

Funzioni irregolari e oggetti frattali: da Weierstrass a Mandelbrot

Angelo VULPIANI

Dipartimento di Fisica, Università Sapienza, Roma
<angelo.vulpiani@roma1.infn.it>

PISA, 17 Aprile 2015

Perché parlare di frattali

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s' impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto (Galileo)

Ovviamente non è difficile convincersi che
le montagne non sono coni e le nuvole non sono sfere.

Matematici, Fisici teorici e sperimentali, Meteorologi:

- * Weierstrass (serie di Fourier)
- * Peano (curve non differenziabili)
- * Von Koch (curve non differenziabili)
- * Hausdorff (misure singolari)
- * Julia (dinamica nel piano complesso)
- * Perrin (moto browniano)
- * Wiener (moto browniano, processi stocastici)
- * Richardson (turbolenza, meteorologia)
- * Kolmogorov (processi stocastici, turbolenza)

Cos' è la dimensione?

* Una linea "regolare" ha dimensione uno in quanto basta una variabile (coordinata curvilinea) per individuarne un punto.

* La superficie di una sfera ha dimensione due in quanto un suo punto è dato da due coordinate (latitudine e longitudine).

* Possiamo approssimare la linea con una spezzata di segmenti lunghi ℓ e poi prendere ℓ sempre più piccolo, indicando con $N(\ell)$ il numero di segmenti, se ℓ è abbastanza piccolo la lunghezza L è circa $N(\ell)\ell$, quindi $N(\ell)$ è proporzionale a $1/\ell$.

* Nel caso di una superficie, la possiamo "piastrellare" con $N(\ell)$ quadratini di lato ℓ , l'area A sarà approssimata da $N(\ell)\ell^2$, quindi $N(\ell)$ è proporzionale a $1/\ell^2$.

* Per riempire un oggetto tridimensionale sarà necessario un numero di cubetti di lato ℓ proporzionale a $1/\ell^3$.

Dall' osservazione precedente una generalizzazione:

* un oggetto ha dimensione (frattale) D_F se il numero di (iper) cubetti di lato ℓ necessari per ricoprire l'oggetto si comporta come

$$N(\ell) \sim \frac{1}{\ell^{D_F}} .$$

* Esistono oggetti in cui D_F è non intera? **SI**.

* Un oggetto è chiamato frattale se D_F è non intera; un frattale tipicamente presenta una **struttura autosimilare**: guardando una figura con una certa risoluzione non è possibile dire a che scala ci si trova.

* Questo comportamento non è un mero artefatto di modelli matematici patologici. Al contrario questo tipo di "rugosità" è molto comune, è presente negli attrattori dei sistemi dinamici dissipativi caotici ed in molti fenomeni naturali, ad esempio in turbolenza e nelle strutture a grande scala delle galassie.

Due esempi di "mostri matematici"

La funzione di Weierstrass: una serie di Fourier un po' antipatica

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A^{-n} \cos(2\pi B^{n-1}x) , \quad 0 \leq x \leq 1$$

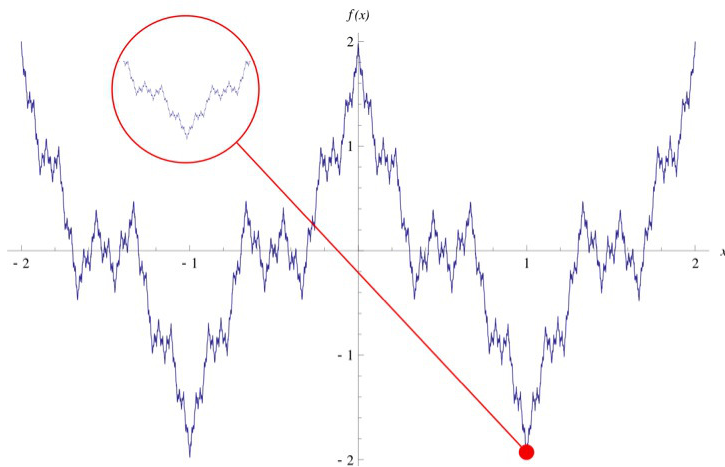
ove B è un intero e $A < B$, la funzione non è differenziabile in nessun punto, il grafico ha lunghezza infinita, $D_F = 2 - \ln A / \ln B \in (1, 2)$.

La curva di von Koch

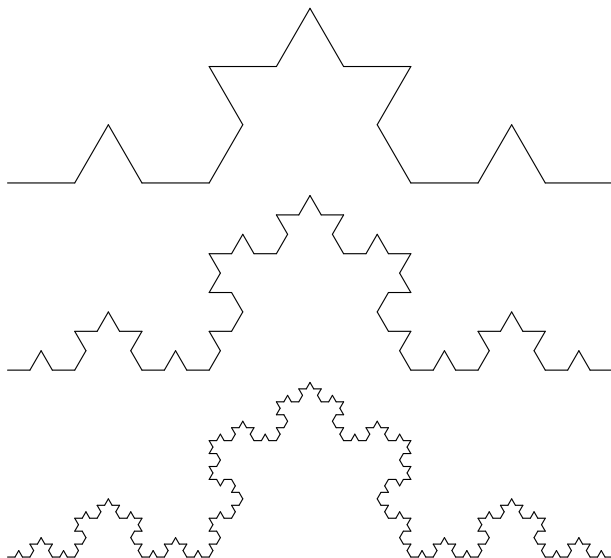
- * Si prende un segmento di lunghezza unitaria e lo si divide in tre parti uguali. La parte centrale viene tolta e sostituita da due segmenti della stessa lunghezza.
- * Si ripete la procedura su i quattro elementi così ottenuti, poi sui sedici della generazione successiva e così via un numero infinito di volte.
- * Dopo n iterazioni si hanno 4^n segmenti di lunghezza 3^{-n} , la lunghezza totale è $(4/3)^n$, quindi $D_F = \ln 4 / \ln 3 \simeq 1.2618$.

La funzione di Weierstrass

$$f(x + \Delta x) - f(x) \sim \Delta x^h, \quad h = 2 - D_F < 1$$



Costruzione della curva di von Koch

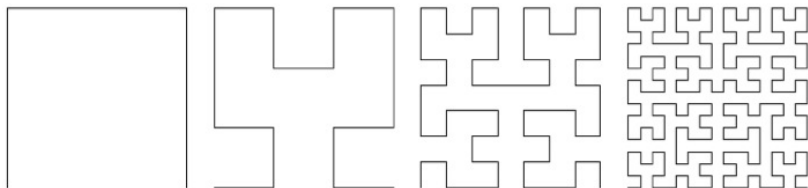


Altri "oggetti strani"

La curva di Peano

Una curva che "riempie" un quadrato

La sua costruzione iterativa



Insieme di Julia

Una semplice dinamica sul piano complesso:

$$z_{t+1} = z_t^2$$

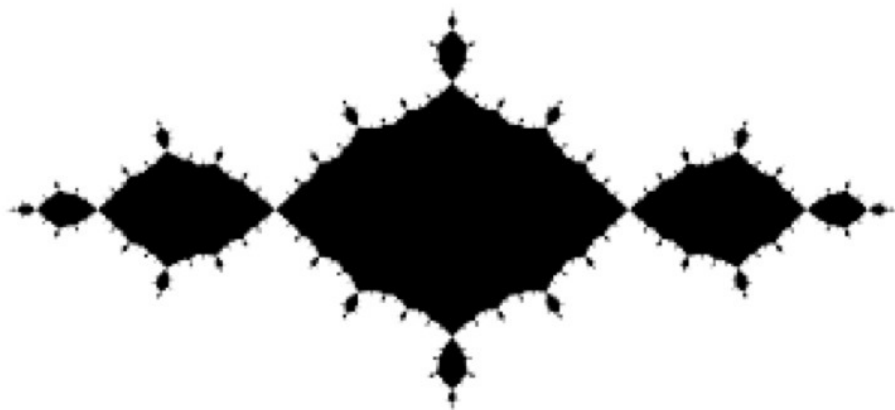
z è una variabile complessa; se z_0 è dentro il cerchio unitario allora $z_t \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$, se $|z_0| > 1$ allora z_t tende ad infinito per $t \rightarrow \infty$. Il cerchio unitario $|z| < 1$ è il bacino di attrazione di 0.

Una modifica apparentemente innocente:

$$z_{t+1} = z_t^2 + c, \quad c \neq 0$$

Per il bacino di attrazione al finito non abbiamo una semplice deformazione regolare del cerchio, bensì un oggetto i cui bordi non sono affatto lisci.

Un esempio di insieme di Julia con $c \neq 0$



1827: il botanico **Robert Brown** scoprì il fenomeno ora chiamato moto browniano: una particella colloidale immersa in un liquido, ha un comportamento molto irregolare a zig-zag.

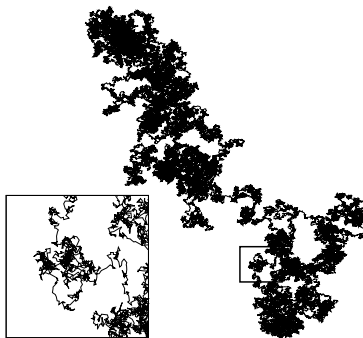
1905: **Albert Einstein** spiega fenomeno a partire dalla meccanica statistica e l'idrodinamica, e suggerisce come provare la reale esistenza degli atomi.

Per ogni componente spaziale a tempi abbastanza lunghi si ha

$$\langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle \simeq 2Dt, \quad D = \frac{T\mathcal{R}}{6\pi\eta a N_A}$$

D è il coefficiente di diffusione, \mathcal{R} , η , T , a ed N_A sono rispettivamente la costante dei gas, la viscosità del fluido, la sua temperatura, il raggio della particella colloidale ed il numero di Avogadro.

Il Moto Browniano



Un esempio di moto Browniano, la figura nel rettangolo è l'ingrandimento di una parte.

L'importanza del Moto Browniano

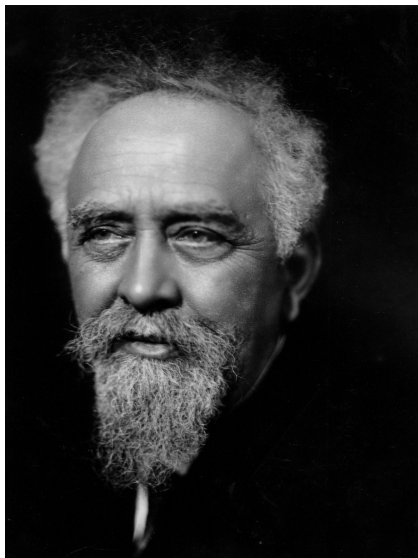
Il Moto Browniano è una magnifica **lente di ingrandimento del mondo microscopico** e permette di trovare una relazione tra quantità macroscopiche (accessibili sperimentalmente) come D , T , \mathcal{R} , η ed a , con il numero di Avogadro N_A .

La prima osservazione sperimentale di fenomeni autosimilari

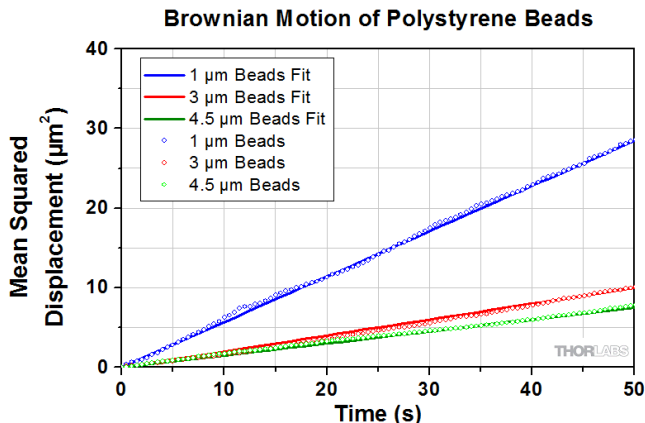
Osserviamo, ad esempio, uno di quei fiocchi bianchi che si ottengono salando dell' acqua saponata. Da lontano, il suo contorno può sembrare preciso, ma non appena ci si avvicina un po', questa precisione scompare..... Anche se si prende una lente di ingrandimento, un microscopio, l'incertezza rimarrà la stessa, ogni volta che si aumenta l'ingrandimento si vedranno apparire delle nuove anfrattosità, senza mai dare l'impressione precisa e riposante che dà ad esempio una sfera d'acciaio ben levigata.

(J. B. Perrin)

J.B. Perrin, premio Nobel per la Fisica per i suoi esperimenti sul Moto Browniano



Un esperimento (ri)feito in tempi moderni



$\langle x(t)^2 \rangle$ vs t , per particelle colloidali con diverse dimensioni.
Notare che $D \simeq \langle x(t)^2 \rangle / (2t)$ aumenta al diminuire del raggio delle particelle.

Formalizzazione matematica: processi autoaffini

* Intorno al 1920 **Norbert Wiener** introdusse quello che ora è chiamato processo di Wiener: un processo stocastico gaussiano continuo con le seguenti proprietà:

$$x(0) = 0 \quad , \quad \langle x(t) \rangle = 0 \quad , \quad \langle x(t_1)x(t_2) \rangle = \min\{t_1, t_2\} .$$

* Questo processo **non è differenziabile** e si ha che $\Delta x(\Delta t) = x(t + \Delta t) - x(t) \sim \sqrt{\Delta t}$, in termini più formali la variabile $\Delta x(\lambda \Delta t) = x(t + \lambda \Delta t) - x(t)$ ha le stesse proprietà di $\sqrt{\lambda} \Delta x(\Delta t)$.

* **Processo autoaffine con esponente di Hölder** $0 < h \leq 1$

$$\Delta x(\Delta t) \sim \Delta t^h$$

si ha che $D_F = 2 - h \in (1, 2)$, ovviamente nel caso $x(t)$ sia differenziabile, cioè $h = 1$, $D_F = 1$.

Lewis F. Richardson (1881- 1953), il grande visionario



Oltre a dare importanti contributi alla **meteorologia**, all' **analisi numerica** ed alla **fluidodinamica** Richardson è stato il primo a **tentare una descrizione matematica dei conflitti**, è stato inoltre un **pioniere dello studio dei sistemi autosimilari** ed **uno dei padri dei frattali**.

* Il primo a chiedersi **quanto è lunga la costa della Bretagna?** non fu Mandelbrot (che è considerato il padre dei frattali) bensì proprio Richardson.

* Per la lunghezza $L(\ell)$ (con risoluzione ℓ) della costa della Gran Bretagna, della frontiera terrestre della Germania, della frontiera tra Spagna e Portogallo, della costa dell'Australia e dell'Africa del Sud, osservò un comportamento del tipo

$$L(\ell) \sim \ell^{-\alpha}$$

ove α è praticamente zero per la costa dell' Africa del Sud, mentre negli altri casi è positivo e crescente con la "rugosità" della linea, in termini moderni $\alpha = D_F - 1$ (ove D_F è la dimensione frattale).

* Richardson si rese conto che non sempre i fenomeni naturali possono essere descritti da funzioni regolari.

* Si pose seriamente la domanda (a prima vista assurda)

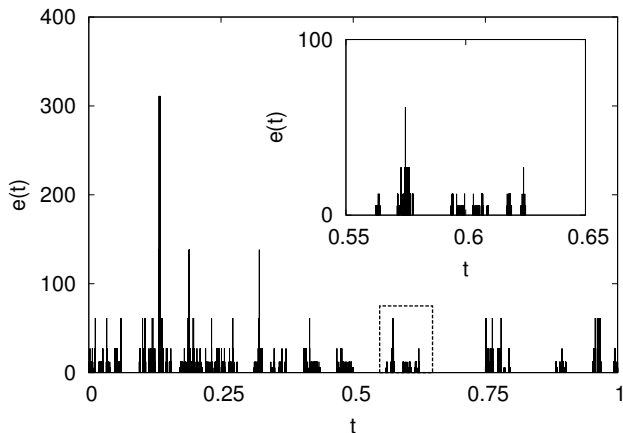
il vento ha una velocità?

* Richardson intuì la struttura autosimilare della turbolenza; ecco la sua intuizione in forma di poesia (ispirata ad una parodia di Swift):

*Grandi vortici generano piccoli vortici
che alimentano con la loro velocità;
ed i piccoli vortici generano vortici ancora più piccoli
e così via fino alla viscosità
(in senso molecolare).*

* Traduzione matematica: (Kolmogorov 1941) la turbolenza, in prima approssimazione, è descritta da un processo autoaffine con esponente di Hölder $h = 1/3$: $v(t + \Delta t) - v(t) \sim \Delta t^{1/3}$.

Autosimilarità in turbolenza



L'energia dissipata in fluido turbolento in funzione del tempo; notare come l'ingrandimento di una parte sia simile al tutto.

Benoit Mandelbrot (1924- 2014)

- * Francese di origine polacca-lituana, ha studiato matematica presso l'École Polytechnique di Parigi, e poi negli Stati Uniti conseguendo un master in ingegneria aeronautica.
- * Nel 1957 è tornato definitivamente negli Stati Uniti lavorando presso l'IBM e l'università di Yale.
- * La sua traiettoria scientifica è stata caratterizzata da interessi multiformi: linguistica, teoria della comunicazione, finanza, turbolenza, cosmologia ed altro ancora.
- * La varietà delle sue ricerche è ben testimoniata dalle cattedre che ha ricoperto: Matematica, Economia, Fisiologia, Ingegneria.

* **I meriti di Mandelbrot:**

- a) aver capito l'importanza dei fenomeni autosimilari che, ben lungi dall'essere una curiosità, spesso sono la norma;
- b) l'invenzione del termine *frattale*.

Frattali un po' ovunque

* **Caos**

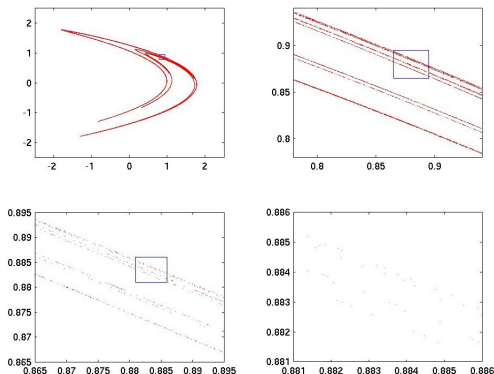
* **Turbolenza**

* **Medicina**

* **Astrofisica**

* **Geofisica**

Un esempio di attrattore frattale: la mappa (caotica) di Hénon $x_{t+1} = 1 - ax_t^2 + y_t$, $y_{t+1} = bx_t$.



L' attrattore di Hénon (per $a = 1.4$ e $b = 0.3$) ottenuto con una traiettoria molto lunga e alcuni ingrandimenti, il riquadro in basso a destra è poco dettagliato in quanto contiene pochi punti.

Sistema di Funzioni Iterate (SFI)

* \mathbf{x} un vettore in D dimensioni

* $\mathbf{W}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ una trasformazione, A è un matrice $D \times D$ e \mathbf{b} un vettore D dimensionale.

* Si possono avere N possibili trasformazioni lineari, cioè (A_1, \mathbf{b}_1) con probabilità p_1 , (A_2, \mathbf{b}_2) con probabilità p_2 , e così via fino a (A_N, \mathbf{b}_N) con probabilità p_N ; ed inoltre per ogni i si ha

$$|\mathbf{W}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{W}_i(\mathbf{y})| < s_i |\mathbf{x} - \mathbf{y}| .$$

* Vale la seguente disuguaglianza

$$s_1^{p_1} s_2^{p_2} \dots s_N^{p_N} < 1 .$$

* Iterando un grande numero di volte il seguente algoritmo

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{W}_{i(t)}(\mathbf{x}_t)$$

ove $i(t)$ è scelto indipendente da $i(t-1)$ e vale 1 con probabilità p_1 , 2 con probabilità p_2 e così via, si ottiene un'immagine ben definita.

* La forma dell'immagine dipende dalle trasformazioni $\{\mathbf{W}_i\}$, mentre la densità dei punti dipende dalle probabilità $\{p_i\}$. È possibile ottenere figure a colori associando in modo opportuno una sfumatura di colore ad una data densità di punti.

* Anche con poche trasformazioni lineari, ad esempio $N = 4$, è possibile generare immagini belle e realistiche, naturalmente è necessaria una certa pratica per l'utilizzo del metodo.

* Il metodo si usa anche per **comprimere le immagini**.

Un albero frattale



L'immagine di un albero ottenuta con SFI.

Architettura fantasy



- * B.B. Mandelbrot *Gli oggetti frattali* (Einaudi, 1987)
- * L.Peliti e A.Vulpiani "Arrivano i frattali", Sapere, Aprile 1985, pag. 21
- * G. A. Edgar (Curatore) *Classics on Fractals* (Westview Press Inc, 2003)
- * K. Falconer *Fractal geometry: mathematical foundations and applications* (John Wiley & Sons, 2004)
- * O.M. Ashford *Prophet or Professor? The Life and Work of Lewis Fry Richardson* (Adam Hilger, 1985)
- * A.Vulpiani "Lewis Fry Richardson: scienziato visionario e pacifista" Lettera Matematica **90**, 23 (2014);
- * G. Boffetta, A. Mazzino and A. Vulpiani "Twenty- five years of multifractals in fully developed turbulence: a tribute to Giovanni Paladin" J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 363001 (2008)

- * J. Perrin *Gli atomi* (Editori Riuniti, 2014)
- * D.L. Turcotte *Fractals and chaos in geology and geophysics* (Cambridge University Press, 1997)
- * A. Gabrielli, F. Sylos Labini, M. Joyce and L. Pietronero *Statistical Physics for Cosmic Structures* (Springer- Verlag, 2006)
- * B.J. West *Fractal physiology and chaos in medicine* (World Scientific, 2013)
- * M.F. Barnsley and L. Hurd *Fractal Image Compression* (A.K. Peters/CRC Press, 1993)
- * H.O. Peitgen and P. H. Richter *The beauty of fractals: images of complex dynamical systems* (Springer Science & Business Media, 2013)