La formazione

Padova. Il padre (garibaldino, sindaco e senatore). Gli studi al Liceo "Tito Livio". La laurea. L'influenza di Ricci-Curbastro e il Calcolo differenziale assoluto. I primi lavori scientifici. L'amicizia con Enriques. L'interesse di Volterra. I primi gesti di autonomia scientifica.

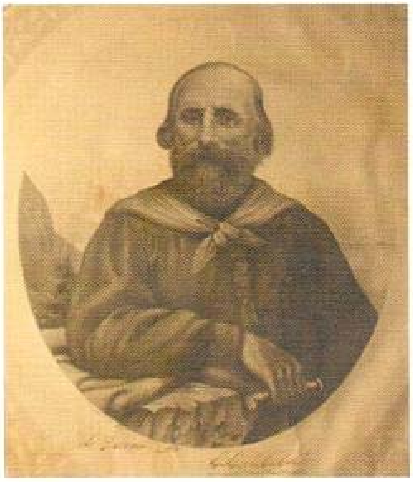
Per la stesura di questa biografia ci siamo giovati soprattutto del *corpus* della sua vasta corrispondenza conservata presso l'*Accademia dei Lincei* (e parzialmente presso la famiglia) ma anche del sentito ricordo che di Levi-Civita scrisse l'amico, e intelligente collaboratore, Ugo Amaldi per la commemorazione lincea del 16 dicembre 1946.

È Guido Castelnuovo, presidente della rinata *Accademia dei Lincei*, a volere inaugurare la ripresa post-bellica delle attività accademiche con le commemorazioni di Vito Volterra e Tullio Levi-Civita, commemorazioni che le leggi razziste del fascismo avevano impedito di tenere (nel 1940 e 1941, rispettivamente).

Per l'incarico della commemorazione, Castelnuovo si rivolge a Carlo Somigliana che però rifiuta. Rifiuta anche Antonio Signorini, cui Castelnuovo si di rivolge dopo Somigliana: "*mi rincresce che tu non ti senta di leggere la commemorazione di L[evi]-C[ivita]. Mi rivolgerò al Signorini, ma preferivo che l'illustre e carissimo amico fosse commemorato da una persona della tua autorità*" (lettera a Somigliana del 27 febbraio '46). Così sarà Amaldi, già impegnato a tenere l'elogio dell'amico alla *Pontificia Accademia delle Scienze*, a commemorare Levi-Civita anche ai *Lincei*.

TULLIO LEVI-CIVITA nasce a Padova il 29 marzo 1873 – in una casa che sembra risalisse al '300 – al numero civico 328 (attualmente n. 7) della vecchia strada "delle beccherie" (perché vi si praticava il commercio delle carni) successivamente diventata "via Due Vecchie" e infine "via Daniele Manin" (la via che da "Piazza delle Erbe" porta al Duomo).

Il padre Giacomo (1846-1922) era stato portato, giovanissimo, dalla nativa Rovigo a Padova quando era ancora vivo il ricordo delle repressioni austriache dei moti studenteschi del 1848. Fin dalla prima adolescenza, si era mostrato così insofferente della dominazione straniera che la famiglia, subito dopo il 1859, lo aveva mandato a continuare gli studi in Piemonte. Appena diciassettenne, era stato con Garibaldi in Aspromonte. Laureatosi poi giovanissimo in Giurisprudenza a Pavia, aveva partecipato fra i volontari garibaldini alla campagna del 1866, guadagnandosi a Bezzecca una medaglia al valore. Tornato a Padova dopo la liberazione del Veneto (ottobre 1866), aveva iniziato la sua attività professionale, raggiungendo presto considerazione e reputazione vastissime. Sembra che nel diritto civile e in quello commerciale non avesse rivali. È a lui che si deve l'acquisizione al comune di Padova della *Cappella degli Scrovegni*, affrescata da Giotto all'inizio



Quadro regalato dallo stesso "eroe dei due mondi" a Giacomo Levi-Civita, in nome della comune passione risorgimentale

del Trecento. Consigliere comunale di Padova dal 1877, Giacomo Levi-Civita fu Sindaco della città dal 1904 al 1910 e Senatore del Regno dal 1908. Un suo busto, opera dello scultore padovano Augusto Sanavio, verrà collocato il 7 luglio 1928 nell'Aula consiliare (allora *Sala della Consulta*).

Dal padre – scrive Amaldi [1] – Tullio Levi-Civita trasse la fermezza del carattere, la tenacia e talune note salienti della sua mentalità speculativa. Dalla madre, Bice Lattes, "*mite e dolce figura di donna gentile, che sempre egli circondò della più devota e delicata tenerezza, ricevette, in un ambiente familiare affettuoso e signorile, le assidue cure di un'elevata educazione del cuore*".

L'attacamento della mamma a questo geniale figlio sembra ne abbia impedito il trasferimento all'Università di Roma quando, nel 1909, si era resa libera la cattedra di Meccanica razionale per la morte di Valentino Cerruti [2]. Così scrive, nel novembre 1909, Pietro Burgatti [3] a Roberto Marcolongo [4], fortemente interessato alla successione di Cerruti: "*dalla tua lettera comprendo che ti sei avvilito, e ciò mi dispiace. Io ti esorto a rimanere sulla breccia; ché la vittoria non può mancarti. L'ostilità degli Ebrei ci era ben nota; non deve dunque scoraggiarti nel momento della battaglia. Essi speravano nel Levi-Civita: e forse ora lo stringeranno con tali ragioni da fargli accettare ciò che aveva rifiutato; ma se egli persiste nel rifiuto (o meglio sua madre), gli Ebrei dovranno rassegnarsi a vederti a Roma*". Il linguaggio usato in questa lettera – il termine *gli Ebrei*, per indicare verosimilmente Castelnuovo [5] e Volterra – mostra come l'ambiente universitario italiano costituisca già nel 1909 un terreno fertile per il futuro antisemitismo fascista. D'altra parte, che Guido Castelnuovo vedesse con grande interesse un eventuale trasferimento di Levi-Civita a Roma, lo conferma una sua lettera del 24 agosto 1909.

Un altro ricordo dell'ambiente familiare e dello studio padovano di via Altinate lo si trova in una lettera di Umberto Cisotti del marzo '35. La via Altinate a Padova, dove i Levi-Civita si erano trasferiti al n. 14, è sempre stata fin dall'epoca romana il principale asse viario della città verso la costa lagunare. Quando la Repubblica Serenissima conquistò Padova, fu naturale per i nobili veneziani far erigere i loro splendidi palazzi lungo questa via.

Nella casa paterna, Levi-Civita compie i primi studi, fino ai rudimenti della cultura umanistica, che gli sono impartiti da un dotto sacerdote cattolico (il professor Padrin). A dieci anni, si iscrive alla seconda classe del ginnasio *Tito Livio* dove i condiscepoli, tutti maggiori di età, sono ben presto affascinati da quel minuscolo compagno, vivace e socievole che, con la stessa spontanea semplicità con cui partecipa alla loro chiassosa spensieratezza, li supera poi tutti nella scuola, per la prontezza del capire e la facilità dell'apprendere. Questa superiorità si palesa addirittura eccezionale, quando il quattordicenne Levi-Civita passa al Liceo. È dall'inizio di quel triennio che si viene manifestando in lui, più decisamente, quell'inclinazione agli studi matematici, che prima era rimasta in qualche modo velata dall'e-

Lettera di Castelnuovo a Somigliana (31 gennaio '46)

Per il Volterra ho seguito il tuo consiglio ed ho subito scritto al Tonelli nella speranza che accetti. Ma ora devo pensare al Levi Civita e la tua lettera mi fa venire una idea. Poiché stai preparando una breve commemorazione di lui per l'Istituto lombardo[a] non ne potresti fare una più estesa per i Lincei? Saresti la persona più indicata e più autorevole. D'altra parte l'Amaldi deve sempre leggere la sua commemorazione all'Acc. pontificia, e bisognerebbe ricorrere a un socio corrispondente per trovare persona che conoscesse bene tutta la produzione dell'amico Tullio.

Ti avverto a questo proposito che la vedova ha regalato all'Accademia dei Lincei tutta la biblioteca del marito, ed un ritratto ad olio di lui. Dedicheremo a Levi-Civita una sala al primo piano del Palazzo Corsini, unita con la biblioteca accademica. La commemorazione si potrebbe leggere inaugurando la sala a maggio o giugno[b]. Pensaci e fa il possibile per accettare, in modo che l'indimenticabile amico sia degnamente commemorato.

a. C. Somigliana, "Tullio Levi-Civita e Vito Volterra", *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, (17) 1946, pp. 1-15. Alla commerazione fa seguito l'elenco delle pubblicazioni a cura di A. Masotti (pp. 16-61)

b. La sala fu inaugurata il 16 novembre 1946 e la commemorazione di Amaldi si legge in *Rend. Acc. Lincei*, (8) I 1946, pp. 1130-1146. È riprodotta in T. Levi-Civita, *Opere*, Bologna, Zanichelli, 6 voll. 1954-1973, I, pp. IX-XXX.

clettico fervore d'interessi il quale, anche nel campo delle lingue classiche e più particolarmente della storia, lo portava ad allargare e approfondire la sua cultura ben oltre i limiti dei programmi scolastici.

Nella scoperta matematica è assecondato, con amorevole comprensione, dal suo professore di Matematica – Paolo Gazzaniga, insegnante efficacissimo e valente cultore di Teoria dei numeri – e da uno zio materno, ingegnere a riposo, che ama rinfrescare le sue conoscenze matematiche, rileggendo con quel nipote d'eccezione i vecchi suoi testi universitari. Scrive Ugo Amaldi: "*il Gazzaniga, anche negli ultimi anni della sua vita, rievocando la sorprendente precocità di quel suo discepolo, amava ricordarne un tentativo di dimostrazione del postulato delle parallele, che correva, elegante e ineccepibile, sino ad una inavvertita ammissione finale, in cui si annidava la petizione di principio. A quindici anni, nella delusione di quell'insuccesso, il Levi-Civita non poteva certo immaginare che un giorno avrebbe legato per sempre il suo nome ad una estensione, altrettanto geniale quanto feconda, di quel concetto stesso di parallelismo*".

Alla fine del Liceo, Tullio ha chiara e sicura la certezza della sua vocazione. Il padre aveva a lungo accarezzato il sogno di veder continuata la sua opera, ma non si oppone alla libera scelta del figlio che, nel 1890, si iscrive all'Università di Padova per la laurea in Matematica. "*Ma dai corsi propedeutici*" – scrive Amaldi – "*il Levi-Civita, che già se li era da sé anticipati nel triennio liceale, ben poco aveva da apprendere, se non forse una visione sintetica e sistematica di nozioni ormai familiari, talché, fin dai primi contatti coi nuovi Maestri, egli fu tratto a seguirne l'opera viva d'indagine personale e quasi a dividerne lo sforzo e la passione*".

Nel quadro dei *Fondamenti* di Veronese, Levi-Civita – con singolare intuito – fissa l'attenzione su uno dei risultati più originali e più significativi, cioè sulla dimostrazione della possibilità di Geometrie non-archimedee e, quasi intuendo le obiezioni con cui più tardi sarebbe stata contesa a Veronese la legittima priorità di quel risultato [6], si accinge a ricercarne una giustificazione analitica diretta. Inaugura, così, fra il '91 e il '92, la sua produzione scientifica con una Memoria *Sugli infiniti e infinitesimi attuali quali elementi analitici* che ancora oggi appare, piuttosto che il primo saggio di un diciottenne, l'opera matura di un ricercatore provetto. Con quella Memoria, e con le due Note lincee *Sui*

Lettera di Castelnuovo a Levi-Civita (24 agosto 1909)

Caro amico

Ella avrà letto sui giornali la notizia della morte del Prof. Cerruti, non inattesa per noi che lo avevamo visto patire in tristi condizioni, ma non meno dolorosa. È una grande perdita che la nostra Facoltà subisce, e che ora dobbiamo cercare di riparare.

Un nome mi viene spontaneo in mente; ed è il Suo. Ella sarebbe, a mio giudizio, il successore ideale del povero Cerruti; con Lei la nostra Facoltà farebbe un acquisto prezioso. È questa per ora l'espressione del mio pensiero *personale*, né ho potuto sinora scambiare le mie idee con altri colleghi. Vivo il Cerruti, mi era parso irrispettoso discorrere di una eventualità che pur tutti prevedevamo prossima. Ed ora la persona con cui più volentieri avrei parlato della cosa, il Volterra, è agli Stati Uniti d'America, e non ne so nemmeno l'indirizzo. Ma anche prima di parlare coi colleghi, ho voluto di farle conoscere queste mie idee, e sentir da Lei se, ove riuscisse un invito della Facoltà, sarebbe disposto ad accettarlo. Prevedo le Sue esitazioni, e comprendo il dispiacere che avrebbe di lasciar la famiglia e la città ove ha compiuti i Suoi studi e inaugurato la Sua carriera. Pensi però che si tratterebbe di cambiar Padova con Roma, di insegnare ad una scolaresca dove si trovano ogni anno giovani di primissimo ordine che delle Sue lezioni potrebbero far tesoro. E il dispiacere di lasciare gli antichi colleghi, spero sarebbe lenito dalle nuove amicizie che stringerebbe.

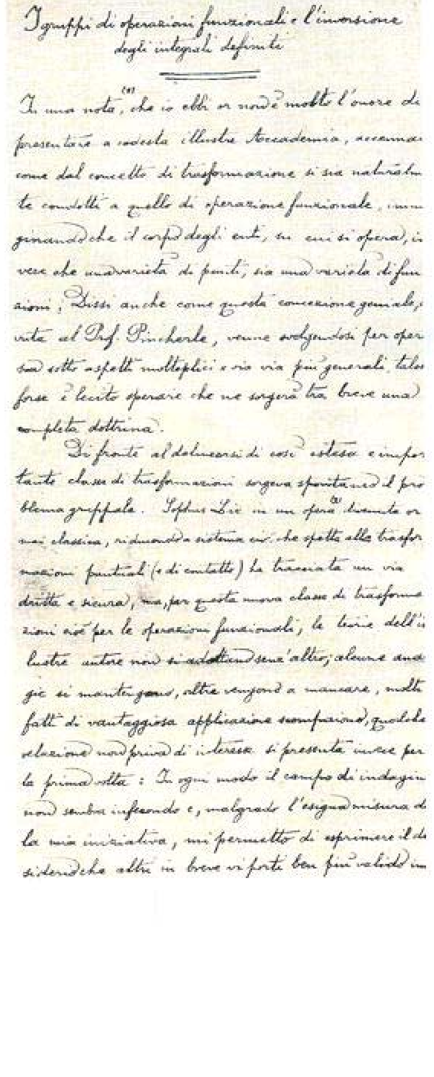
Rifletta con calma al pro e al contro e mi risponda con comodo. Già fino al ritorno di Volterra, che vedremo insieme a Padova, la questione non può far altri passi. E per quell'epoca mi basta sapere che ad una eventuale offerta Ella, per lo meno, non risponderebbe con un reciso rifiuto. Mi lasci sperare che questo, che per ora è un mio sogno, può diventare realtà.

Lettera di Cisotti a Levi-Civita (28 marzo 1935)

Mio Caro e illustre Amico,

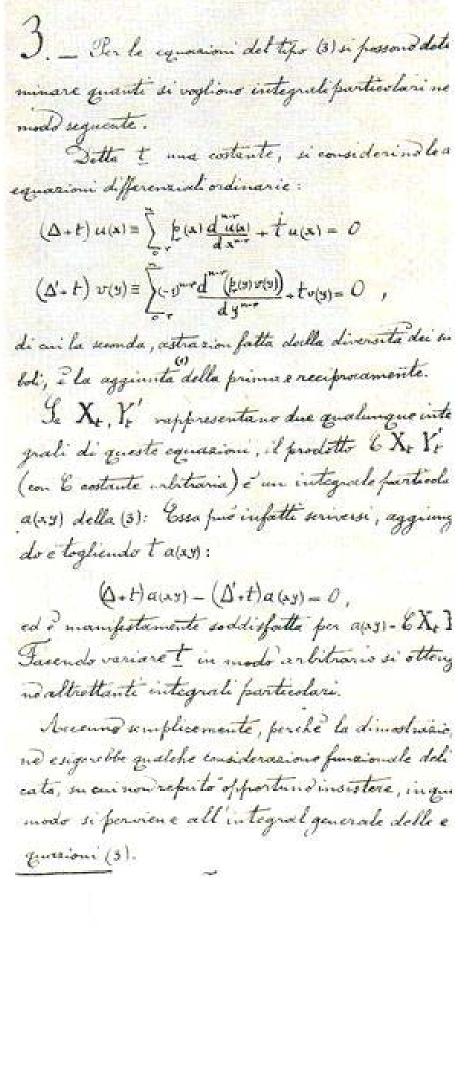
Nel mattino del 29 marzo 1903 mi trovavo nel tuo antico studio di via Altinate, a Padova, e tu pazientemente mi dirigevi la mia tesi di laurea, quando bruscamente la porta si aprì per lasciare passare la caratteristica e tanto simpatica figura di Tuo Padre, col sigaro alla mano; ebbi la ventura di assistere – ospite involontariamente indiscreto – agli affettuosi auguri di tanto Padre a tanto Figlio. Questo episodio, che non si è mai cancellato dalla mia mente, mi è caro rievocare nel presentarti, o meglio, rinnovarti, gli auguri per la lieta ricorrenza; accettali anche in memoria di quel mattino tanto lontano ormai nel tempo.

numeri transfiniti ad essa collegate, Levi-Civita fonda, in largo anticipo dei tempi, quelli che sono ora noti quali *campi di Levi-Civita* [7]. Ha scritto Detlef Laugwitz: "*secondo la terminologia della "modern algebra" sviluppata negli anni '20, Levi-Civita costruisce classi molto interessanti di campi ordinati con la prima Memoria e anelli ordinati e gruppi con le due Note lincee. I suoi contributi sono molto originali, sebbene abbia potuto giovarsi delle idee intuitive di Veronese e di un lavoro di Bettazzi. Volendo dare un fondamento rigoroso alla geometria non archimedea di Veronese, Levi-Civita è andato molto al di là.*"
Segue immediatamente, in tutt'altro indirizzo, la dissertazione di laurea (1894) *Sugli invarianti assoluti*, in cui Levi-Civita, ricollegando le vedute di Ricci alle teorie e ai metodi di Sophus Lie [8] – di cui fin d'allora mostra un pieno e sicuro possesso – studia la forma e le proprietà dei sistemi differenziali atti a definire gli invarianti differenziali e integrali per un qualsiasi sistema di funzioni di qualunque numero di variabili, soggette alla più generale legge mista di covarianza e contravarianza. È l'atto di nascita "ufficiale" della collaborazione di Levi-Civita con il suo Maestro, Gregorio Ricci-Curbastro. Ma del ruolo svolto da Levi-Civita nella diffusione del calcolo tensoriale avremo modo di parlare ancora verso la fine di questa sezione (e nella prossima).
Scrive Amaldi: "*la Laurea fu, più che per lui, una festosa solennità per i suoi Maestri, ormai ben consapevoli delle ascese, cui, nel campo matematico, era predestinato quel discepolo. Sul cammino di ogni giovane scienziato, la Laurea, come passaggio dalla vigilata attività scolastica alla libera estrinsecazione delle iniziative personali, segna per lo più l'inizio di un periodo tormentoso di ricerca dell'orientamento; e, in qualche modo, anche il Levi-Civita dovette risentire quell'intimo travaglio, ma non per questo rallentò la sua attività*". In questo contesto, va inserita la Nota *Di una espressione analitica atta a rappresentare il numero dei numeri primi in un determinato intervallo*, una ricerca di Teoria dei numeri che probabilmente risente dell'influenza di Gazzaniga [9] e con la quale perviene a una espressione (sotto forma di residuo) del numero dei numeri primi compresi in un dato intervallo.
Appena laureato, durante l'anno accademico 1894-95, Levi-Civita si trasferisce per alcuni mesi a Bologna. Risale a questo periodo bolognese la sua amicizia con Enriques, ben documentata nelle lettere che il matematico livornese scambia con Guido Castelnuovo [10]. Il 27 novembre gli scrive: "*Il Levi-Civita è un giovane d'ingegno e molto studioso, anche simpatico personalmente: è per me un piacere di poter fare conversazione matematica con lui sebbene raramente di argomenti geometrici*". E ancora il 29 novembre: "*Il L[evi]-C[ivita] trovasi a Bol[ogna] per proprio conto venuto a perfezionarsi in analisi presso il Pincherle*".
Risale a questo periodo anche un gruppo di lavori nei quali Levi-Civita estende alle operazioni funzionali rappresentate da integrali definiti, ampiamente studiate da Pincherle [11], le vedute grippali sviluppate da Lie per le trasformazioni puntuali. Il passaggio da queste alle operazioni funzionali – la nuova classe di trasformazioni che opera su una varietà di funzioni piuttosto che una varietà di punti – richiede un adattamento perché alcune analogie si mantengono ma altre vengono a mancare e, a fronte della scomparsa di "*molti fatti di vantaggiosa applicazione*" si presenta per la prima volta "*qualche relazione non priva di interesse*". In particolare, un principio generale e uniforme per l'inversione degli integrali definiti [12].
Nel 1896 Levi-Civita è all'Università di Pavia, vincitore del concorso a professore interno della *Scuola Normale Superiore* annessa alla Facoltà di Scienze. A Pavia, attraverso Carlo Somigliana [13], stringe i rapporti con Vito Volterra, che quasi lo prende per mano e lo ac-


I gruppi di operazioni funzionali e l'inversione degli integrali definiti

In una nota(1), che io ebbi or non è molto l'onore di presentare a codesta illustre Accademia, accennai come dal concetto di trasformazione si sia naturalmente condotti a quello di operazione funzionale, immaginando che il campo degli enti, su cui si opera, invece che una varietà di punti, sia una varietà di funzioni; dissi anche come questa concezione generale, dovuta al Prof. Pincherle, venne svolgendosi per opera sua sotto aspetti molteplici e via via più generali, talchè forse è lecito sperare che ne sorgerà tra breve una completa dottrina.

Di fronte al delinearsi di così esteso e importante classe di trasformazioni sorgeva spontaneo il problema gruppale. Sophus Lie in un'opera(2) divenuta ormai classica, riducendo a sistema ciò che spetta alle trasformazioni puntuali (e di contatto) ha tracciata una via diritta e sicura; ma, per questa nuova classe di trasformazioni cioè per le operazioni funzionali, le teorie dell'illustre autore non si adattano senz'altro; alcune analogie si mantengono, altre vengono a mancare, molti fatti di vantaggiosa applicazione scompaiono, qualche relazione non priva di interesse si presenta invece per la prima volta: In ogni modo il campo di indagini non sembra infecondo e, malgrado l'esigua misura della mia iniziativa, mi permetto di esprimere il desiderio che altri in breve vi porti ben più valido in


3. — Per le equazioni del tipo (3) si possono determinare quanti si vogliono integrali particolari nel modo seguente.

Detta t una costante, si considerino le equazioni differenziali ordinarie:

$$(\Delta+t)\,u(x)\equiv\sum_{0}^{n}{}_{r}\, p_r(x)\frac{d^{n-r}u(x)}{dx^{n-r}}+t\,u(x)=0$$

$$(\Delta'+t)\,v(y)\equiv\sum_{0}^{n}{}_{r}\,(-1)^{n-r}\frac{d^{n-r}\left(p_r(y)v(y)\right)}{dy^{n-r}}+t\,v(y)=0\,,$$

di cui la seconda, astrazion fatta dalla diversità dei simboli, è la aggiunta(1) della prima e reciprocamente.

Se X_t, Y'_t rappresentano due qualunque integrali di queste equazioni, il prodotto $C X_t Y'_t$ (con C costante arbitraria) è un integrale particolare $a(xy)$ della (3): Essa può infatti scriversi, aggiungendo e togliendo $t\,a(xy)$:

$$(\Delta+t)\,a(xy)-(\Delta'+t)\,a(xy)=0\,,$$

ed è manifestamente soddisfatta per $a(xy)=C X_t$ [illegible]

Facendo variare t in modo arbitrario si ottengono altrettanti integrali particolari.

Accenno semplicemente, perchè la dimostrazione esigerebbe qualche considerazione funzionale delicata, su cui non reputo opportuno insistere, in qual modo si perviene all'integral generale delle equazioni (3).

Due giovani a confronto. Lettera di Federigo Enriques a Tullio Levi-Civita (18 dicembre 1895) [a]

È giusto il rimprovero che mi fai relativamente alla mancanza di pazienza; ma questo non è tanto un difetto della volontà quanto la mancanza dello sviluppo intellettuale in un dato senso; perciò ritengo di non poter riuscire a correggere il difetto (almeno in parte) se non coll'applicarmi a poco a poco sempre più a questioni analitiche che esigono l'allontanamento della mente dalle abitudini predilette. È l'esperienza che, come vedi, sto tentando, sebbene senza eccessiva fiducia.

Giacché troppo facilmente mi sentirò riattratto nel campo di quegli studi dove mi occorre minore sforzo per ottenere coltura, e dove posso fare qualcosa soltanto pensando nel modo che mi è più confaciente.

Ma come ti ho detto ritengo dannoso questo sistema e tutte le mie teorie pedagogiche lo condannano.

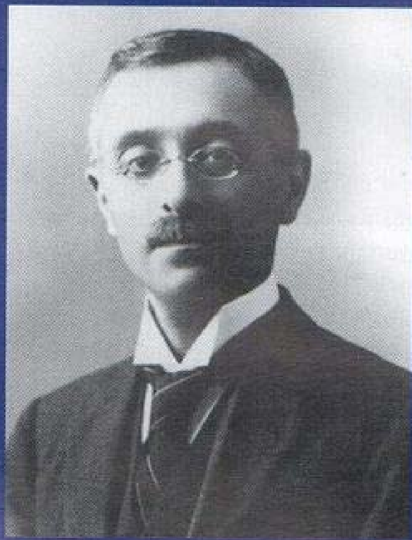
Il principio generale è applicabile come al caso mio anche al tuo. Io non ho certo in orrore quell'analisi formale di cui mi parli, anzi la ritengo un aiuto efficacissimo quando esso sia combinato all'altra specie di analisi: e soltanto esso riesce a me troppo difficile perché contraria alla mia natura. Darmi a quel genere di ricerche sarebbe pretendere troppo da me stesso; si può cercare di svolgere una propria facoltà, ma bisogna ottenere questo gradualmente forzandosi solo a poco a poco e continuando sempre ad usufruire delle proprie facoltà più svolte; per questo scelgo un terreno intermedio.

Lo stesso potrei consigliare a te. Non ti distogliere dall'analisi formale, ma cerca di applicarla ai campi fecondati dai principi generali della teoria delle funzioni. Lo sforzo che dovrai fare sarà minore per te che per me; giacché hai dato già prova di riuscire. La tua nota sulla questione dei numeri primi è un bell'esempio: forse è il migliore dei tuoi lavori. Supposto che nell'avvenire tu debba tornare definitivamente alle questioni d'analisi che nascono dalla fisica matematica (sono d'altronde fra le questioni più importanti della matematica) credo che otterrai un vantaggio quanto più potrai allontanare questo momento. Forse anche ne risulterà per tutta la tua vita scientifica una conveniente fusione dei metodi matematici.

In appoggio delle mie tesi potrei citarti l'esempio del Volterra che ha dedicato i primi anni a questioni generali d'analisi e solo da poco è passato quasi esclusivamente nel campo annesso alla fisica-matematica.

a. Le lettere di Enriques a Levi-Civita del periodo bolognese sono pubblicate in *Federigo Enriques: Matematiche e Filosofia. Lettere inedite, Bibliografia degli scritti* (a cura di O. Pompeo Faracovi, L.M. Scarantino), Livorno, Belforte, 2001, pp. 87-117.

Federigo Enriques



Tullio Levi-Civita

compagna per un buon tratto di una carriera che si annuncia strepitosa [14]. Di Levi-Civita, Volterra presenta all'*Accademia delle Scienze* di Torino la Nota *Sugli integrali algebrici delle equazioni dinamiche*, inizialmente destinata ai *Rendiconti* di Palermo. Il suo apprezzamento è un messaggio così gratificante da indurre l'ancora timido Levi-Civita (ha solo ventitre anni!) ad anticipare la pubblicazione di uno dei suoi migliori e più noti risultati nel campo della Meccanica analitica, la Memoria *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche* che, per l'importanza dei risultati e l'originalità dei procedimenti, non meno che per la suscettibilità di ulteriori sviluppi, è rimasta classica.

Torneremo ancora su questa Memoria con la quale, di fatto, nel novembre 1897, Levi-Civita vincerà la cattedra universitaria. Conviene ora accennare ad un piccolo equivoco sorto durante la sua stesura tra Ricci e Levi-Civita (che si trovava a Pavia). Nel 1894, erano usciti due lavori indipendenti sullo stesso argomento: uno di Ricci, *Sulla teoria*

Il giovane Levi-Civita a Volterra (1 maggio 1896)

Il Prof. Somigliana mi ha fatto partecipe della Sua gentile offerta di presentare all'Accademia di Torino la mia nota, qualora vi sia sovrabbondanza di materia pei Rendiconti del Circolo Matematico. Io accetto di gran cuore la proposta, che non avrei avuto il coraggio di avanzare, per l'ospitalità già concessami dagli Atti dell'Accademia.
A proposito di questa nota, è ben giusta la Sua osservazione che conviene a §4 aggiungere esplicitamente trattarsi di forze indipendenti dalle velocità: Non mancherò di tenerne conto correggendo le bozze. Grazie ancora una volta e sempre della Sua costante benevolenza. (...)
Ho terminato oggi il mio lavoro sulla trasformazione delle equazioni dinamiche, cioè quella parte di esso, che si riferisce al caso, in cui non agiscono forze e che mi propongo di pubblicare da sè, tanto più che sarà forse il solo caso in cui riesca di raggiungere un risultato definitivo. Io ho potuto infatti stabilire le forme canoniche, di cui sono suscettibili due sistemi di equazioni dinamiche aventi le medesime traiettorie, cioè trasformabili l'uno nell'altro, e di più quanti integrali quadratici indipendenti competono a ciascuna forma canonica. Per mezzo di questa riduzione a tipi, la questione di determinare, per un assegnato sistema di equazioni dinamiche prive di forze, tutti quelli ammettenti le medesime traiettorie, può riguardarsi risoluta, nel senso che si trova ricondotta a difficoltà, per così dire, d'ordine inferiore, cioè attinenti alla teoria delle forme differenziali quadratiche.
Accolga con pazienza questa mia cicalata e vegga di conservarmi il Suo prezioso interessamento.

Vito Volterra

delle linee geodetiche e dei sistemi isotermi di Liouville, pubblicato negli *Atti dell'Istituto Veneto*, e uno di Gabriel Königs [15], *Mémoire sur les lignes géodésiques*, pubblicato nelle *Mémoires des Savants Étrangères* dell'Accademia di Parigi. I due avevano già avuto, poco prima, un secco botta e risposta sui rispettivi metodi [16]. È possibile che Levi-Civita, il quale da un altra Nota di Königs aveva preso spunto per la sua ricerca *Sugli integrali algebrici delle equazioni dinamiche*, avesse citato entrambi i lavori nel manoscritto della Memoria *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche* inviato a Ricci per averne un parere. Ricci allora gli scrive (3 luglio 1896) per sottolineare la pertinenza dei suoi scritti – e non di quelli di Königs – con gli argomenti trattati. Non conosciamo la risposta di Levi-Civita, ma non deve essere apparsa tranquillizzante se Ricci è costretto a ripetere il suo parere nella successiva lettera del 7 luglio. A questo punto, Levi-Civita esprime a Ricci l'adesione al suo punto di vista e questi così gli risponde, quasi meravigliandosi delle scuse offertegli da Levi-Civita (lettera del 9 luglio 1896): "*mi dispiace che Ella trovi necessario di fare delle scuse per un equivoco molto spiegabile. Sono invece ben contento che Ella veda ormai le cose come le vedo io e La ringrazio della Nota, che Ella intende inserire nella sua Memoria.*" Tutto questo spiega il complesso *tour* lessicale usato da Levi-Civita nella Memoria in cui, dopo aver affermato nel testo che per $n = 2$ il problema era "*stato risoluto completamente dal prof. Ricci*", appone la seguente nota a piè di pagina: "*Il prof. Ricci ha infatti stabilito i criteri per riconoscere se un dato elemento lineare binario è riducibile alla forma di Liouville* [17] *e più in particolare per riconoscere se esso ammette* ∞^4, ∞^2, ∞^1, *od anche un solo sistema di Liouville, avendo dimostrato che questi sono i soli casi possibili. Per ciascuno di essi, supposte soddisfatte le volute condizioni, è inoltre indicato in qual modo si possano effettivamente determinare i relativi sistemi di Liouville. La ricerca esige l'integrazione di un sistema completo, quando i sistemi di Liouville sono* ∞^4, ∞^2, *od* ∞^1, *appena quadrature nel caso di un solo sistema. Non parrà strano che io non abbia fatto cenno dell'importante e fondamentale Memoria del signor Koenigs sulle linee geodetiche, quando si pensi che in tutte le sue investigazioni, egli suppone in sostanza l'elemento lineare già ridotto alla forma di Liouville e solo allora ne scruta i caratteri più riposti e ne determina proprietà, per quanto notevoli, estranee pur sempre al problema, che qui ci intrattiene*".
Simili gesti di indipendenza, non solo scientifica, non rimarranno isolati. Comunque, ancora ai metodi di Ricci si richiama esplicitamente Levi-Civita in un

I sistemi corrispondenti

Del problema generale della mutua trasformabilità di due sistemi di equazioni dinamiche, posto nel 1892 dal matematico francese Paul Appell, si erano già occupati (senza giungere a conclusioni esaurienti) vari matematici, tra cui anche Paul Painlevé che lo aveva precisato rilevandone la riducibilità alla determinazione di tutti i corrispondenti di un dato sistema dinamico, cioè di tutti quei sistemi che hanno in comune con quello dato le traiettorie (le soluzioni delle equazioni differenziali che rappresentano l'evoluzione del sistema).

Levi-Civita, partendo dalla definizione stessa di sistemi corrispondenti, si mette nell'ipotesi di assenza di forze applicate e riconduce il problema a quello delle mutue rappresentazioni geodetiche delle varietà riemanniane (a un qualsiasi numero di dimensioni) e della loro conservazione. Levi-Civita non ha così difficoltà a riconoscere nel Calcolo differenziale assoluto la tecnica specifica per aggredire il problema.

Per comprendere la via seguita da Levi-Civita, si tratta di studiare la trasformabilità delle equazioni dinamiche associate a due sistemi olonomi con gli stessi gradi di libertà, le cui coordinate lagrangiane sono rispettivamente x_i e y_i (i = 1, 2, ..., n) e su cui agiscono due sistemi di forze X_i e Y_i:

$$(A) \qquad \frac{d\frac{\partial T}{\partial x'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = X_i \qquad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n$$

$$(B) \qquad \frac{d\frac{\partial T_1}{\partial y'_i}}{dt_1} - \frac{\partial T}{\partial y_i} = Y_i \qquad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n$$

con $T = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n} a_{rs}\, x'_r\, x'_s,\ T_1 = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n} b_{rs}\, y'_r\, y'_s$ che

esprimono le energie cinetiche dei due sistemi.

Ebbene – si domanda Levi-Civita – sotto quali condizioni esiste e si può assegnare una trasformazione del tipo:

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots x_n), \qquad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n$$

$$dt_1 = \frac{dt}{\mu(x_1, x_2, \dots x_n)}, \qquad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n$$

atta a trasformare il sistema (A) nel sistema (B) se vale una delle due seguenti ipotesi:

1) le forze X_i e Y_i sono date;

2) sono date solo le forze X_i mentre le forze Y_i si possono assegnare a piacere.

Come aveva già osservato Appell[a], la questione 2) è sempre risolubile qualora le forze y_i si possano far dipendere anche dalle velocità. Qualche anno dopo, Painlevé[b] aveva studiato il problema anche nel caso che le forze non dipendano dalle velocità, richiedendo semplicemente che le traiettorie del sistema (B) possano ricondursi a quelle del sistema (A); ovvero, che sia possibile far coincidere gli n-1 integrali di (B) indipendenti da t_1, mediante una trasformazione del tipo $y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots x_n)$, con gli n-1 integrali di (A) indipendenti da t. In tal caso i due sistemi di equazioni si dicono, nella terminologia di Painlevé, "corrispondenti".

Così anche grazie ai contributi di Appell, Liouville e dello stesso Painlevé, Levi-Civita può enunciare una serie di risultati relativi alla trasformabilità delle equazioni dinamiche:

1) se un sistema (A) ammette un sistema corrispondente A_1 "non ordinario", cioè non di un tipo che si individua facilmente, entrambi posseggono un integrale primo quadratico;
2) se le forze nel sistema (A) sono nulle, lo stesso deve accadere per ogni suo sistema corrispondente (A_1);
3) due sistemi (A) e (A_1), entrambi aventi forze nulle e che definiscono le stesse geodetiche, ammettono gli stessi n integrali quadratici che possono essere coincidenti e addirittura ridursi al solo integrale delle forze vive (Teorema di Liouville[c]).
4) La trasformazione che consente di ricondurre il sistema (A) al suo corrispondente (A_1) è del tipo:

$$dt_1 = \frac{dt}{\mu(x_1, x_2, \dots x_n)}$$

se non agiscono forze e, più in generale, del tipo:

$$dt_1^2 = \frac{dt^2}{\mu^2}\left\{1 - \sum_{r,s=1}^{n} c_{rs}\, x'_r\, x'_s\right\}$$

(con μ e C_{rs} funzioni delle variabili x) negli altri casi.

altro celebre articolo sui potenziali binari [18]. Dei potenziali "*che si possono far dipendere da due sole coordinate*" si era occupato lo stesso Volterra [19], il quale – a giudizio di Levi-Civita – ne aveva stabilito "*i più salienti caratteri*" e ne aveva indicato anche numerose applicazioni alla Fisica matematica. Nella sua Memoria, Volterra (impiegando una procedura usuale per l'epoca) introduceva per questi tipi di potenziale delle funzioni che facevano le veci della funzione di Green per il potenziale ordinario e mediante le quali era possibile risolvere diversi problemi di Elettrostatica, Idrodinamica e Magnetismo. Come scrive Levi-Civita, "*rimane tuttavia una questione preliminare da risolvere,* Nonostante queste "notevoli proposizioni", il problema generale – di determinare per un dato sistema (A) tutti i sistemi a esso corrispondenti – restava una questione aperta. Lo stesso Levi-Civita affronta solo una parte della questione.

"Ho dovuto limitarmi nella presente Memoria – si legge nell'Introduzione – a considerare il caso, in cui non agiscono forze, cioè, in linguaggio geometrico, il problema della conservazione delle geodetiche". Per il principio di inerzia, se non agiscono forze esterne, un punto si muove sempre secondo una linea geodetica nello spazio delle configurazioni, il cui elemento lineare è dato da $ds = dt\sqrt{2T}$. Dunque, in linguaggio geometrico (anziché meccanico), Levi-Civita affronta e risolve il seguente problema: "data una varietà φ, il cui elemento lineare sia $ds = dt\sqrt{2T}$, determinare tutte le varietà Φ rappresentabili (almeno in una certa regione) univocamente su φ, in modo che ad ogni geodetica di Φ corrisponda una geodetica di φ". Per $n = 2$ il problema (usualmente noto come "rappresentazione geodetica") era stato proposto per la prima volta da E. Beltrami e risolto da Dini[d].

Lo spazio delle configurazioni è in generale una varietà riemanniana n-dimensionale e costituisce pertanto l'ambiente in cui i metodi del Calcolo differenziale assoluto si applicano in modo naturale e con grande efficacia. In effetti, gli strumenti tensoriali invocati da Levi-Civita si mostrano indispensabili per la risoluzione del problema. Dopo aver dato in forma tensoriale le relazioni tra gli elementi lineari associati a due sistemi corrispondenti, Levi-Civita fa uso della derivazione covariante introdotta da Ricci per determinare l'integrale primo di un sistema una volta che sia noto l'integrale primo del suo corrispondente. Per ottenerlo, impiega il risultato di un suo lavoro sulla determinazione degli integrali primi di un sistema di equazioni, pubblicato pochi mesi prima e ricavato impiegando ancora una volta il Calcolo differenziale assoluto[e].

Inoltre, introducendo un particolare sistema di riferimento ortogonale (per la cui determinazione Levi-Civita richiama un lavoro di Ricci sulla teoria delle congruenze sulle varietà),[f] è possibile ridurre gli elementi lineari dei due sistemi corrispondenti a una forma molto particolare, che Levi-Civita chiama *canonica*; viceversa, se due elementi lineari sono simultaneamente riducibili alla forma canonica, allora i sistemi a loro associati sono corrispondenti. Dunque, grazie ai metodi di Ricci è possibile, "attribuire alle mie equazioni un aspetto molto più semplice e sotto cui l'interpretazione geometrica si presenta spontanea. (...) il successo del metodo da me adottato si deve a questa interpretazione".

"Così – commenta Amaldi – *ad opera del Levi-Civita il Calcolo differenziale assoluto, che sino allora il Ricci, fors'anche contrastato dall'incomprensione dei matematici di quel tempo, aveva cimentato quasi esclusivamente entro i confini tradizionali della Geometria differenziale metrica, era per la prima volta portato a mostrare la sua potenza nella trattazione di un problema nuovo ed elevato, di fronte al quale sarebbero riusciti vani mezzi d'indagine meno penetranti*".

a. P. Appell, *Sur des transformations de mouvements, Journal für die reine und angewandte Mathematik* 110 (1892), pp. 37-41.

b. P. Painlevé, Mémoire sur la transformation des équations de la Dynamique, *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (4) 10 (1894), pp. 5-92.

c. R. Liouville, Sur les équations de la dynamique, *Acta Mathematica* 19 (1895), pp. 251-283.

d. E. Beltrami, Risoluzione del problema: "riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette", in *Opere matematiche* (4 voll., 1902-1920, Milano, Hoepli) I, pp. 262-280; U. Dini, Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un'altra, *Annali di Matematica* (2) 3 (1869-70), pp. 269-293.

e. T. Levi-Civita, Sugli integrali algebrici delle equazioni dinamiche, *Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino* 21 (1896), pp. 816-823; in *Opere* I, pp. 199-205.

f. G. Ricci-Curbastro, Sulla teoria degli iperspazi, *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei* (5) 4 (1895), pp. 232-237; in *Opere* I, pp. 431-437.

assegnare cioè i vari tipi dei potenziali in discorso". Ed era "*tale compito*" che egli si prefiggeva.

Nel suo lavoro, Levi-Civita intreccia magistralmente la teoria dei gruppi di trasformazioni infinitesime con argomenti di teoria del potenziale, Geometria differenziale e Calcolo tensoriale, in contrasto con l'approccio puramente analitico di Volterra. Uno dei punti di partenza per la ricerca di Levi-Civita è la *Commentatio Mathematica* di Riemann [20], pubblicata postuma nei *Werke* [21] e redatta dal matematico tedesco nel 1861 con lo scopo di risolvere un problema, proposto dall'*Accademia delle Scienze* di Parigi, in merito alla propagazione del calore in un corpo. In que-

Ricci Curbastro a Levi-Civita (lettera del 3 luglio 1896)

Mi pare che la redazione da lei proposta per la Nota da inserirsi nella di Lei Memoria non corrisponda del tutto allo stato vero delle cose. Per mettere in evidenza più facilmente i punti, che, secondo me dovrebbero essere modificati, sarà forse opportuno che io le esponga addirittura come intendo io le cose avvertendo che, mentre sono sicuro di tutto ciò, che mi riguarda, potrei incorrere in qualche equivoco per ciò, che riguarda il lavoro del Königs, tanto più che non ho vista la memoria estesa che egli ha dedicato a questa teoria.
Nella mia Memoria, per dir tutto in breve, io ho dato i criterii per riconoscere se un dato elemento lineare è riducibile alla forma di Liouville; e più in particolare per riconoscere se esso ammette ∞^4, ∞^2, ∞^1 od anche uno solo sistema di Liouville, avendo dimostrato anche che questi sono i soli casi possibili. In ogni caso poi ho indicato il sistema completo, che si dovrebbe integrare per determinare effettivamente tutti i sistemi di Liouville di cui l'elemento lineare è dotato; soltanto nel caso che questi si riducano ad uno solo, esso risulta determinato, e i suoi parametri, come per un sistema ortogonale ed isotermo qualunque, si ottengono con semplici quadrature. Non mi pare quindi esatto il dire che conviene ricorrere ai metodi di Königs per determinare effettivamente i sistemi di Liouville, di cui un certo elemento lineare è dotato. – A ciò si prestano in vece direttamente i miei metodi. Il Königs in vece prende sì il

$$ds^2 = \lambda dxdy$$

ma suppone

$$\lambda = f(x+y) - g(x-y)$$

il che ponendo

$$(x+y) = 2u, (x-y) = u - iv$$

equivale a supporre già ridotto l'elemento lineare alla forma di Liouville, e stabilisce quali debbano essere la f e la g perché la equazione delle geodetiche ammetta 5, 3 o 2 integrali quadratici indipendenti; che è quanto dire ∞^4, ∞^2 ovvero ∞^1 sistemi isotermi di Liouville.
Mi pare quindi che pel problema da Lei trattato dell'equivalenza dei problemi di Dinamica abbiano esclusiva applicazione i miei risultati e non quelli del Liouville [recte: Königs]: a meno ripeto, che la Memoria più estesa non contenga risultati neppure accennati nel riassunto. Forse l'equivoco in Lei è nato dal non essermi io con Lei spiegato chiaramente quando ci siamo visti l'ultima [volta]; e dall'avere io, principalmente insistito sul caso di un solo sistema isotermo di Liouville, perché questo mi apparteneva esclusivamente. Sta in fatto però che io ho trattato e risolto il problema nel caso generale, e se negli altri casi esso non è ridotto alle quadrature la colpa non è mia, ma dipende dal numero delle costanti arbitrarie contenute in quei casi nella soluzione generale.– Non so poi neanche rendermi ragione di ciò che Ella asserisce in ultimo e cioè che la «la determinazione dei sistemi di Liouville esige in ogni caso soltanto quadrature». Ora spero di essermi spiegato bene; ma Ella poi si regoli, come crede meglio e, se Le pare più semplice, abbandoni anche affatto la Nota e lasci al Lettore il rendersi ben conto della cosa, se gli interessa.

sta Memoria, Riemann aveva introdotto per la prima volta quello che oggi si chiama *tensore di curvatura di una varietà riemanniana*.
Poiché i potenziali che risultano indipendenti da una variabile sono quelli che ammettono trasformazioni infinitesime in sé, Levi-Civita analizza le trasformazioni infinitesime dell'equazione di Laplace (in tre variabili) e prova che sono tutte e sole quelle del gruppo delle similitudini. Ciò gli consente di introdurre la classificazione dei potenziali binari reali in cinque categorie (in relazione alle loro curve equipotenziali). Tre di loro – quelli cilindrici o logaritmici, quelli circolari o simmetrici e i potenziali conici – sono "*ben noti*"; i potenziali elicoidali (dipendenti da un parametro) sono stati considerati da Riemann nella *Commentatio*, mentre i potenziali spirali (dipendenti da un parametro) sono effettivamente "*nuovi*", non essendo ancora comparsi nella letteratura matematica. Resta da assodare se altri tipi sfuggano alla enumerazione così ottenuta ed è qui che Levi-Civita fa intervenire, con piena aderenza concettuale al problema e con innegabile eleganza, i metodi del Calcolo differenziale assoluto (che analizzeremo con maggiori dettagli nella prossima sezione). Per dimostrare che quelli considerati esauriscono effettivamente tutti i possibili tipi di potenziali binari, Levi-Civita conduce una sottile analisi facendo "*appello ai metodi del prof. Ricci, che con mirabile agilità si adattano a questioni svariatissime, mettendone ognora a nudo l'intima natura e sfrondandole da ogni difficoltà inessenziale*". In particolare, Levi-Civita compie una digressione nel campo della Geometria e impiega i sistemi di congruenze che Ricci aveva esteso a varietà qualunque, [22] adattandoli al caso particolare di tre dimensioni. Introduce così un tipo di congruenze particolarmente adatto a studiare il suo problema, le congruenze rettilinee isotrope già definite da Luigi Bianchi [23] nelle sue *Lezioni* [24]. Associata così ad ogni potenziale binario la rispettiva congruenza di curve equipotenziali e approfondita adeguatamente la geometria intrinseca delle congruenze di curve, Levi-Civita ne trae la conclusione che i soli potenziali binari non trasformati in sé da un

Ricci Curbastro a Levi-Civita (lettera del 7 luglio 1896)

Debbo io ringraziare Lei del tempo, che Ella dedica ad una questione, la quale interessa principalmente me solo; e pregarla di prestare ancora attenzione alle riflessioni seguenti: Integrata la equazione differenziale ordinaria $\sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s$ e ridotto così il ds^2 alla forma $\mu_1 (x_1 y_1) dx_1 dy_1$ dipende dalla scelta dei parametri x_1 ed y_1 il fatto che la μ_1 contenga certi piuttosto che altri fattori $F_1(x_1)$, $F_2(x_1)$.
Questi fattori non si separano quindi di per sé stessi dalle e per applicare nel modo da Lei espostomi il metodo del Königs bisogna prima di tutto risolvere per la il problema di riconoscere se con un opportuno cambiamento di variabili si può ottenere

1) $\psi_1(x_1 y_1) dx_1 dy_1 \equiv \varphi(x_1 y_1)\psi(x_1 y_1)\{f(x+y) + g(x-y)\}dxdy$.

È questo il problema fondamentale, che il Königs non ha risolto, e che ho risolto io implicitamente, poiché esso equivale all'altro di riconoscere se un ds^2 può ridursi alla forma $(U-V)(du^2+dv^2)$. Basta applicare i miei risultati generali al caso in cui il ds^2 sia espresso in coordinate di lunghezza nulla per avere la risoluzione del problema in questo caso.
A primo aspetto il problema posto sotto la forma (1) pare più semplice, ma in realtà esso deve offrire le stesse difficoltà del problema equivalente in coordinate generali; e la sua soluzione deve poi certamente condurre ancora, quando si tratti della effettiva riduzione del primo membro della (1) alla forma supposta nel 2°, alla necessità di integrare tali sistemi completi, che i loro sistemi integrali generali contengano quel certo numero di costanti arbitrarie che, secondo i casi, è determinato dalla natura della forma differenziale.
Se, come mi pare, così stanno le cose, mi pare anche ne risulti che il Königs alla risoluzione del problema, che riguarda la effettiva riduzione, se possibile, di un dato alla forma di Liouville, non ha contribuito in alcun modo. E se così stanno le cose Ella troverà giusto di lasciare tutto a me questo qualunque merito come a Lui è toccato tutto il premio e quel, che più monta, l'onore, che ad esso va unito. Con tutto ciò io non intendo affatto di dettarle le parole da sostituire a quelle del suo manoscritto che riguardano questo punto; tanto più che non vorrei esporla a sostenere poi una polemica in mia difesa col Sig.r Königs.– Questo genere di polemiche non alletta punto me, se non altro per la perdita di tempo, che portano seco; e non vorrei quindi che Ella ne dovesse subire una per mia causa.
Se quanto Le ho fatto presente La persuade, si regoli poi Ella come meglio crede.

gruppo ∞^1 di similitudini sono quelli che ammettono come congruenza equipotenziale una qualsiasi congruenza rettilinea di Ribaucour [25]. Un'analisi più accurata dei diversi tipi di potenziale consente a Levi-Civita di provare che "*i potenziali binari sono isotropi, simmetrici, elicoidali o spirali*" e che i potenziali isotropi equivalgono ai logaritmici, mentre i potenziali spirali non sono riconducibili a nessun altro tipo di potenziale già noto.
Il calcolo tensoriale non è indispensabile per studiare la teoria delle congruenze su una superficie. Si giunge agli stessi risultati – come fa notare lo stesso Levi-Civita – anche mediante gli strumenti classici della teoria delle superfici, esposti nelle citate *Lezioni* di Bianchi. Tuttavia, il Calcolo tensoriale funge da lente di ingrandimento e permette di individuare quelle proprietà essenziali che andrebbero altrimenti perse impiegando il pesante formalismo con cui usualmente si studiava la teoria delle superfici.
La Memoria sui potenziali binari viene presentata all'*Accademia di Torino* da Corrado Segre [26] e Vito Volterra. La corrispondenza permette di apprezzare ulteriormente l'interesse che questi ha mostrato verso la ricerca di Levi-Civita. Alla sua lettera del 19 dicembre 1898: "*mi permetterò quanto prima di incomodarla, inviandole il manoscritto del mio lavoro sui* potenziali", risponde già il 23 dicembre dichiarandosi "*molto lieto di ricevere la Sua interessante Memoria*". Levi-Civita ci lavorerà durante le vacanze natalizie e il successivo 9 gennaio potrà mandare il manoscritto a Volterra, il quale già il 29 dello stesso mese gli comunica comunque l'accettazione da parte dell'Accademia e il suo lusinghiero giudizio: "*avendo avuto occasione di leggere i varii capitoli del Suo lavoro, esso mi è piaciuto sempre di più, e mi congratulo vivamente con Lei sia dei bei risultati ottenuti, sia dei metodi*

Paolo Gazzaniga (1853-1930) professore di Matematica di Tullio Levi-Civita al Liceo "Tito Livio" *elegantissimi e fecondi di cui si è valso"*. Immediata (del 30 gennaio!) la risposta di Levi-Civita, che nel frattempo si è accorto di essere incorso in un errore banale: *"Ella ricorderà probabilmente come, trovate le equazioni intrinseche delle congruenze equipotenziali, per stabilire le condizioni di integrabilità, conviene considerare a parte il caso delle congruenze rettilinee.*

Le equazioni sono in questo caso ben semplici ed io me la sbrigavo prestissimo: Trovavo che c'era la condizione di integrabilità , donde tosto si concludeva che tali congruenze sono necessariamente comprese nel gruppo delle similitudini.

La cosa par tanto naturale, quando si pensa che tale proprietà ha luogo nel caso generale delle congruenze non rettilinee, che non verrebbe certo in mente, io credo, di porre in discussione il risultato. Eppure esso non sta e dipende unicamente da un errore di calcolo (lo scambio di un 2 per un 4), che mi faceva trovare la condizione , mentre il sistema è di per sè completo e caratterizza una classe di congruenze rettilinee ben più ampia delle rette parallele o concorrenti, cioè le congruenze isotrope (di Ribaucour).

Non ho ancora avuto il tempo di studiare da vicino i corrispondenti potenziali binari e mi riservo, se l'Accademia vorrà consentirmelo di dedicare ad essi un secondo lavoro.

Quanto all'attuale, mi permetterò nelle bozze un lieve ritocco all'introduzione, per renderla conforme al vero stato delle cose; naturalmente sopprimerò a §7 la equazione , avvertendo il lettore che il sistema è completo di per sè e sarà studiato in altra occasione".

Volterra preferisce invece, anche a costo di sospendere la stampa, che Levi-Civita corregga subito la svista e completi la Memoria già presentata (lettera del 1 febbraio 1899). La pronta risposta di Levi-Civita (ancora del giorno dopo!), con cui si dichiara d'accordo con il suggerimento di Volterra, lascia anche intravedere la stretta collaborazione con Ricci: *"avevo pensato anch'io, e se n'era anzi discorso col Prof. Ricci, che questa sarebbe stata teoricamente la soluzione migliore, ma temevo di abusare della Sua pazienza col metterle innanzi nuove brighe e mi ero perciò appigliato a quell'altro partito"*. Basterà solo una settimana a Levi-Civita per correggere la svista e presentare a Volterra (il 7 febbraio 1899) lo schema finale della Memoria.

"Ad opera del Levi-Civita il Calcolo differenziale assoluto, che sino allora il Ricci (...) aveva cimentato quasi esclusivamente entro i confini tradizionali della Geometria differenziale metrica, era per la prima volta portato a mostrare la sua potenza nella trattazione di un problema nuovo" *(Ugo Amaldi)*

Il calcolo tensoriale non è indispensabile per studiare la teoria delle superfici. Ma funge da lente di ingrandimento. Permette di individuare quelle proprietà essenziali che andrebbero perse con pesanti formalismi.

Ci piace allora chiudere questa prima sezione riportando alcuni brani della lettera del 28 novembre 1899 con la quale Levi-Civita, nel ringraziare Volterra per l'appoggio ricevuto nella pubblicazione della Memoria, gli annuncia di aver cominciato – assieme a Ricci – la stesura della famosa Memoria del 1900 sui *Mathematische Annalen*: *"Le sono ben grato dei cortesi apprezzamenti, che si contengono nella di Lei lettera; colgo ancora l'occasione, per quanto un pò tardi, di ringraziare Lei e il Prof. Segre della relazione oltremodo benevola, con cui venne proposta alla Accademia delle Scienze la inserzione tra le Memorie del mio lavoro sui potenziali. (...) Nei mesi di vacanze, tra il soggiorno in montagna e il successivo viaggio [in Germania], mi sono naturalmente occupato assai poco. Nei brevi intervalli, non consacrati al riposo, ho pensato agli integrali periodici delle equazioni lineari a derivate parziali del primo ordine, cercando di estendere al caso generale le considerazioni esposte, per tre variabili, in una notina dei Comptes Rendus. L'estensione, immediata come concetto, esige delicate considerazioni di dettaglio, talchè la redazione di un tale lavoro deve riuscire discretamente penosa. Sono così andato differendola di giorno in giorno, senza decidermi ad abbordarla seriamente. Ora sono impegnato, assieme a Ricci, nel dare l'ultima mano ad un «Bericht» sui metodi di calcolo differenziale assoluto, che il Klein ci ha invitato a preparargli pei Math. Ann. Anche questo genere di occupazione è per me estremamente faticoso. Non vedo l'ora di finire per mettermi a studiare qualche questione concreta"*. ■