

Simmetrie musicali

Sulle spalle dei giganti: J.S.Bach e le
Variazioni Goldberg

- Nella musica tradizionale distinguiamo i suoni per **altezza f** (frequenza della vibrazione periodica) e per **durata**
- Il dominio delle altezze è **discreto**,: non è $f \quad f+\Delta f \quad f+2\Delta f \quad \dots$ bensì
- $\dots f \quad \alpha f \quad \alpha^2 f \quad \alpha^3 f \quad \dots \quad \alpha^{11} f \quad \alpha^{12} f = 2f \quad \alpha^{13} f = \alpha f \quad \dots$ dove $\alpha = 2^{1/12}$
- In scala logaritmica si ottiene una successione aritmetica
- Un **intervallo** musicale è la distanza, in scala logaritmica, tra le frequenze di due suoni
- che corrisponde alla successione dei tasti (bianchi e neri) sulla tastiera
- All'orecchio umano suoni di frequenza $f, 2f, 4f, \dots, 2^n f, \dots$ producono sensazioni così simili che i musicisti usano per tutti lo stesso nome. Ne risultano 12 note: Do, Re, ecc. ma anche Do diesis, Mi bemolle ecc.
- Anche la scala dei tempi è discreta: la durata di un suono è sottomultipla di una durata unitaria:

- Una **melodia** è una successione di suoni, quindi si rappresenta come grafico di una funzione (del tempo) a gradini $f(t)$
- Anche la scala dei tempi è discreta: la melodia si suddivide, con sbarrette verticali, in frasi che hanno la stessa durata (**battute**)
- Quindi una melodia si rappresenta bene sulla "carta a quadretti" come grafico a scalini (a gradini)
- (I musicisti invece usano il pentagramma)

- Tradizionalmente, in una melodia non tutti i gradini vengono utilizzati:
- la scelta dei gradini utilizzati produce una certa **scala**. Per esempio, nella *scala di Do maggiore* la scelta è
- ---- Do ----- Re ----- Mi---- Fa----- Sol ----- La -----Si --- Do ----- Re
- Queste non sono equidistanti

- Quando due o più melodie vengono *sovrapposte*, cioè suonate simultaneamente, l'orecchio musicale (per essere compiaciuto e non disturbato) esige che, in prima approssimazione, le frequenze dei suoni simultanei siano multiple di uno stessa frequenza **fondamentale** (bassa= suono profonda). Questa compatibilità in musica si chiama **armonica**, e l'**armonia** è la scienza che insegna a sovrapporre melodie accettabili, a realizzare **il basso** di una melodia o a inventare una melodia per un basso assegnato.
- Ogni melodia suggerisce infatti (ma non univocamente) un **accompagnamento**, cioè altre melodie compatibili, solitamente su frequenze più basse e con andamento più semplice.
- Ogni (bravo) musicista, se gli viene assegnata una melodia (semplice), deve saper inventare un opportuno accompagnamento
- Viceversa, dato un certo accompagnamento (una scelta di note fondamentali) ogni musicista sa inventare qualche melodia che si addica all'accompagnamento assegnato

- Le Variazioni Goldberg di J.S.Bach sono una magistrale antologia di questa arte musicale del **comporre** :
- L'Aria iniziale (forse dovuta ad altro autore) suggerisce un andamento del basso. Viceversa, fermo restando quel basso, Bach inventa innumerevoli melodie armonicamente compatibili. E in queste invenzioni dimostra un certo gusto ... matematico.

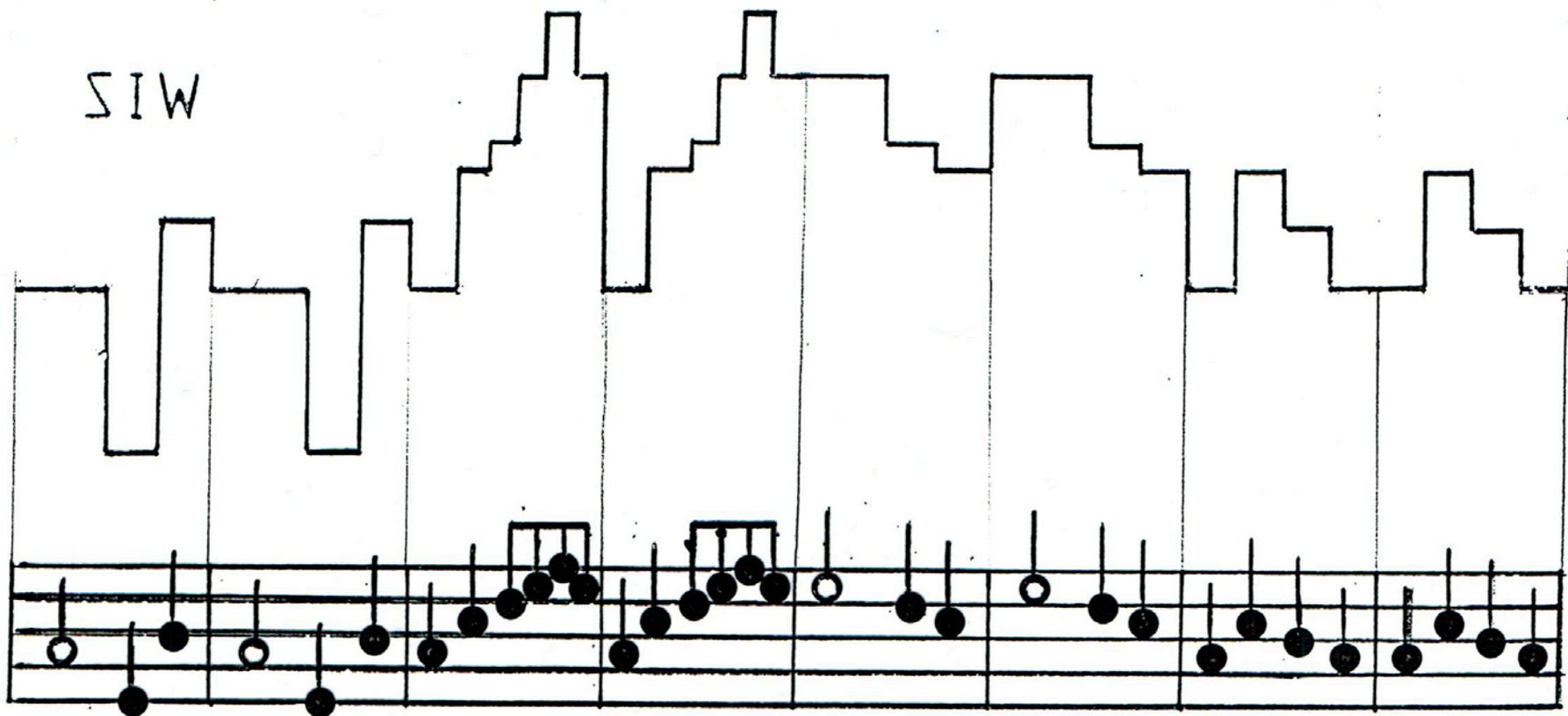
Melodia di riferimento : due rappresentazioni

In ascisse il tempo, in ordinate l'*altezza* del suono (logaritmo della frequenza)

N.B. Le note = frequenze della scala di Do maggiore (tasti bianchi) non sono equidistanti:

Do ----- Re ----- Mi----Fa ----- Sol ----- La ----- Si ---- Do
tono semi-tono semi-tono

SIW

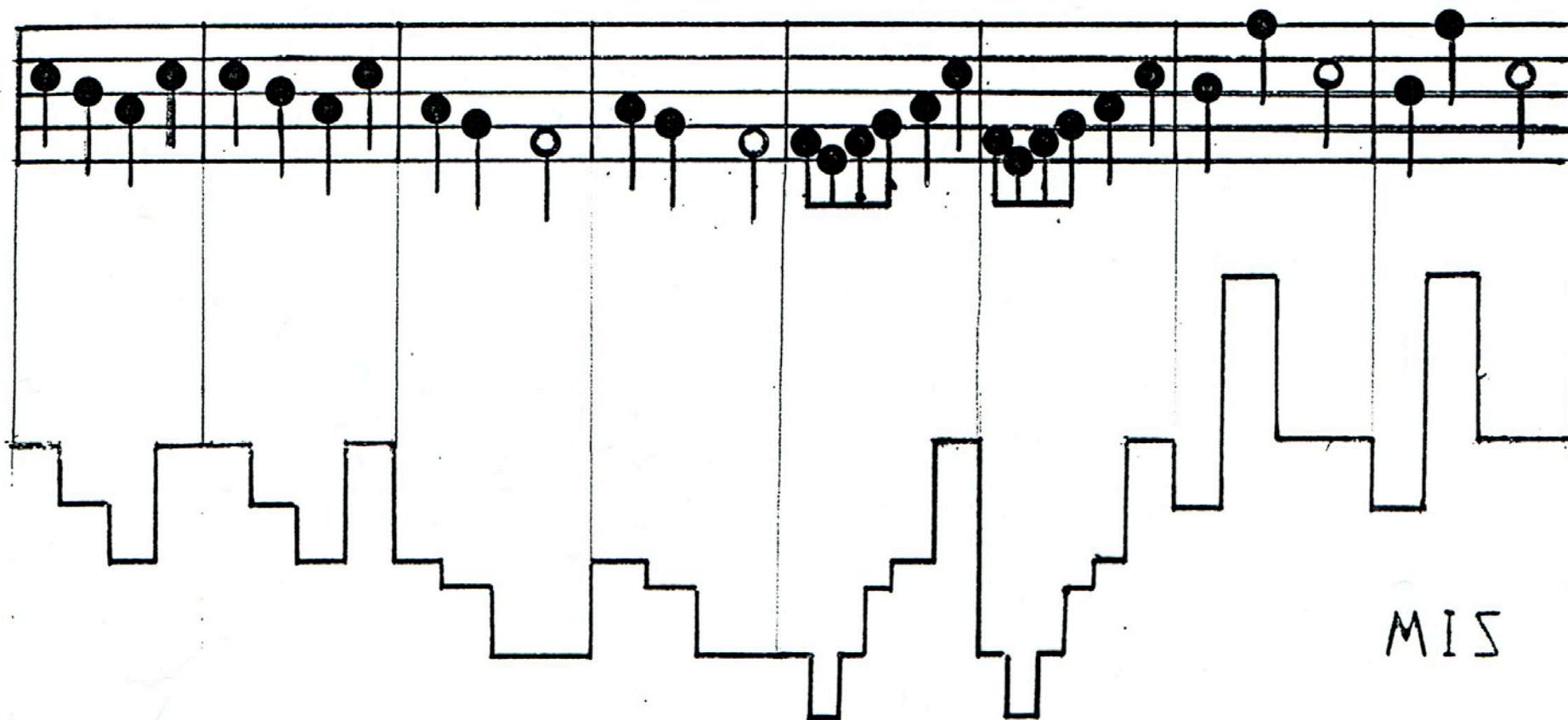


Nel pentagramma si adotta la chiave di basso

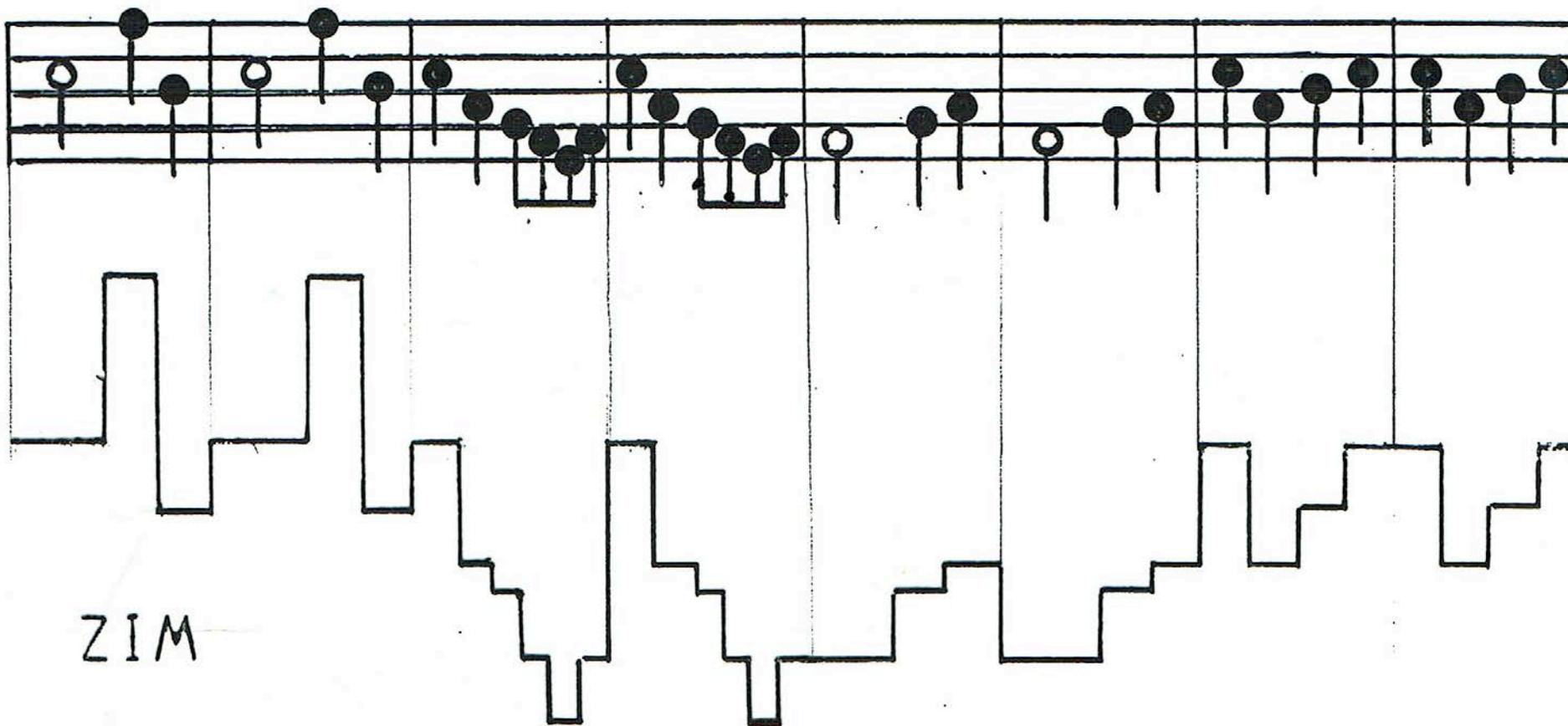
Effetto di una **rotazione di 180°** della melodia originaria
(mezzo giro attorno al centro del foglio = simmetria puntuale)

L'orecchio musicale "pensa" questa melodia nella scala di La minore

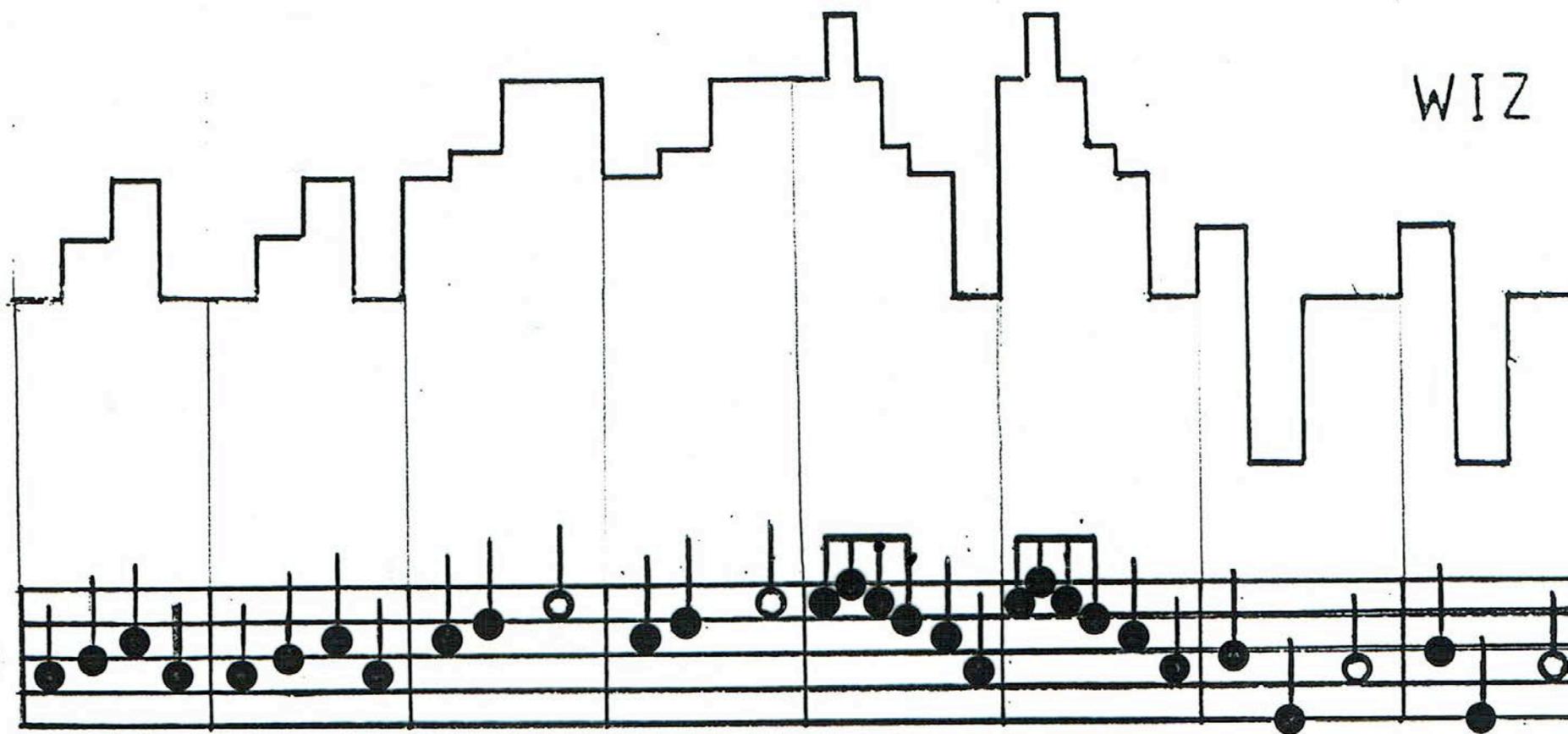
La ----- Si ---- Do ----- Re ----- Mi --- Fa ----- Sol ----- La



Effetto di una **riflessione** (simmetria assiale) della melodia originaria su un asse **orizzontale**
(equivale alla riflessione su un asse verticale della melodia precedente)
Anche questa melodia viene percepita nel modo minore

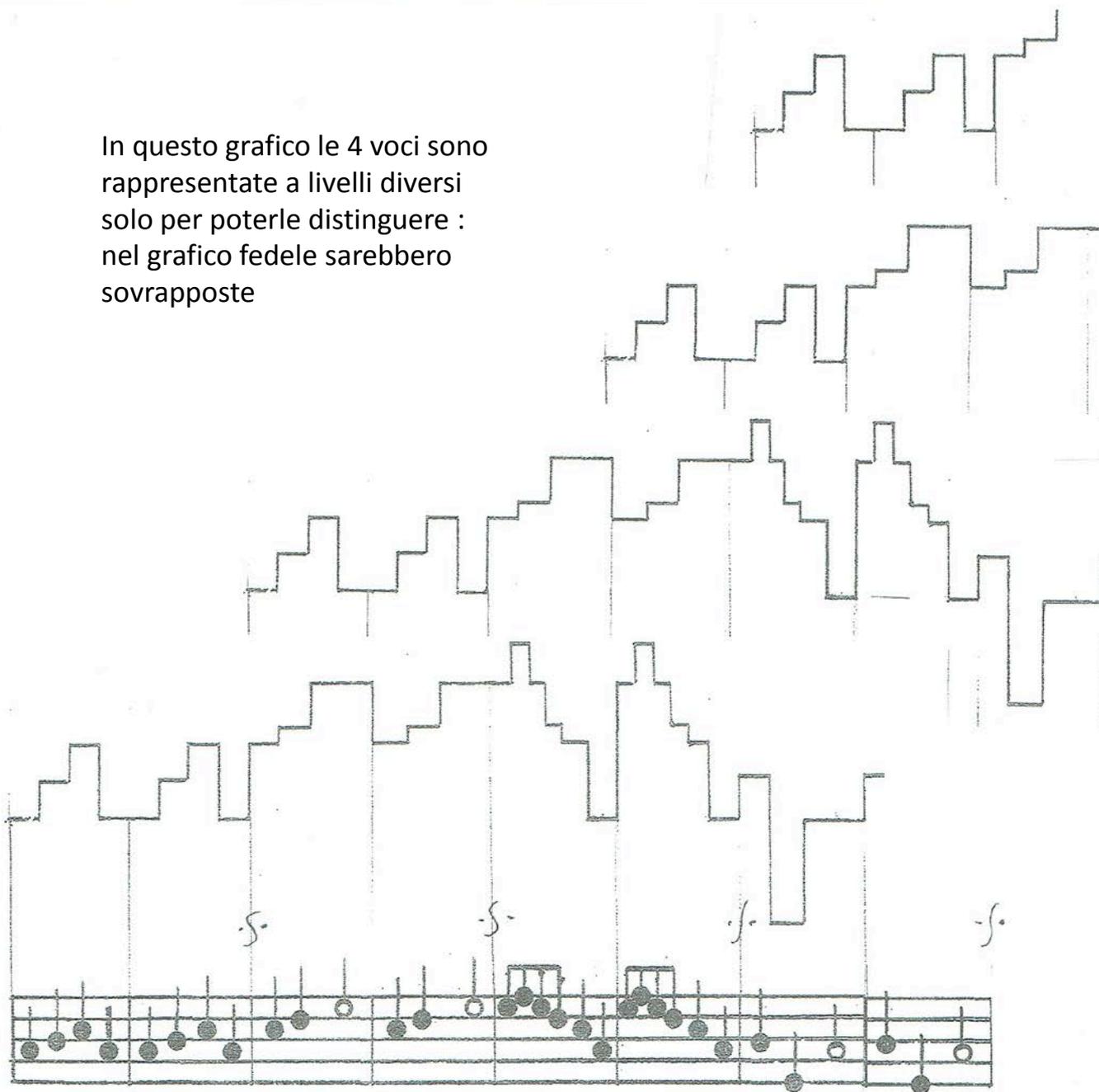


Effetto di una **riflessione** della melodia originaria su un asse **verticale**
Si ritorna al modo maggiore



Canone a 4 voci

In questo grafico le 4 voci sono rappresentate a livelli diversi solo per poterle distinguere : nel grafico fedele sarebbero sovrapposte



La prima voce attacca.

La 2.a, la 3.a e la 4.a traslate solo nel tempo si sovrappongono alla prima in corrispondenza ai segni

\$

Quando la prima voce ha finito, può riprendere dall'inizio e tutto si ripete quanto si vuole (Canone perpetuo)

La perizia del compositore consiste nello scegliere la melodia di partenza in modo che la sovrapposizione produca un effetto complessivo

"armonico"

(in sostanza: piacevole all'ascolto)

Qui si usa l'ultima melodia (fra Martino)

ma si potrebbero usare anche le varianti precedenti, creando altri 3 canoni che *automaticamente* risultano musicalmente accettabili (è un teorema musicale)



Elias G. Hausmann (1746):
ritratto di Johann Sebastian Bach

eseguito in occasione della sua adesione
come Socio corrispondente n° 14 alla
Società di Scienze musicali
(*musicalischen Wissenschaften*)

fondata da Lorenz C. Mizler,
medico, matematico,
musicista ex allievo di Bach

Altri soci invitati da Mizler nella sua società:
Händel, Telemann, Schröter



Canon triplex a 6 voci dettaglio dal ritratto di Hausmann (altra versione)

E' un saggio di
"scienza musicale"
contributo di Bach (assieme al
ritratto) per divenire socio
corrispondente della
Società Mizler.

Qui si sovrappongono tre
diverse melodie, ciascuna
delle quali è un canone

Ritroveremo questo canone
nella pagina che segue

Weschevère Canones libro de synthese aegli fundamentali =
Noten aorfeniger Arie. von J. S. Bach.

4. Canon simplex

2. all' roverscio.

Handwritten musical notation for Canon 4, featuring a single voice and its retrograde. The notation is on a single staff with a treble clef and a common time signature. The notes are written in a cursive hand.

5. Canon unigen Canones rectus.
notu recto e capitanis!

4. nota contraria e recto..

Handwritten musical notation for Canon 5, featuring a single voice and its mirror image. The notation is on a single staff with a treble clef and a common time signature. The notes are written in a cursive hand.

5. Canon duplex a 4.

6. Canon simplex libro synthese

Handwritten musical notation for Canon 5 and Canon 6, featuring two voices. The notation is on a single staff with a treble clef and a common time signature. The notes are written in a cursive hand.

Handwritten musical notation for Canon 7, featuring a single voice and its mirror image. The notation is on a single staff with a treble clef and a common time signature. The notes are written in a cursive hand.

Handwritten musical notation for Canon 8, featuring a single voice and its mirror image. The notation is on a single staff with a treble clef and a common time signature. The notes are written in a cursive hand.

Handwritten musical notation for Canon 9, featuring a single voice and its mirror image. The notation is on a single staff with a treble clef and a common time signature. The notes are written in a cursive hand.

Handwritten musical notation for Canon 10, featuring a single voice and its mirror image. The notation is on a single staff with a treble clef and a common time signature. The notes are written in a cursive hand.

Handwritten musical notation for Canon 11, featuring a single voice and its mirror image. The notation is on a single staff with a treble clef and a common time signature. The notes are written in a cursive hand.

Nel 1975 fu trovato a Strasburgo un quaderno di lavoro di Bach.

Nel retro della copertina compariva questa pagina (poi classificata BWV 1087) intitolata

Canoni vari sulle prime otto note fondamentali dell'Aria precedente

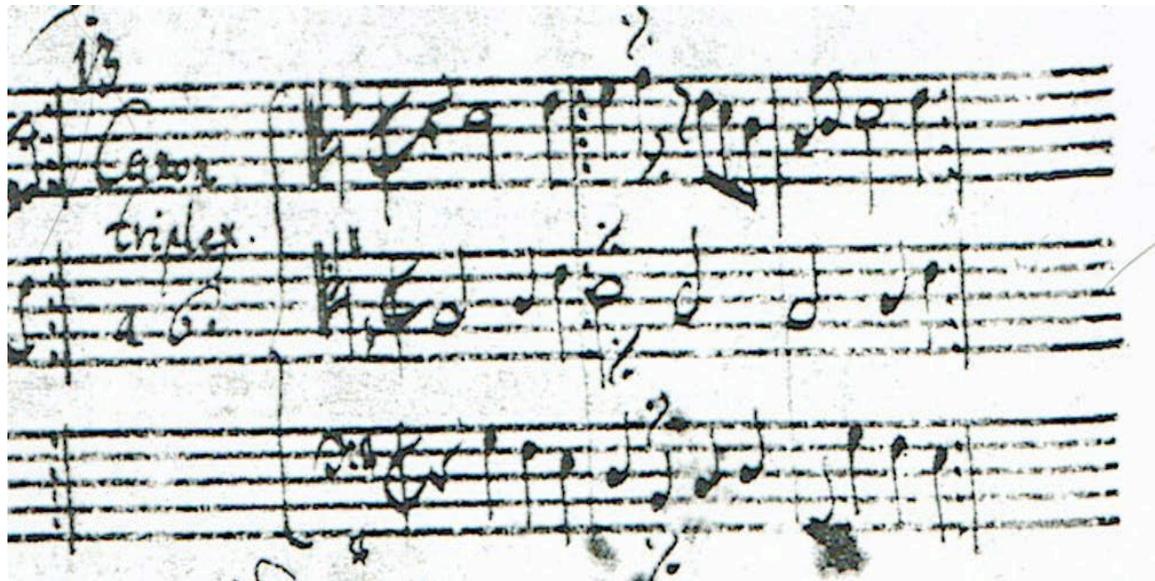
L' Aria è quella che compare all'inizio e alla fine delle **Variazioni Goldberg**

Le sue note *fondamentali* non si trovano nella melodia; si chiamano così perché formano la base dell'armonia, cioè le note più profonde dell'accompagnamento

Il penultimo di questi canoni è quello che compare nei ritratti di Hausmann. I primi quattro saranno esaminati in dettaglio

Mizler

- Dettaglio della pagina precedente (Strasburgo)



Si riconosce il Canone che compare nei ritratti di Hausmann
La terza riga consiste delle prime 8 note fondamentali
(+ 3 ripetute) dell'*Aria* delle Variazioni Goldberg

Descriptio Canonis libri in octava regh fundamental =
 Noten noefeniger Arie. von J. S. Bach.

1. Canor simplex 2. all' roversoio.

3. Canor simplex motu recto e contrario. 4. motu contrario e recto.

5. Canor simplex.

Altro dettaglio della pagina precedente (Strasburgo)

Dettaglio della pagina precedente:

1. *Canon simplex*

1. Canon simplex

La frazione 2/4 riflessa (alla fine della riga) indica una riflessione

2. *all'roverscio*

2. all'roverscio

E' Il precedente riflesso su un asse orizzontale

3. *Canon vorigen Canones zuegleich motu recto et contrario.*

3. Beede vorigen Canones zuegleich motu recto et contrario
(=Entrambi i canoni precedenti, insieme)

Le parole latine indicano la riflessione orizzontale

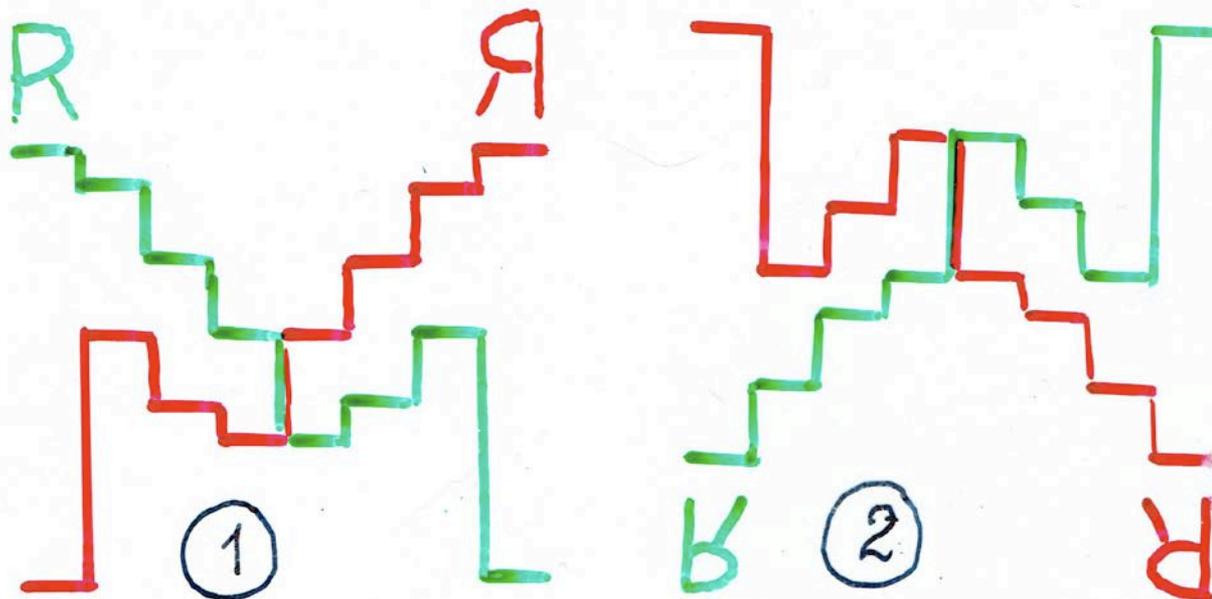
Le due chiavi iniziali indicano la traslazione verticale.

Il segno $\$.$ Indica la traslazione orizzontale, cioè l'ingresso della 2.a voce

4. *Motu contrario & recto.*

4. Motu contrario et recto

E' Il precedente riflesso orizzontalmente ma produce la stessa musica



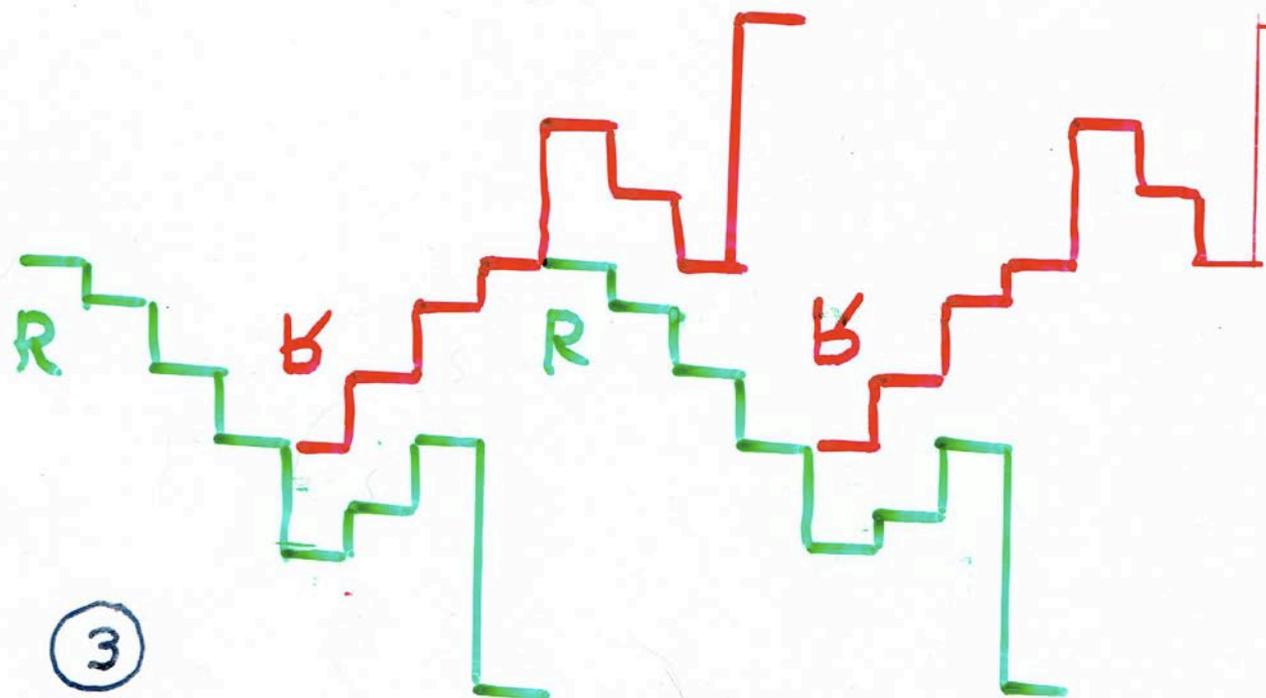
Canone 1

Le prime otto note
fondamentali

sono il tracciato verde
Il tracciato rosso è ottenuto
invertendo
L'asse dei tempi

Canone 2

ottenuto dal precedente per
riflessione nelle altezze



Canone 3

Il tracciato rosso si ottiene
dal verde con una
glissoriflessione
(traslazione nel tempo
+ riflessione nelle altezze)

Canone 4

si ottiene dal 3 con una traslazione
temporale di tutte le voci (quindi il
grafico è lo stesso del 3)

N. 16.

Clavier-Ubung

*bestehend
in einer*

A R I A

*mit verschiedenen Veränderungen
vors Clavicimbal
mit 2 Manualen*

*Denen Liebhabern zur Gemuths-
Ergetzung verfertigt von*

Johann Sebastian Bach

*Königl. Pohl u. Churf. Sachsl. Hoff
Compositour, Capellmeister u. Director
Chori Musici in Leipzig*

*Nürnberg in Verlegung
Balthasar Schmidts*

Frontespizio delle
Variazioni Goldberg (BWV 988)
nell'edizione del 1741-2

Costituiscono il volume n° 4 e ultimo
dell'opera *Klavier Übungen*
(esercizi alla tastiera)

I precedenti volumi (pubblicati dal
1731) contengono
le *Partite*, *l'Ouverture francese*, il
Concerto italiano, vari preludi per
organo e Duetti

*Esercizi per la tastiera che consistono
di un'Aria e diverse variazioni per
clavicembalo a due tastiere, per il
piacere dei dilettanti*

Johann Gottlieb Goldberg era il nome
di un giovane clavicembalista al
servizio del co. von Brühl (Dresda), che
commissionò l'opera a Bach
(altri dicono fosse il co. Keyserling)

- **Variazioni Goldberg: schema dell'opera (Indice)**

- **Aria**

- Var.1
- Var.4
- **Var.7 (Giga)**
- Var.10 (Fughetta)
- Var.13
- Var.16 (Ouverture)
- **Var.19**
- Var.22
- **Var.25**
- Var.28
- **Aria**
- Var.2
- Var.5
- Var.8
- Var.11
- Var.14
- Var.17
- Var.20
- Var.23
- Var.26
- Var.29
- Var.3
- Var.6
- Var.9
- **Var.12 (canone alla Quarta)**
- Var.15
- **Var.18 (canone alla Sesta)**
- Var.21
- Var.24
- Var.27
- **Var.30 (Quodlibet)**
- (canone all'Unisuono)
- (canone alla Seconda)
- (canone alla Terza)
- (canone alla Quinta)
- (canone alla Settima)
- (canone all'Ottava)
- (canone alla Nona)

Goldberg

[Basso]

twice

twice

dominante

tonica

dominante

tonica

Andamento (completo) del basso
(note *fondamentali*)

comune a tutte le variazioni
(con piccole licenze)

In qualche caso il basso è presente
(lo si sente)

In altri casi è sottinteso
(è suggerito dall'armonia)

Le var. 15, 21, 25 sono nel modo
minore: le note del basso cambiano
in corrispondenza

← Riassunto
dello stesso

CANONE

BWV 988 : GOLDBERG

3°	A	A	all'unisono
6°	V	V	alla seconda
9°	G	G	alla terza
12°	R	B	alla quarta rovescio
15°	F	E	alla quinta rovescio
18°	Q	Q	alla sesta
21°	W	W	alla settima
24°	→		all'ottava
27°	↗		alla nona

Le variazioni con numero d'ordine *multiplo di 3* sono tutte **canoni** che utilizzano *traslazioni oblique* composte di

una traslazione orizzontale (un ritardo), sempre presente

e una traslazione verticale (in altezza) di ampiezza crescente:

Var. n° 3 : 0 (in musica: *all'unisono*)

Var. n° 6 : 1 (in musica : *alla 2.a*)
perché si conta sia l'inizio che la fine)

Var. n° 9 : 2 (in musica : *alla 3.a*)

Var. n° 18 : 5 (in musica : *alla 6.a*)

Var. n° 21 : 6 (in musica : *alla 7.a*)

Var. n° 24 : 7 (in musica : *alla 8.a*)

Var. n° 27 : 8 (in musica : *alla 9.a*)

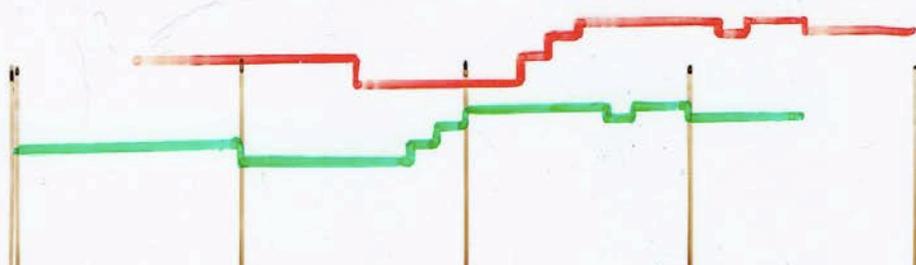
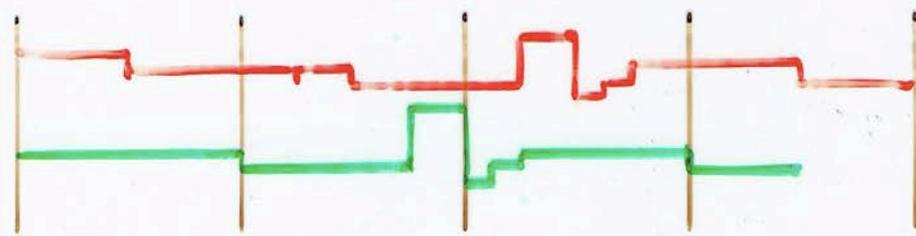
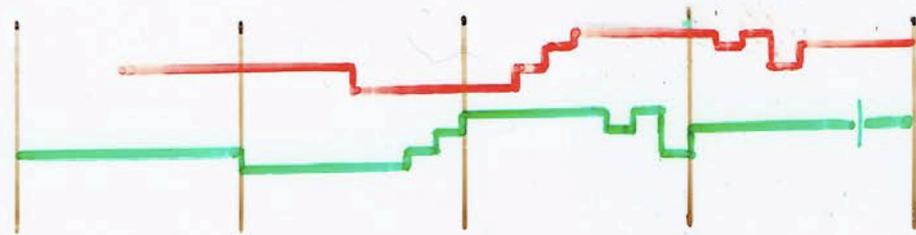
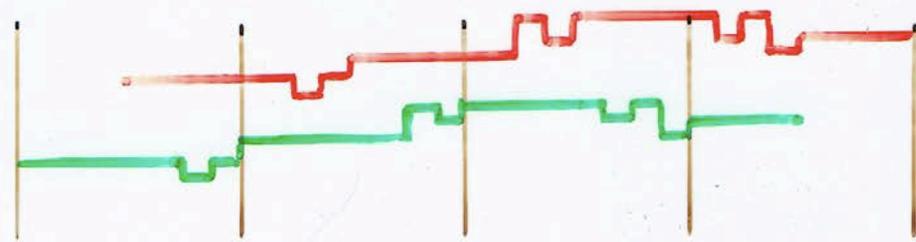
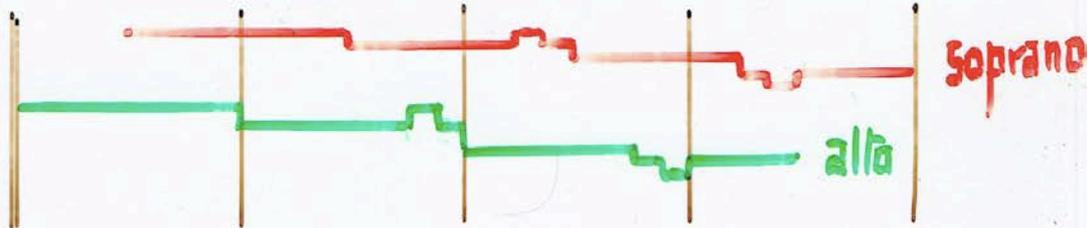
oppure

una riflessione orizzontale

Var. n° 12 e n° 15

La Var. n° 30 (*quodlibet*)

è un caso misto



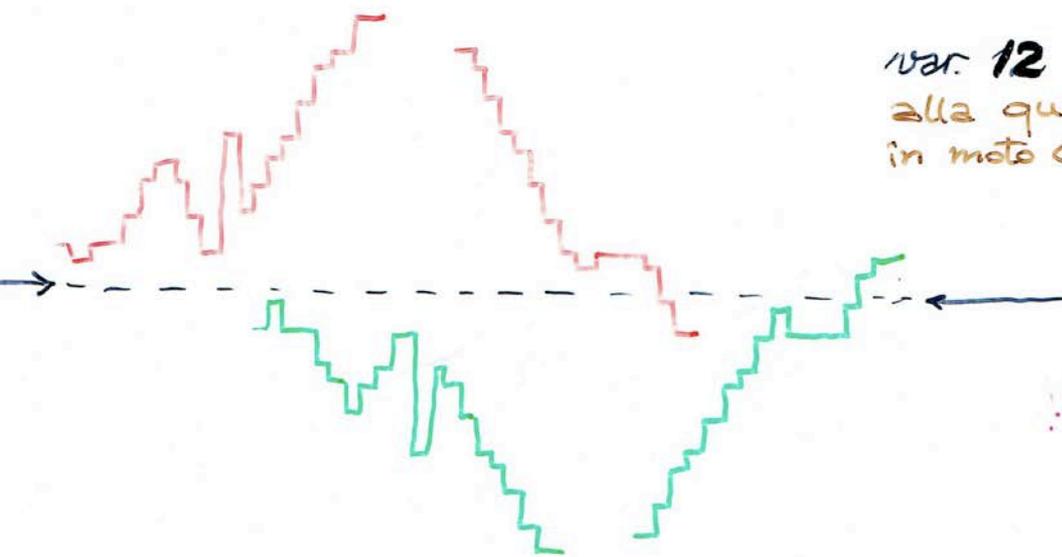
Variation n.18 (completa)

Canone *alla sesta*

La trasformazione è una traslazione *obliqua* ottenuta componendo :

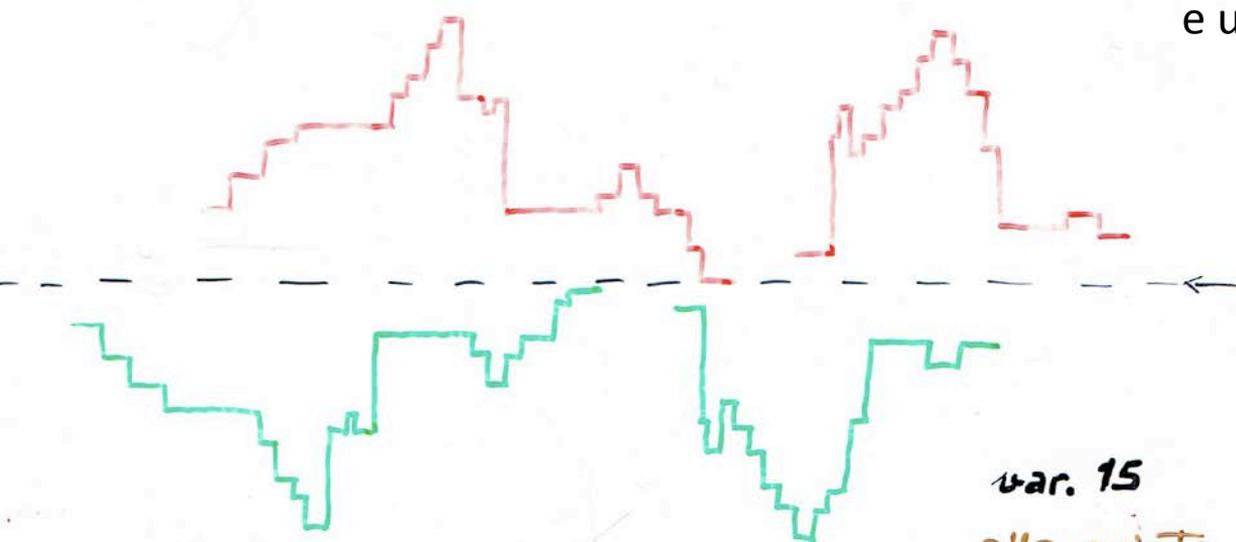
una traslazione orizzontale (di una *battuta*)
cioè la seconda voce è *posticipata*

e una traslazione verticale (di sei *note*)
cioè la seconda voce è *più alta*



var. 12
alla quarta
in moto contrario

Variazioni n. 12 e n.15
(frasi iniziali)
le trasformazioni applicate
sono il prodotto di
una **traslazione** temporale
e una **riflessione** orizzontale



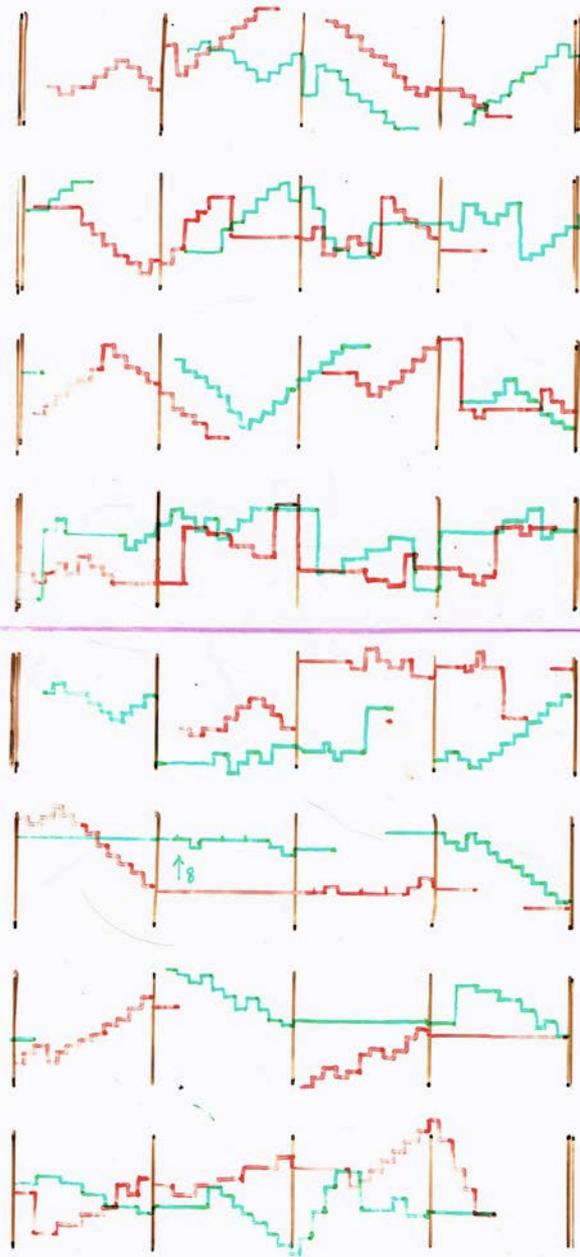
var. 15
alla quinta
in moto contrario

Goldberg

Variazione 12

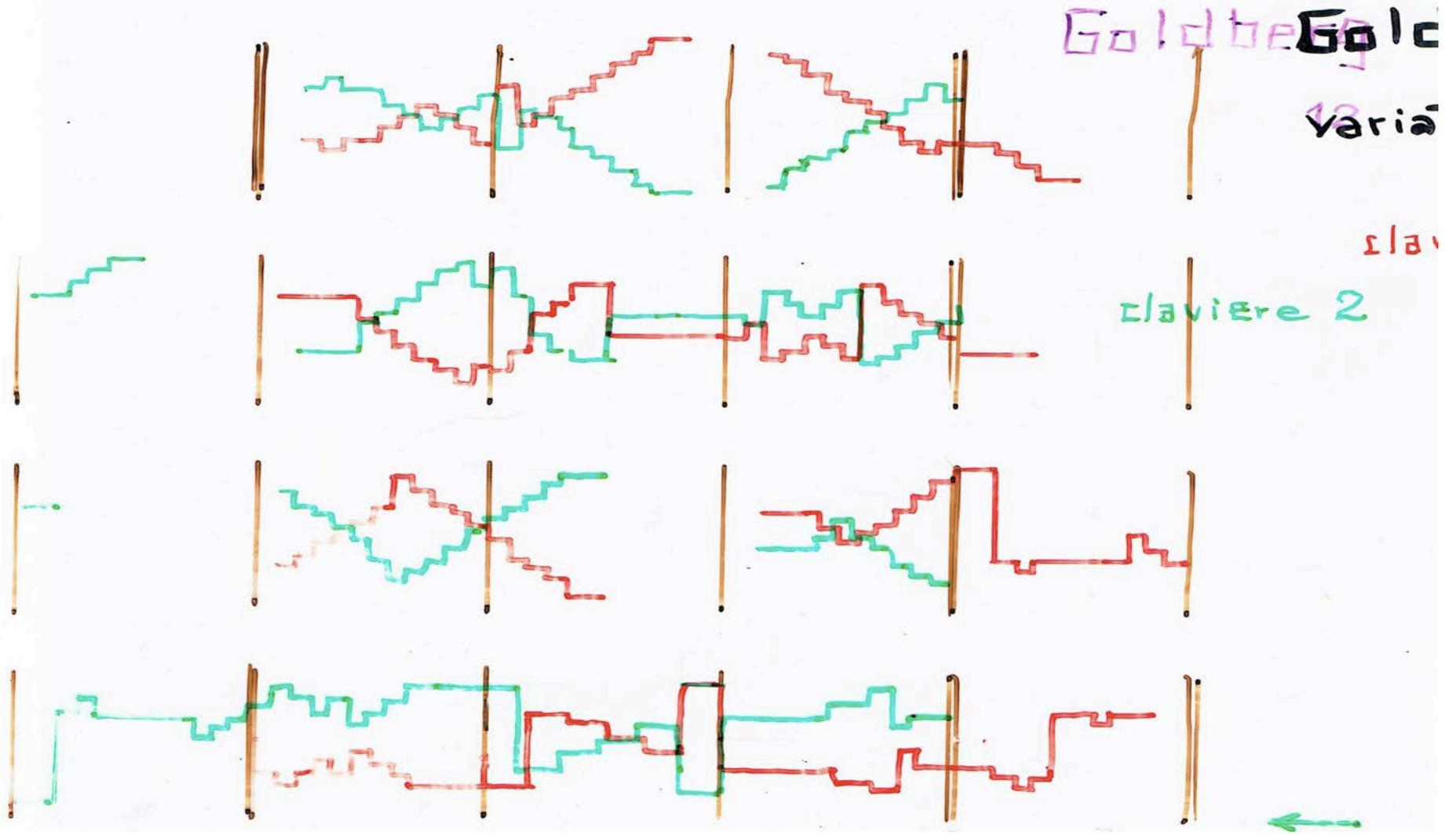
claviere 1

claviere 2

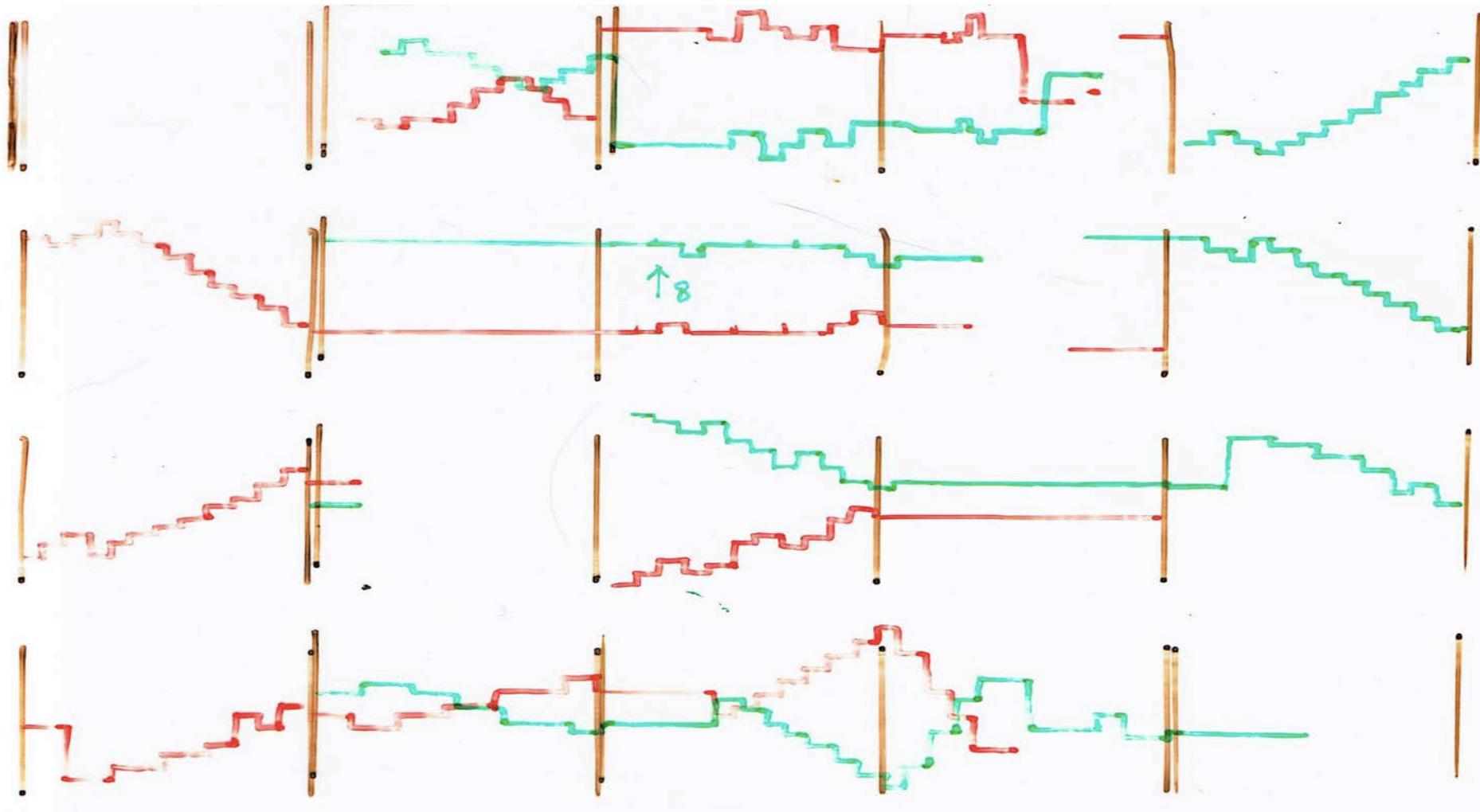


- Variazione n.12 (completa)

Le due voci producono un'armonia piacevole ma le simmetrie non si avvertono facilmente né visivamente né (tanto meno) all'ascolto



- Prima parte della Variazione n.12:
- Effettuando un'opportuna traslazione di una voce rispetto all'altra
- si rendono evidenti le simmetrie
- Ma questa sovrapposizione è armonicamente intollerabile



Seconda parte della Variazione n.12

Effettuando la traslazione *opposta* della precedente,
la simmetria risulta evidente

ma anche questa sovrapposizione è musicalmente intollerabile

Old German Folksong



Ich bin so lang nicht bei dir g'west, ruck her, ruck her, ruck her



Alternate Ending



BWV 212/3 mm 14-16



Was Gott tut, das ist wohl-ge-tan, es bleibt ge- recht sein Wil- le.

Chorale Melody by Severus Gastorius (1681)

La prima riga è una canzone popolare tedesca

Per tanto tempo non sono stato da te, corri qui, corri qui

Le altre righe sono varianti

Questa melodia si ritrova fin dalle prime battute del Quodlibet



**Kraut und Rüben haben mich vertrieben,
hätt' mein' Mutter Fleisch gekocht, so wär' ich länger geblieben.**

E' una canzone popolare:

Crauti e rape mi hanno allontanato

*Se mia madre avesse cotto la carne
mi sarei fermato più a lungo*

Queste melodie si ritrovano in vari momenti del Quodlibet