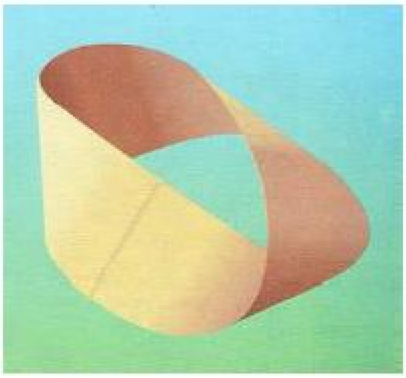
Il piano di Orfeo (opus CCLXXXIII), 1991

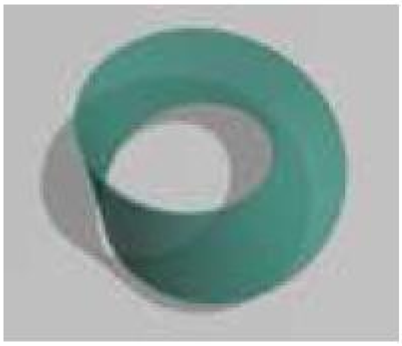
Nastri infiniti

Con i nastri si ornano i doni, si esibiscono le danzatrici, le donne ci legano i capelli. Ci sono quelli cardati, quelli adesivi, quelli trasportatori e quelli celebrativi. Il nastro ci suggerisce comunque un'idea di legame. E' possibile pensare ad un nastro infinito?

Immaginiamo subito un qualcosa che si srotola e continua a farlo indefinitamente. Ma esiste qualche oggetto reale che possa appagare la nostra immaginazione in tal senso?

In realtà tale oggetto esiste. Sembra che sia stato il grande matematico Carl Friedrich Gauss a imbattersi in una curiosa figura geometrica avente a che fare con una striscia e ne avrebbe suggerito lo studio ai suoi allievi, August Ferdinand Moebius e Johann Benedict Listing. In realtà presa una striscia di carta, sufficientemente lunga, se ne afferrano le estremità e tenendone ferma una si effettua una torsione dell'altra di un mezzo giro (180°), portandola ad unirsi con quella fissa, si ottiene un particolare "nastro".



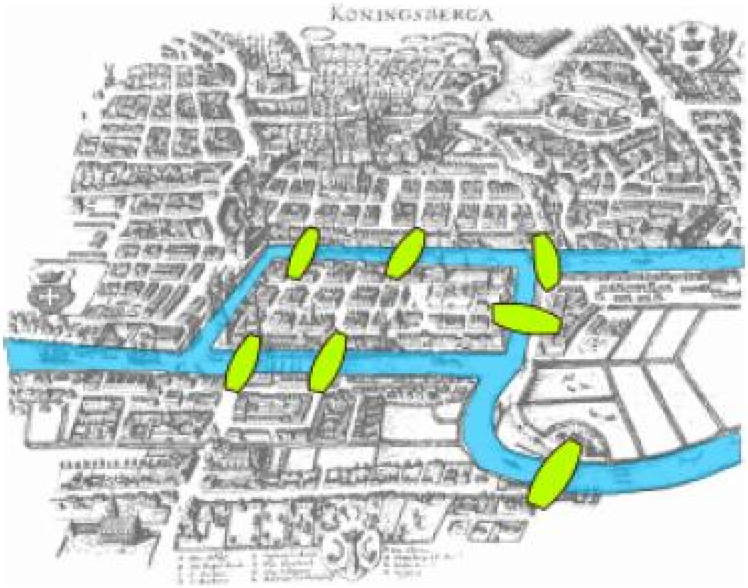


Questa figura, che si caratterizza per le proprietà di avere una sola faccia e un solo bordo – al contrario, ad esempio, del cilindro che ha due facce e due bordi – fu studiato in particolare da Moebius nel 1858, per cui le fu assegnato il nome di *"nastro di Moebius"*.

Per capire bene le sue proprietà si osservi che si può colorare tutta la sua superficie partendo da un qualsiasi punto senza mai attraversare il bordo, al contrario di come dovremmo fare, ad esempio, per un cilindro.

Su altre proprietà non mi soffermo, ma lo studio di questo stupefacente oggetto matematico riguarda una brabca della matematica, detta **topologia** (questo nome fu introdotto proprio da Listing).

Il fondatore di questo settore fu il grande matematico Henri Poincaré, che nel suo volume *"Analysis Situs"* del 1985: *"Per quanto mi riguarda, tutte le diverse ricerche delle quali mi sono occupato mi hanno condotto all'Analysis Situs"*. Il vocabolo topologia, formilato da Listing, non è altro che la traduzione greca di quello latino usato da Poincaré. Problemi di topologia furono affrontati da eccellenti matematici, uno dei primi a occuparsene fu Elulero. Egli nel 1736 affrontò e risolse il famoso problema dei "sette ponti di Königsberg". La città di Königsberg percorsa dal fiume Pregel e dai suoi affluenti, presenta due estese isole che sono connesse tra di loro e con le due aree principali della città da sette ponti. La questione è se sia possibile con una passeggiata seguire un percorso che attraversa ogni ponte una e una volta sola e tornare al punto di partenza. Eulero dimostrò che la passeggiata ipotizzata non era possibile a causa del numero dispari di nodi che congiungevano gli archi (ossia delle strade che congiungevano i ponti). La soluzione di Eulero diede origine alla teoria dei grafi, che si sarebbe poi evoluta dando origine appunto alla topologia.



Ponti di Koenisberg

Eulero introdusse per i poliedri convessi anche la formula che unisce il numero dei vertici V, degli spigoli S e delle facce F:

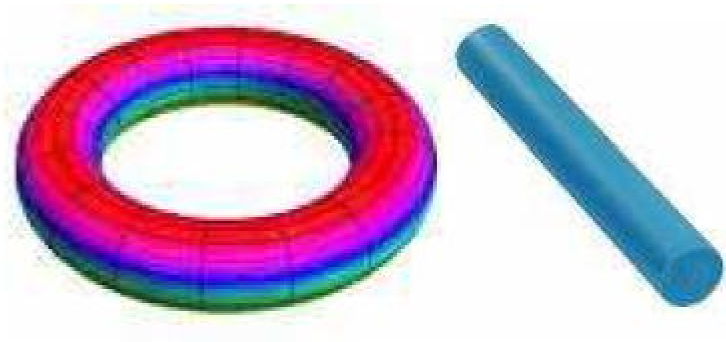
$$V - S + F = 2$$

Tale formula rappresenta un invariante topologico.

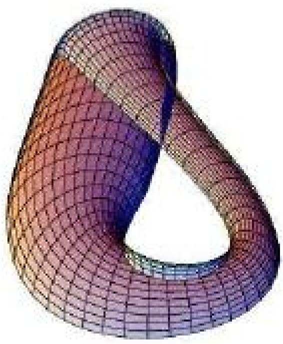
Ma cos'è in realtà la topologia? Viene chiamata la geometria di un *foglio di gomma*, cioè la geometria che si occupa delle trasformazioni geometriche che considerano equivalenti tra loro tutte le figure che si ottengono l'una dall'altra attraverso deformazioni continue del piano o dello spazio, ovvero senza strappi e senza tagli.

In sostanza come facciamo da bambini usando la plastilina possiamo prima realizzare un cubo e poi senza strappi una sfera e poi ancora un cilindro, tutte figure topologicamente equivalenti. Se poi volessi unire le basi del cilindro otterremmo un toro, ovvero una ciambella, che non è topologicamente equivalente alle altre. In pratica le trasformazioni topologiche sono quelle che conservano la “vicinanza” dei punti: cosa che avviene per le tre figure:

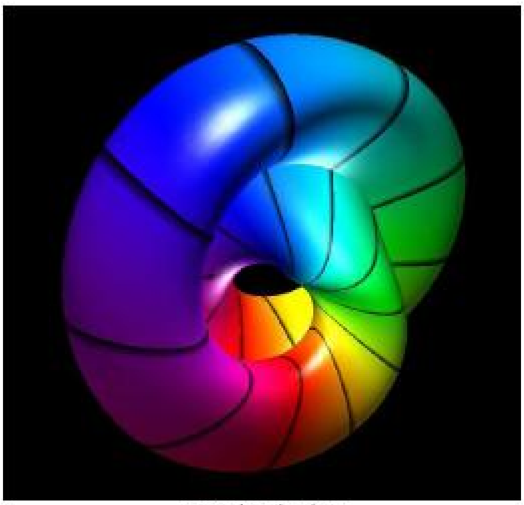
La stessa cosa non accade per il toro in cui i punti tra loro “lontani” - quelli appartenenti alle basi del cilindro – diventano “vicini”. D'altra parte si osservi che per passare da un toro ad un cilindro bisogna tagliare quest'ultima figura!



Ritornando al nastro di Moebius, ne esiste anche una, diciamo così, versione tridimensionale: la “*bottiglia di Klein”*. Una bottiglia che non ha un “dentro” e un “fuori”, ma come il nastro di Moebius ha un'unica superficie. Un altro sorprendente oggetto topologico. Si costruisce, matematicamente, unendo i due estremi di un cilindro con una torsione, oppure unendo i margini di due nastri di Moebius fra loro.



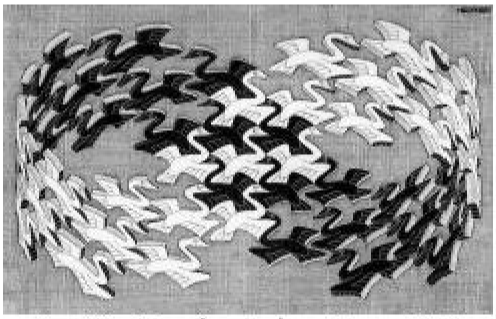
Bottiglia di Klein



Bottiglia di Klein

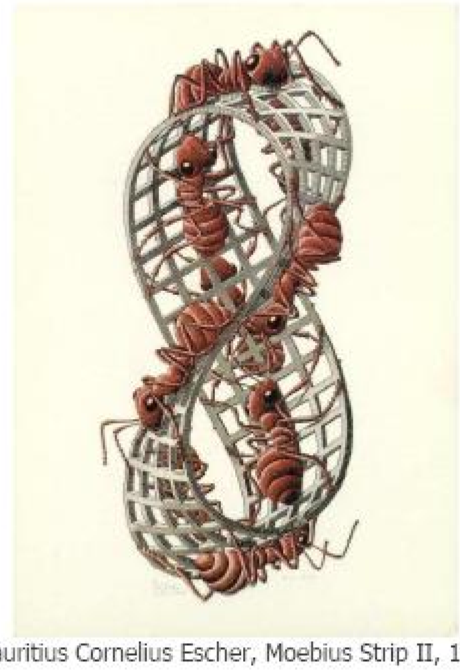
Vediamo Ora come alcuni artisti si sono misurati con il nastro di Moebius.

Questo non poteva colpire la fervida fantasia di Maurits Cornelis Escher, che in particolare lo associa all'incessante movimento delle formiche che si muovono indefinitamente su di esso.



Mauritius Cornelius Escher, *Swans*, 1956

Mauritius Cornelius Escher, *Bond of union*, 1956



Mauritius Cornelius Escher, Moebius Strip II, 1963

Un altro grande artista contemporaneo Max Bill scopre il nastro di Moebius. Giocando con delle scriscie di carta, esattamente nello stesso modo in cui fu scoperto matematicamente, trova delle figure che chiama "nastri senza fine".

Nel suo articolo *"Come cominciai a fare le superfici a faccia unica"*, racconta così l'accaduto:

"Marcel Breuer, il mio vecchio amico della Bauhaus, è il vero responsabile delle mie sculture a faccia unica. Ecco come accadde: fu nel 1935 a Zurigo dove, insieme a Emil e Alfred Roth stava costruendo le case di Doldertal che ai loro tempi ebbero grande seguito. Un giorno Marcel mi disse di aver ricevuto l'incarico di

costruire, per una mostra a Londra, un modello di casa dove tutto, persino il caminetto, doveva essere elettrico. Ci era ben chiaro che un caminetto elettrico che splende ma non ha fuoco non è un oggetto dei più attraenti. Marcel mi chiese se mi sarebbe piaciuto fare una scultura da metterci sopra. Cominciai a cercare una soluzione, una struttura che si potesse appendere sopra ad un caminetto e che magari girasse nella corrente d'aria ascendente e, grazie alla sua forma e al movimento, agisse come sostituto delle fiamme. L'arte invece del fuoco! Dopo lunghi esperimenti, trovai una soluzione che mi sembrava ragionevole.”

Il Nastro senza fine venne presentato per la prima volta alla Triennale di Milano nel 1936.

Successivamente Bill illustra i suoi rapporti con la topologia:

“Già fin dagli anni quaranta pensavo ai problemi di topologia. Da essi sviluppai una specie di logica della forma. Le ragioni per cui venivo continuamente attratto da questo tema particolare sono due : 1) l'idea di una superficie infinita – che è tuttavia finita – l'idea di un infinito finito; 2) la possibilità di sviluppare superfici che – come conseguenza delle leggi intrinseche sottese – portino quasi inevitabilmente a formazioni che provano l'esistenza della realtà estetica. Ma sia 1) che 2) indicavano anche un'altra direzione. Se le strutture topologiche non orientate esistessero solo in virtù della loro realtà estetica, allora, nonostante la loro esattezza, non avrei potuto esserne soddisfatto. Sono convinto che il fondamento della loro efficacia stia in parte nel loro valore simbolico. Esse sono modelli per la riflessione e la contemplazione.”




sculture di Max Bill

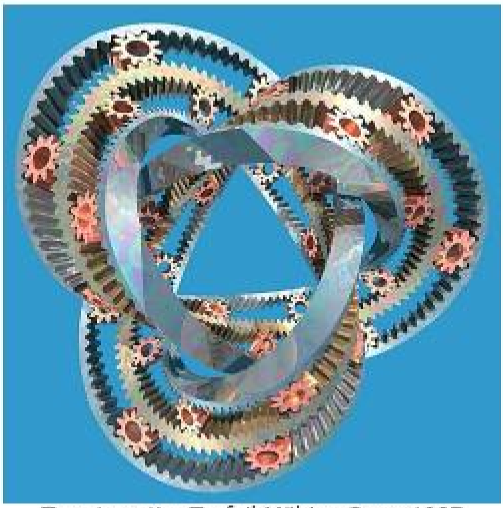
Ed ecco ora altre immagini che illustrano la valenza artistica del nastro di Moebius.

Moebius Ring

Anello di Möbius con diamanti incastonati

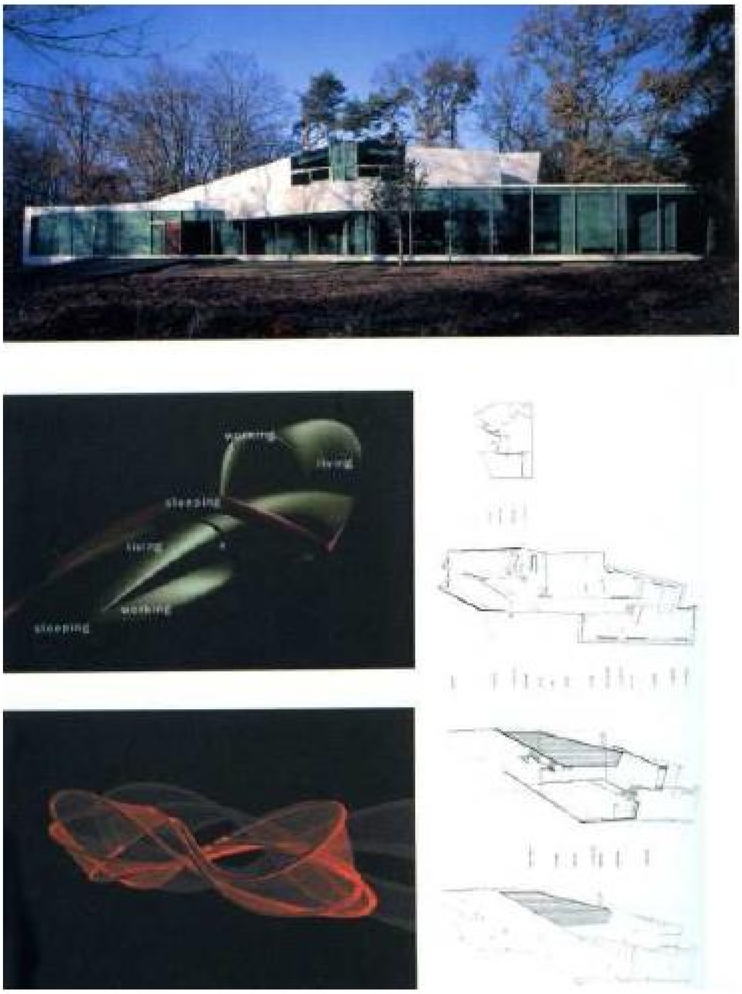
Orecchini di Möbius, S. Rankov

John Robinson, Mobius Trefoil Knot, 2006



Tom Longtin, Trefoil Möbius Gear, 1997

E le applicazioni:



Moebius House, Ben van Berkel (UN Studio / van Berkel & Bos), 1993-1997

E concludiamo con questa immagine suggestiva di nastri e sfere che neanche a farlo apposta, rende la nostra passeggiata: una *passeggiata di Moebius*; spingendoci ancora una volta a riflettere sul misterioso e seducente legame che unisce matematica e arte!

Teja Krasek e Cliff Pickover, We Have Died and Gone to Moebius Heaven

Bibliografia (principali riferimenti)

1. Michele Emmer, *La perfezione visibile: matematica e arte*, Edizioni Theoria, Roma 1991.

2. Michele Emmer, *The Visual Mind: Art and Mathematics*, The MIT Press, Cambridge, 1993.

3. Michele Emmer, *Visibili armonie Arte Cinema Teatro e Matematica*, Bollati Boringhieri, 2006.

4. Michele Emmer, *Bolle di sapone tra arte e matematica*, Bollati Boringhieri, 2009.

5. Augusto Giordano, *Adriano Graziotti*, Studio Effe 76, 1986.

Sitografia (principali riferimenti)

1. **MATEPristem,** http://matematica.unibocconi.it

2. **PROGETTO POLYMATH,** http://areeweb.polito.it/didattica/polymath