ALICE & BOB
la piazza virtuale della matematica

Proprietà della Tavola Pitagorica //

Luca Nicotra
Ingegnere, giornalista

[LUCA NICOTRA]
È ingegnere meccanico e giornalista pubblicista. Ha svolto attività di ricerca in ambito universitario e nell'industria della difesa. Esperto di sistemi computerizzati per la progettazione e produzione meccanica, è autore di circa 60 pubblicazioni tecniche e di oltre 200 articoli in gran parte di divulgazione scientifica. Assieme a Fulvia de Finetti ha ideato e realizzato il sito ufficiale dedicato a Bruno de Finetti e scritto il libro *Bruno de Finetti, un matematico scomodo*. È autore e curatore dei libri *Il drago e la farfalla. Cina: una superpotenza di fronte alle sfide del terzo millennio; La Nuova Cina e l'Italia; Nello specchio dell'altro: riflessi della bellezza tra arte e scienza*. Autore e curatore (con Francesca Campana) del volume *Ingegneria assistita dal computer*, presidente dell'associazione "Arte e Scienza" e accademico onorario dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati.

[Introduzione]

In tutto il Medioevo furono molto diffuse le tavole di moltiplicazione, di cui la tavola impropriamente detta pitagorica è l'esempio più comune.[1] Esse fornivano i prodotti dei numeri interi $(1, 2, 3...)$ sotto forma di tabelle a due entrate. La particolare distribuzione dei numeri nella tavola pitagorica dà luogo a numerose curiose proprietà, alcune delle quali già note,[2] altre invece proposte dallo scrivente in questa nota. Alcune di esse trascendono la qualifica di pure curiosità legate alla tavola pitagorica, rivestendo un significato matematico più generale (per es. il teorema 1 e il corollario 3).

Consideriamo la tavola pitagorica generale P_N costruita, come è noto, disponendo nella prima riga i primi N numeri interi, nella seconda i loro multipli secondo 2, nella terza i multipli secondo 3, e così via fino alla riga N . Di conseguenza anche la prima colonna contiene i primi N numeri interi, la seconda i loro multipli secondo 2, la terza i multipli secondo 3 e così via: il numero intero contenuto nella casella all'incrocio della riga n con la colonna p è dunque np.

Da tale legge di distribuzione dei numeri nella tavola discende la loro simmetria rispetto alla diagonale principale (dalla prima casella in alto a sinistra all'ultima casella in basso a destra), la quale contiene i quadrati dei primi N numeri interi. Inoltre i numeri delle righe e delle colonne della tavola formano progressioni aritmetiche di ragione 1 (prima riga e colonna), di ragione 2 (seconda riga e colonna) di ragione 3 (terza riga e colonna),...

Molte dimostrazioni delle proprietà elencate sono semplici e immediate, altre sono basate sulla proprietà della somma di n termini consecutivi di una progressione aritmetica che è $(a_1 + a_n)n/2$. In particolare, la somma dei primi N numeri interi è $(1 + N)N/2$.

[Proprietà]

Teorema 1 // *Condizione necessaria (ma non sufficiente) perché un numero intero sia quadrato di un altro numero intero è che termini con una delle cifre* $0, 1, 4, 5, 6, 9$. *Ovvero non può essere quadrato di un numero intero un numero terminante con una delle cifre* $2, 3, 7, 8$.

Dimostrazione

Nel sistema decimale un numero intero può porsi nella forma $10d + u$, essendo d il numero delle diecine e u il numero delle unità semplici. Pertanto il suo quadrato è $(10d + u)^2 = 100d^2 + 20du + u^2$. Le unità semplici del numero dato sono quindi le stesse di u^2. Osservando la diagonale principale della tavola pitagorica P_{10}, che contiene i quadrati dei primi 10 numeri interi e quindi anche u^2, si vede che questo deve terminare con delle cifre $0, 1, 4, 5, 6, 9$.

Teorema 2 // *Un numero qualunque della tavola pitagorica* P_N *è la media aritmetica dei due numeri della sua stessa riga o colonna da esso "equidistanti", nonché dei k numeri che lo precedono e lo seguono sulla sua stessa riga o colonna.*

Per esempio (figura 1):

$$(6 + 42)/2 = 24 \quad \text{e} \quad (12 + 36)/2 = 24;$$
$$(6 + 12 + 18 + 30 + 36 + 42)/6 = 144/6 = 24 \quad \text{e} \quad (12 + 16 + 20 + 28 + 32 + 36)/6 = 144/6 = 24.$$

Dimostrazione

Considerato il numero np all'incrocio della riga n con la colonna p, i numeri che lo precedono e seguono di k caselle sulla sua stessa riga sono rispettivamente $n(p - k)$ e $n(p + k)$. La loro somma è $n(p - k) + n(p + k) = 2np$, da cui: $np = [n(p - k) + n(p + k)]/2$. Analogo ragionamento si può ripetere considerando la colonna p.

Sia ora w l'elemento centrale di $2k + 1$ numeri consecutivi della stessa riga o colonna. Per la prima parte dell'asserto, ciascuna delle k coppie di elementi equidistanti da w ha per somma $2w$ e quindi la somma totale di tali coppie è $S_k = 2wk$, da cui: $w = S_k/2k$.

[1] Cfr. L. Nicotra, *La Tavola Pitagorica: un falso storico dimenticato*. In «Alice & Bob» n. 15, novembre-dicembre 2009.

[2] In *Enciclopedia Generale Illustrata*, vol. IV, p. 9, Milano, Rizzoli Larousse, 1969 si trovano i teoremi 1 e, parzialmente accennati per il caso di un quadrato di tre caselle, i teoremi 2,3,4 ed enunciato, senza dimostrazione, il corollario 1. I teoremi 7, 12 e il corollario 3 si trovano accennati da Giuseppe Spinoso a pag. 56 del numero 1-2 anno XII-1963 di ≪La scienza e i giovani≫, Firenze, Le Monnier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	**24**	30	36	42	48	45	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Figura 1

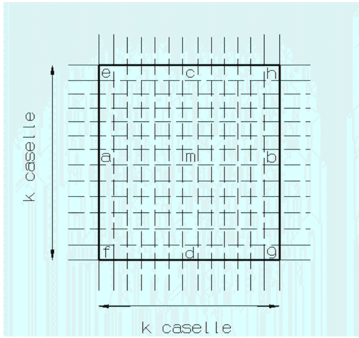
Teorema 3 // *La somma dei numeri situati nei quattro estremi delle mediane o nei quattro vertici di un quadrato di lato k caselle (k dispari) contenuto nella tavola pitagorica P_N è quattro volte il numero della casella centrale.*

Per esempio con riferimento al quadrato evidenziato in figura 2a:

$$12 + 36 + 16 + 32 = 4 \times 24 = 96; \qquad 8 + 24 + 48 + 16 = 4 \times 24 = 96.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	**24**	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

(a)



(b)

Figura 2

Dimostrazione

Considerato un qualunque quadrato di lato k caselle (k dispari) contenuto in P_N (figura 2 b), le coppie di numeri $(a, b), (c, d)$ situati ai quattro estremi delle mediane del quadrato appartengono rispettivamente alla stessa riga e alla stessa colonna dell'elemento centrale m e sono da esso equidistanti. Per il teorema 2 è: $a + b = 2m$, $c + d = 2m$ e quindi $a + b + c + d = 4m$.

Analogamente, le coppie di numeri (e,f) , (h,g) che figurano nei quattro vertici del quadrato appartengono rispettivamente alle medesime colonne di a e di b e sono da essi equidistanti, per cui, ancora in virtù del teorema 2, si ha: $e + f = 2a$, $h + g = 2b$ e quindi, sommando membro a membro e tenendo conto che è $a + b = 2m$, si ha infine: $e + f + h + g = 2(a + b) = 4m$.

Teorema 4 // *La somma S_l dei numeri delle caselle laterali di un quadrato di lato k caselle (k dispari) contenuto nella tavola pitagorica P_N è tante volte il numero m della casella centrale quante sono le caselle laterali. Tenendo presente che queste sono 4(k-1) si ha dunque:*

$$S_l = 4(k - 1)m \tag{1}$$

La (1) si applica anche nel caso in cui il quadrato coincida con l'intera tavola pitagorica ponendo k=N.

Per esempio, con riferimento al quadrato evidenziato in figura 2a:

$$S_l = 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 30 + 36 + 42 + 48 + 40 + 32 + 24 + 16 + 14 + 12 + 10 = 4(5 - 1) \times 24 = 16 \times 24 = 384.$$

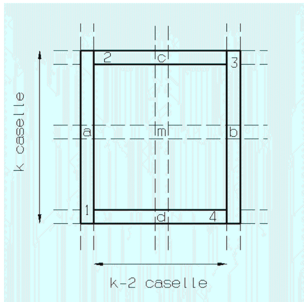


Figura 3

Dimostrazione

In un quadrato di lato k caselle, il numero delle caselle laterali è $4(k-1)$. Per il teorema 2, la somma dei numeri contenuti nei rettangoli $1, 2, 3, 4$ evidenziati in figura 3 sono rispettivamente:

$$(k-1)a + a, \qquad (k-3)c + c, \qquad (k-1)b + b, \qquad (k-3)d + d.$$

Pertanto, sommando e dopo semplici passaggi, è $S_l = (a+b+c+d)k - 2(c+d)$ e quindi, essendo $a + b = c + d = 2m$, è $S_l = 4mk - 4m = 4(k-1)m$.

Teorema 5 // *La somma dei numeri delle caselle laterali della tavola pitagorica P_N è:*

$$S_l = (N-1)(N+1)^2 \tag{2}$$

Per esempio, nella tavola pitagorica P_{10} è $S_l = (10-1)(10+1)^2 = 1089$, risultato che il lettore volenteroso può verificare effettuando la somma dei numeri delle caselle laterali della tavola pitagorica costruita con i primi 10 numeri interi.

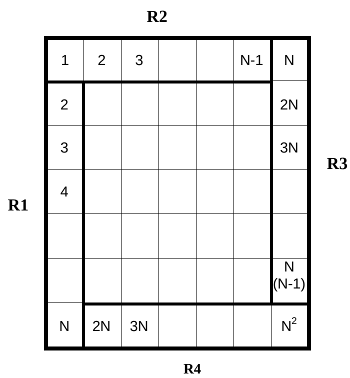


Figura 4

Dimostrazione

Ripartiamo i numeri delle caselle laterali della tavola pitagorica nei rettangoli evidenziati in figura 4. I numeri contenuti in ciascuno di questi sono per (R1): $2, 3, 4, ...N$; per (R2): $1, 2, 3...N-1$; per (R3): $N, 2N, 3N, ...(N-1)N$; per (R4): $2N, 3N, 4N, ...N^2$. Essi costituiscono progressioni aritmetiche di ragione 1 per i rettangoli 1 e 2, di ragione N per i rettangoli 3 e 4. Pertanto, osservando che in ciascun rettangolo sono contenuti $(N-1)$ numeri, le loro somme sono:

$$S_1 = \tfrac{(2+N)(N-1)}{2}, \;\; S_2 = \tfrac{(1+N-1)(N-1)}{2}, S_3 = \tfrac{[N+(N-1)N](N-1)}{2}, \;\; S_4 = \tfrac{(2N+N^2)(N-1)}{2}$$

da cui, sommando membro a membro, dopo semplici passaggi algebrici, si ottiene la (2).

Teorema 6 // *Il numero della casella centrale della tavola pitagorica P_N (N dispari) è il quadrato della media aritmetica fra il primo e l'ultimo numero della prima riga (o colonna) della tavola:*

$$m = \left(\frac{1+N}{2}\right)^2 \tag{3}$$

Per esempio, nella tavola pitagorica P_9, si ha $m = \left(\frac{1+9}{2}\right)^2 = 25$.

Dimostrazione

Nel caso in cui N è dispari, e quindi la tavola pitagorica ha un elemento centrale, applicando entrambi i teoremi 4 e 5, che forniscono la somma dei numeri laterali della tavola, si può scrivere: $4(N-1)m = (N-1)(N+1)^2$ da cui la (3).

Teorema 7 // *La somma dei numeri di un rettangolo di s colonne $\times$ t righe, contenuto nella tavola pitagorica P_N, è il prodotto fra le somme dei numeri d'ordine di quelle colonne e di quelle righe, ovvero è:*

$$S_R = \frac{2p+s-1}{2}s \times \frac{2n+t-1}{2}t \tag{4}$$

essendo p, n i numeri d'ordine, rispetto alla tavola, della prima colonna e della prima riga del rettangolo considerato.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	45	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Figura 5

Questo teorema è in fondo una generalizzazione del metodo operativo della tavola pitagorica: nel caso canonico essa fornisce il prodotto di due numeri interi n, p nella casella all'incrocio fra la riga n e la colonna p; il caso più generale è quello del prodotto fra le somme di più numeri interi consecutivi che si ottiene sommando i numeri delle caselle della tavola corrispondenti ai singoli prodotti parziali fra gli addendi delle due somme, come discende dall'applicazione della proprietà distributiva della moltiplicazione.

Per esempio, nel rettangolo evidenziato in figura 5 si ha:

$$S_R = 8+12+16+10+15+20 = 36+45 = 81 \qquad S_R = (2+3+4)\times(4+5) = 9\times 9 = 81.$$

oppure applicando la (4) essendo s=3, t=2, p=2, n=4:

$$S_R = \frac{2\times 2+3-1}{2}\times 3 \times \frac{2\times 4+2-1}{2}\times 2 = 9\times 9 = 81.$$

Dimostrazione

Le righe del rettangolo contengono i multipli dei numeri $p, p+1, p+2, \ldots\ldots., p+s-1$ rispettivamente secondo $n, n+1, n+2, \ldots\ldots., n+t-1$ (figura 6). Entrambe queste successioni sono progressioni aritmetiche di ragione 1. La somma dei numeri della prima riga del rettangolo è quindi:

$$n[p+(p+1)+(p+2)+\ldots\ldots.. +(p+s-1)] = n\,\frac{(2p+s-1)s}{2}$$

e così via fino alla somma dei numeri dell'ultima riga:

$$(n+t-1) \quad \frac{(2p+s-1)s}{2}$$

Addizionando le somme dei numeri delle t righe così trovate, si ottiene:

$$S_R = \frac{(2p+s-1)s}{2}\,[n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+t-1)]$$

	p	p+1	p+2		p+s-1
n ..	np	n(p+1)	n(p+2)		n(p+s-1)
n+1 ..	(n+1)p	(n+1)(p+1)	(n+1)(p+2)		(n+1)(p+s-1)
n+2 ..	(n+2)p	(n+2)((p+1)	(n+2)(p+2)		(n+2)(p+s-1)
n+t-1 ..	(n+t-1)p	(n+t-1)(p+1)	(n+t-1)(p+2)		(n+t-1)(p+s-1)

Figura 6

e quindi, essendo $n + (n + 1) + (n + 2) + ... + (n + t - 1) = \frac{2n + t - 1}{2} t$, si ottiene infine la (4).

Nel caso di un quadrato, ponendo nella (4) s=t=k, si ottiene in particolare:.

$$S_Q = (2p + k - 1)(2n + k - 1)\left(\frac{k}{2}\right)^2 \tag{5}$$

essendo p, n i numeri d'ordine, rispetto alla tavola pitagorica, della prima colonna e della prima riga del quadrato considerato.

Per esempio, nel caso del quadrato evidenziato nella tavola pitagorica di figura 5, si ha:

$$S_Q = 30 + 35 + 40 + 36 + 42 + 48 + 42 + 49 + 56 = 378$$
$$S_Q = (6 + 7 + 8) \times (5 + 6 + 7) = 21 \times 18 = 378.$$

oppure applicando la (5) essendo k=3, p=6, n=5:

$$S_Q = (2 \times 6 + 3 - 1)(2 \times 5 + 3 - 1)(3/2)^2 = 14 \times 12 \times 9/4 = 378$$

Dal teorema 7 discende il seguente corollario.

Corollario 1 // *La somma S_{P_N} dei numeri della tavola pitagorica P_N è il quadrato della somma dei primi N numeri interi:*

$$S_{P_N} = \left(\frac{1 + N}{2} N\right)^2 \tag{6}$$

Per esempio, la somma dei numeri della tavola pitagorica relativa ai primi 10 numeri interi è

$$S_{P_{10}} = (11 \times 10/2)^2 = 55^2 = 3025.$$

Dimostrazione

La (6) si ottiene ponendo p=n=1, k=N nella (5). Si ricorda, inoltre, che la somma dei primi N numeri interi è $\frac{1+N}{2}N$.
Dalla (6) risulta che la somma dei numeri della tavola pitagorica P_N è sempre un quadrato perfetto, qualunque sia N.

Teorema 8 // *La somma S_Q dei numeri di un quadrato di lato k caselle (k dispari) della tavola pitagorica P_N è tante volte il numero m della casella centrale quanti sono i numeri del quadrato stesso, ovvero il numero m della casella centrale è mediana e media aritmetica dei numeri del quadrato:*

$$S_Q = mk^2 \quad m = \frac{S_Q}{k^2} \tag{7}$$

Il quadrato può ovviamente coincidere con l'intera tavola pitagorica ($k = N$). Se m è un quadrato perfetto lo è anche S_Q: *se il numero della casella centrale del quadrato è un quadrato perfetto, lo è anche la somma dei numeri del quadrato.* Tale proprietà vale quindi per qualunque quadrato della tavola pitagorica avente la casella centrale sulla diagonale della tavola (che contiene i quadrati dei primi N numeri interi).

Per esempio, il numero della casella centrale del quadrato di 3 caselle evidenziato in figura 5 è 42. Pertanto è $S_Q = 9 \times 42 = 378$, che, come precedentemente visto, è effettivamente la somma dei numeri del quadrato.

Dimostrazione

La (5) si può anche scrivere:

$$S_Q = \left(p + \frac{k-1}{2}\right)\left(n + \frac{k-1}{2}\right)k^2 \tag{8}$$

Osservando che, nel caso di k dispari, il numero della casella centrale del quadrato è $m = \left(p + \frac{k-1}{2}\right)\left(n + \frac{k-1}{2}\right)$ e che k^2 è il numero degli elementi del quadrato, rimane dimostrato il teorema.

Teorema 9 // *In un qualunque quadrato contenuto nella tavola pitagorica P_N i prodotti dei numeri delle due diagonali sono uguali.*

Per esempio, per il quadrato evidenziato in figura 2a si ha:

$$P' = 8 \times 15 \times 24 \times 35 \times 48 = 4.838.400 \quad \text{e} \quad P'' = 24 \times 25 \times 24 \times 21 \times 16 = 4.838.400$$

Dimostrazione

Si consideri nella tavola pitagorica P_N un qualunque quadrato di lato k caselle ($k \leq N$) e siano n, p rispettivamente i numeri d'ordine, rispetto all'intera tavola, della prima riga e della prima colonna del quadrato (figura 7).

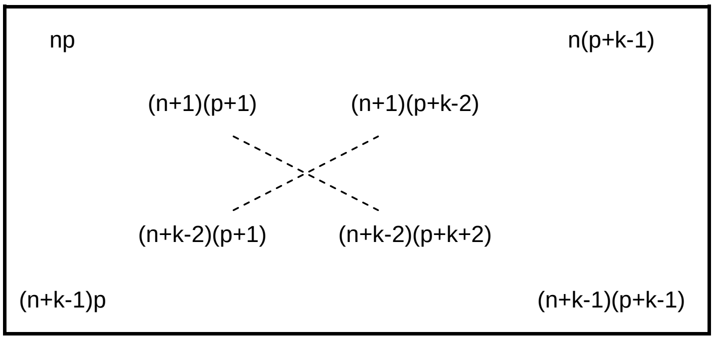


Figura 7

Ciascun termine della diagonale principale del quadrato è il prodotto di due fattori che si incrementano di una unità spostandosi di una riga e di una colonna in senso crescente, iniziando dal primo termine in alto a sinistra che vale np:

$$P' = np(n+1)(p+1)...(n+k-2)(p+k-2)(n+k-1)(p+k-1)$$

ovvero, applicando la proprietà commutativa della moltiplicazione:

$$P' = n(n+1)...(n+k-2)(n+k-1)p(p+1)...(p+k-2)(p+k-1) \tag{9}$$

Analogamente, ciascun termine della diagonale secondaria è il prodotto di due fattori: il primo si incrementa di una unità spostandosi di una riga in senso crescente, mentre il secondo si decrementa di una unità spostandosi di una colonna in senso decrescente, cominciando dall'ultimo termine in alto a destra che vale $n(p+k-1)$. Il loro prodotto è quindi:

$$P'' = n(p+k-1)(n+1)(p+k-2)...(n+k-2)(p+1)((n+k-1)p$$

ovvero, applicando la proprietà commutativa della moltiplicazione:

$$P'' = n(n+1)...(n+k-2)(n+k-1)p(p+1)...((p+k-2)(p+k-1) \tag{10}$$

Dal confronto delle (9) (10) risulta che i fattori dei due prodotti P', P'' sono identici, e pertanto è $P' = P''$.

[Quadrati *home* della tavola pitagorica]

Consideriamo ora i quadrati di lato $1, 2, 3, \ldots, N$ caselle della tavola pitagorica generale P_N, cominciando dalla prima casella in alto a sinistra (figura 8). Chiameremo tali quadrati *home* e li indicheremo con la notazione $Q_{1,k}$ $(k = 1, 2, 3, ...N)$. Essi godono di diverse proprietà.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Figura 8

Teorema 10 // *La differenza tra le somme dei termini delle diagonali principale e secondaria di un quadrato qualunque di lato k caselle contenuto nella tavola pitagorica P_N è uguale alla somma dei termini della diagonale secondaria di un quadrato home di lato k-1 caselle:*

$$S'_k - S''_k = S''_{Q_{1,k-1}} \tag{11}$$

Per esempio, considerato un qualunque quadrato di lato 5 caselle, per es. quello evidenziato in figura 2a, si ha: $S'_5 = 8 + 15 + 24 + 35 + 48 = 130$, $S''_5 = 24 + 25 + 24 + 21 + 16 = 110$. La somma dei termini della diagonale secondaria del quadrato *home* di lato 4 caselle è $S''_{Q_{1,4}} = 4 + 6 + 6 + 4 = S'_5 - S''_5 = 20$.

Dimostrazione

Si consideri un quadrato di lato k caselle ($k \leq N$) della tavola pitagorica P_N e siano n, p i numeri d'ordine, rispetto all'intera tavola, della prima riga e della prima colonna del quadrato (figura 7).

La somma dei termini della diagonale principale è:

$$S'_k = np + (n+1)(p+1) + (n+2)(p+2) + ... + (n+k-1)(p+k-1)$$

ovvero:

$$S'_k = \sum_{i=0}^{k-1}(n+i)(p+i) = p\sum_{i=0}^{k-1}(n+i) + \sum_{i=1}^{k-1}(n+i)i = p\sum_{i=0}^{k-1}(n+i) + n\sum_{i=1}^{k-1} i + \sum_{i=1}^{k-1} i^2$$

La somma dei termini della diagonale secondaria è invece:

$$S''_k = n(p+k-1) + (n+1)(p+k-2) + (n+2)(p+k-3)... + (n+k-1)p$$

ovvero:

$$S''_k = \sum_{i=0}^{k-1}(n+i)(p+k-1-i) = \sum_{i=0}^{k-1}[(n+i)p + (n+i)(k-1-i)] = p\sum_{i=0}^{k-1}(n+i) + n\sum_{i=0}^{k-2}(k-1-i) + \sum_{i=1}^{k-2} i(k-1-i)$$

Osservando che è:

$$n\sum_{i=1}^{k-1} i = n\sum_{i=0}^{k-2}(k-1-i)$$

trattandosi della stessa somma con gli addendi in ordine inverso, si ha:

$$S''_k = p\sum_{i=0}^{k-1}(n+i) + n\sum_{i=1}^{k-1} i + \sum_{i=1}^{k-2} i(k-1-i)$$

$$S'_k - S''k = \sum_{i=1}^{k-1} i^2 - \sum_{i=1}^{k-2} i(k-1-i)$$

ma poiché è:

$$\sum_{i=1}^{k-1} i^2 = \sum_{i=1}^{k-1} i(k-i) + \sum_{i=1}^{k-2} i(k-1-i)$$

si ha:

$$S'_k - S''_k = \sum_{i=1}^{k-1} i(k-i) \tag{12}$$

Indicizzando con i le righe delle tavola pitagorica, il generico numero della diagonale secondaria di un quadrato *home* di lato k caselle è $i(k+1-i)$ e quindi la somma dei numeri della diagonale è:

$$S''_{Q_{1,k}} = \sum_{i=1}^{k} i(k+1-i) \tag{13}$$

Ponendo nella (13) $k-1$ al posto di k, si ottiene $S''_{Q_{k-1}} = \sum_{i=1}^{k-1} i(k-i)$ e quindi la 12 diventa:

$$S'_k - S''_k = S''_{Q_{1,k-1}}.$$

Dal teorema 10 discende il seguente corollario.

Corollario 2 // *La somma dei termini della diagonale principale di ciascun quadrato home della tavola pitagorica P_N è uguale alla somma dei termini delle diagonali secondarie del quadrato stesso e del quadrato home precedente.*

Per i primi 10 quadrati *home*, si sono calcolate le somme dei termini delle diagonali principale $S'_{Q_{1,k}}$ e secondaria $S''_{Q_{1,k}}$:

		$Q_{1,1}$	$Q_{1,2}$	$Q_{1,3}$	$Q_{1,4}$	$Q_{1,5}$	$Q_{1,6}$	$Q_{1,7}$	$Q_{1,8}$	$Q_{1,9}$	$Q_{1,10}$
$S''_{Q_{1,k}}$	=	1	4	10	**20**	**35**	56	84	120	165	220
$S'_{Q_{1,k}}$	=		5	14	30	**55**	91	140	204	285	385

Nello schema è evidenziato, a titolo di esempio, che la somma $S'_{Q_{1,5}} = 55$ è pari alla somma di $S''_{Q_{1,5}} = 35$ e $S''_{Q_{1,4}} = 20$. Con tale schema è immediato verificare la proprietà indicata per tutti i primi 10 quadrati *home* di P_N.

Teorema 11 // *La somma dei numeri contenuti in un quadrato home $Q_{1,k}$ della tavola pitagorica P_N è il quadrato della somma dei numeri della prima riga (o colonna) del quadrato stesso:*

$$S_{Q_{1,k}} = \left(\frac{1+k}{2}k\right)^2 \tag{14}$$

Per esempio, la somma dei numeri contenuti nel terzo quadrato *home* $Q_{1,3}$ (figura 8) è:

$$(1+2+3)+(2+4+6)+(3+6+9) = (1+2+3)+2(1+2+3)+3(1+2+3) = (1+2+3)(1+2+3) = (1+2+3)^2.$$

Dimostrazione

Infatti, i quadrati *home* di una tavola pitagorica P_N sono essi stessi tavole pitagoriche P_1, P_2, P_3, ... per le quali vale il corollario 1.

Teorema 12 // *La somma dei numeri contenuti fra due quadrati home successivi $Q_{1,k-1}, Q_{1,k}$ della tavola pitagorica P_N è il cubo del numero della prima riga (o colonna) compreso fra i due quadrati stessi, ovvero è k^3.*

Per esempio la somma dei numeri contenuti fra i quadrati home $Q_{1,2}$ e $Q_{1,3}$ (figura 8) è: $3+6+9+6+3 = 27 = 3^3$, essendo 3 il numero della prima riga compreso fra $Q_{1,2}$ e $Q_{1,3}$

Dimostrazione

La somma dei numeri compresi fra due quadrati *home* successivi $Q_{1,n-1}$ e $Q_{1,n}$ è pari alla differenza fra le somme dei numeri contenuti nei due quadrati stessi e quindi per il teorema 11:

$$\left(\frac{1+k}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1+k-1}{2}\right)^2 (k-1)^2 = k^2\left[\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{2}\right)^2\right] = \frac{k^2}{4}(k^2+2k+1-k^2+2k-1) = k^3$$

Dai teoremi 11 e 12 discende che:

Corollario 3 // *La somma dei cubi dei primi N numeri interi è uguale alla somma dei numeri della tavola pitagorica P_N e quindi al quadrato della somma dei primi N numeri interi:*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + N^3 = (1+2+3+...+N)^2$$

ovvero è:

$$\sum_{i=1}^{N} i^3 = \left(\frac{1+N}{2}N\right)^2 \tag{15}$$

Dimostrazione

Considerata P_N come *unione* dei quadrati *home* di lato 1, 2, 3, ...N caselle, la somma dei numeri contenuti in P_N è la somma delle somme dei numeri compresi fra i successivi quadrati *home* che, per il teorema 12, valgono $1^3, 2^3, 3^3, ...N^3$. D'altra parte, la somma dei numeri contenuti nella tavola pitagorica P_N, per il corollario 1, è il quadrato della somma dei primi N numeri interi, che è fornita dalla (6). Rimane dunque dimostrata la (15).

Per esempio, nella tavola pitagorica P_4, possiamo considerare i suoi numeri ripartiti in sottoinsiemi formati dai numeri compresi fra i quadrati home $Q_{1,1}, Q_{1,2}, Q_{1,3}, Q_{1,4}$:

$1 = 1^3 = 1$

$2 + 4 + 2 = 2^3 = 8$

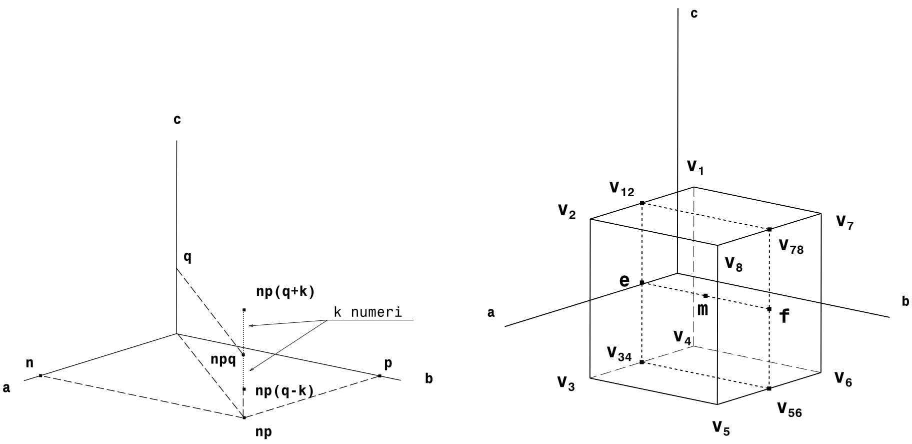
$3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 3^3 = 27$

$4 + 8 + 12 + 16 + 12 + 8 + 4 = 4^3 = 64$

La loro somma è dunque $1 + 8 + 27 + 64 = 100$ ma anche per la (15) $\left(\frac{1+4}{2} \times 4\right)^2 = 10^2 = 100$.

[E per i cubi pitagorici?]

Possiamo pensare di estendere al caso del prodotto fra tre numeri interi lo schema di calcolo della tavola pitagorica. Avremo in tal modo in luogo della tavola pitagorica il *cubo pitagorico* generalizzato CP_N, inteso come tabella a tre entrate per il prodotto di tre numeri interi. In fondo, si tratta di passare da un caso bidimensionale a uno tridimensionale. In luogo di righe e colonne, parleremo in tal caso di spigoli a, b, c del cubo pitagorico disposti per esempio secondo gli assi x,y,z di una terna cartesiana. Il prodotto fra i numeri interi n, p, q si troverà nella cella (cubo elementare) individuata dalle tre *coordinate* n, p, q. In tal modo si possono ottenere analoghe proprietà di quelle precedentemente viste per la tavola pitagorica. A titolo di esempio accenniamo all'estensione al caso tridimensionale dei teoremi 2, 3.



(a) (b)

Figura 9

Il teorema 2 nel caso del cubo pitagorico si enuncia:

Un numero qualunque del cubo pitagorico CP_N è la media aritmetica dei due numeri da esso "equidistanti" nella direzione di uno stesso spigolo del cubo, nonché dei k numeri che lo precedono e che lo seguono.

Dimostrazione

Infatti, considerato un numero qualunque npq del cubo pitagorico (figura 9a), i due numeri da esso distanti k celle secondo la direzione dello spigolo c del cubo sono $np(q-k)$ e $np(q+k)$, per cui la loro somma è: $np(q-k)+np(q+k) = 2npq$ da cui: $npq = [np(q-k) + np(q+k)]/2$.

Sia ora v l'elemento centrale di $2k + 1$ numeri consecutivi nella direzione dello spigolo c del cubo pitagorico. Per la prima parte dell'asserto, ciascuna delle k coppie di elementi equidistanti da v ha per somma $2v$ e quindi la somma totale di tali coppie è $S_k = 2vk$, da cui: $v = S_k/2k$. Analoghi ragionamenti si possono ripetere, per entrambe le parti dell'enunciato, considerando le direzioni secondo gli altri due spigoli a, b del cubo pitagorico.Il teorema è pertanto dimostrato.

Il teorema 3 nel caso del cubo pitagorico si enuncia:

La somma dei numeri situati negli otto vertici di un cubo di lato k caselle (k dispari) contenuto nel cubo pitagorico CP_N è otto volte il numero della cella centrale.

Si noti che nel caso bidimensionale la somma dei numeri contenuti nei 4 vertici di un quadrato della tavola pitagorica è $4 = 2^2$ volte il numero mediano del quadrato, nel caso tridimensionale la somma dei numeri contenuti negli 8 vertici di un cubo del cubo pitagorico è $8 = 2^3$ il numero mediano del cubo...

Dimostrazione

Infatti (figura 9b) per il teorema precedente si ha:

$$e + f = 2m \tag{16}$$

$$e = \frac{v_{12} + v_{34}}{2} = \left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{v_3 + v_4}{2}\right)\frac{1}{2}, \qquad f = \frac{v_{56} + v_{78}}{2} = \left(\frac{v_5 + v_6}{2} + \frac{v_7 + v_8}{2}\right)\frac{1}{2} \tag{17}$$

e quindi sostituendo le (17) nella (16):

$$\frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{4} + \frac{v_5 + v_6 + v_7 + v_8}{4} = 2m$$

e infine:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 = 8m. \tag{18}$$