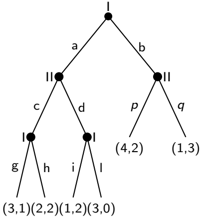
Strategia

Per applicare il metodo di induzione a ritroso, è necessario specificare le scelte fatte dai giocatori in ogni nodo del gioco. Ogni giocatore deve decidere che cosa fare in ogni nodo etichettato col suo nome. Questa motiva la definizione.

> Dato un gioco a informazione perfetta descritto da un albero, si chiama strategia per il giocatore i la specificazione di un azione da prendere in ogni nodo etichettato col nome di i, si chiama profilo di strategie la specificazione di una strategia per ogni giocatore.

Esempio



Forma strategica:

	cp	cq	dp	dq
agi	(3, 1)	(3, 1)	(3, 1)	(3, 1)
agl	(3, 1)	(3, 1)	(3, 0)	(3, 0)
ahi	(2, 2)	(2, 2)	(3, 1)	(3, 1)
ahl	(2, 2)	(2, 2)	(3, 0)	(3, 0)
bgi	(4, 2)	(1, 3)	(4, 2)	(1, 3)
bgl	(4, 2)	(1, 3)	(4, 2)	(1, 3)
bhi	(4, 2)	(1, 3)	(4, 2)	(1, 3)
bhl	(4, 2)	(1, 3)	(4, 2)	(1, 3)

Un po' di esempi 1

Esempio 1 *La battaglia dei sessi*
Una coppia deve decidere, come ogni anno, se trascorrere le vacanze al mare o in montagna. Vogliono passare le vacanze assieme, ma lei ha molta voglia di andare al mare e mentre lui ama fare lunghe e noiose passeggiate: che decisione prenderanno?

Esempio 2 *Le mucche al pascolo*
In una località di campagna ci sono degli allevatori le cui mucche pascolano su un terreno comune formato da un certo numero di campi. Ogni mattina ciascun allevatore decide quante mucche far uscire a pascolare. Ovviamente, più mucche manda al pascolo più latte può sperare di avere la sera. Ogni mucca occupa un campo brucando l'erba. Più mucche ci sono, meno erba rimane per ciascuna di loro, e la loro produzione di latte ne risente. Che devono fare i contadini?

Esempio 3 *Come ottenere più clienti (Hotelling game)*
In una spiaggia lunga 1 km affollata in modo uniforme dai bagnanti, alcuni gelatai devono decidere in quale punto aprire i loro chioschi. I gelatai vendono tutti lo stesso tipo di gelato e l'unico criterio con cui le persone decideranno in quale chiosco recarsi è la loro distanza dal chiosco, mentre ogni gelataio cerca di avere più clienti possibili.

Un po' di esempi 2

Esempio 4 *Il duopolio*
Ci sono due imprese sul mercato, che producono lo stesso bene. In questa situazione di duopolio, le imprese concorrono a formare il prezzo del bene sul mercato, perché questo è una funzione decrescente rispetto alla quantità totale di bene immesso sul mercato: più ce n'è, meno costa. Quanto produrranno le due imprese?

Esempio 5 *Problemi di traffico*
Immaginiamo che ci siano due città, come ad esempio Milano e Torino, e che ogni mattina 4000 persone devono spostarsi da Torino verso Milano per motivi di lavoro. Ci sono vari itinerari possibili. Quali sceglieranno gli automobilisti? automobilisti? Conviene sempre costruire percorsi alternativi?

Esempio 6 *El farol bar*
Un certo numero di persone, diciamo 100 per semplicità, decidono, in maniera indipendente e simultanea, se andare in un bar che oltre all'aperitivo propone musica dal vivo. Lo spazio nel bar è limitato, e la serata è piacevole solo se meno del 60% della popolazione è presente. Non è possibile stabilire a priori quanti andranno al bar, per cui ognuno decide a seconda se pensa che quella sera al bar ci vadano più o meno di 60 persone. Che fare?

Altri giochi famosi

Esempio 7 *Ultimatum game*
Un padre (un po' sciagurato), avendo comprato una torta per i suoi due figli, dice al primo: "offri una frazione qualunque della torta a tuo fratello; se lui accetta la divido secondo il vostro accordo, se invece rifiuta la torta me la mangio io". Ora la domanda è, che faranno i due fratelli? Cosa cambia se il padre dice di scrivere su un foglietto a entrambi che porzione ne vogliono, con la regola che non avranno nulla se la somma eccede l'unità?

Esempio 8 *Il gioco dei beni pubblici*
In una città i cittadini sono invitati a versare una cifra $c \in [0, M]$. Il Sindaco raccoglie la cifra totale Q, e la investe con un rendimento percentuale $a > 1$, ottenendo aQ, che poi ridistribuisce in maniera uguale a tutti i cittadini. Che cifra verseranno i cittadini?

Esempio 9 *Il dilemma del viaggiatore*
Una compagnia aerea ha perso i bagagli di due viaggiatori, che avevano in valigia esattamente le stesse cose. Dice loro che risarcisce il danno, che deve essere quantificato. L'intervallo delle richieste possibili è $[300, 600]$: possono richiedere ogni intero r di Euro purché $300 \leq r \leq 600$. La compagnia paga quanto viene richiesto se la cifra è la stessa, la cifra minore se sono diverse, ma con un premio di $x > 1$ Euro per chi ha fatto l'offerta più bassa, Euro che vengono sottratti dal pagamento di chi ha fatto l'offerta più alta.

Gioco non cooperativo

Definizione

Un gioco (non cooperativo) in forma strategica è individuato da un insieme N di n giocatori, da n insiemi, uno per giocatore, ogni insieme contiene le strategie che il giocatore può adottare, e da n funzioni di utilità, che rappresentano le preferenze di ogni giocatore su tutti i possibili esiti del gioco; la funzione di utilità di ogni giocatore dipende non solo dalla strategia che sceglie, ma anche da quelle scelte dagli altri.

Strategie

1. Nell'Esempio della coppia le strategie sono due: andare al mare oppure andare in montagna
2. Nell'Esempio dei contadini le strategie sono il numero di mucche da mandare al pascolo
3. Nell'Esempio dei gelatai in spiaggia possiamo fissare l'intervallo $[0, 1]$ come insieme delle strategie dei due gelatai
4. Nell'Esempio del duopolio le strategie sono individuate da un numero reale non negativo q che rappresenta la quantità di bene che l'impresa immette sul mercato
5. Nell'Esempio del traffico le strategie dei giocatori sono tutti gli itinerari possibili che li portano da Torino a Milano
6. Nell'Esempio del bar le strategie sono due: o andare al bar oppure restare a casa

Meno evidenti sono le funzioni di utilità...

Primo criterio di razionalità

> Un giocatore non sceglie mai una strategia x, se ne esiste un'altra, y, che gli permette di ottenere di più, qualunque sia il comportamento di tutti gli altri giocatori.

Si dice che la strategia x è strettamente dominata dalla strategia y, e quindi il principio di sopra asserisce che nessun giocatore razionale gioca una strategia strettamente dominata.

Un esempio molto famoso

Due malfattori vengono catturati dopo una rapina, e portati davanti al giudice, che dice loro che la pena, se confesseranno, è di 5 anni; se invece uno solo confessa la partecipazione di entrambi alla rapina, il pentito sarà liberato mentre all'altro saranno date alcune aggravanti che portano la pena a 7 anni. Infine, se nessuno confessa, verranno condannati a 1 anno di galera per un reato minore, dal momento che il giudice teme che in tribunale possano essere assolti, quindi vuole evitare il processo.

	Confessa	Non confessa
Confessa	(5,5)	(0,7)
Non confessa	(7,0)	(1,1)

Non confessare?

	Confessa	Non confessa
Confessa	(5,5)	(0,7)
Non confessa	(7,0)	(1,1)

Ecco il ragionamento del giocatore:

1. Se il mio socio confessa: se io confesso, faccio 5 anni di galera, se non confesso ne faccio 7, mi conviene confessare;
2. Se il mio socio non confessa: se confesso sono libero, se non confesso faccio 1 anno di galera, mi conviene confessare.

Non confessare è una strategia strettamente dominata!

Un principio debole, ma con conseguenze!

Due catene di abbigliamento rivali vogliono aprire due nuovi punti vendita specializzati in prodotti estivi o invernali. Le due catene vogliono aprire i loro negozi nella stessa città per dividersi il mercato e farsi concorrenza diretta. Se aprissero il negozio a Genova dedicandosi ai prodotti invernali avrebbero un fatturato di 1 milione all'anno, se uno dei due offrisse vestiti estivi invece guadagnerebbe 2 milioni e se entrambi si occupassero di abbigliamento estivo potrebbero guadagnare 5 milioni di euro a testa. Se invece aprissero il negozio a Milano, dedicandosi entrambi ai prodotti invernali guadagnerebbero 4 milioni, dedicandosi entrambi ai prodotti estivi ne guadagnerebbero 6 e differenziandosi ne guadagnerebbero 3 e 7.

	Estivo	Invernale
Estivo	(5,5)	(2,1)
Invernale	(1,2)	(1,1)

Il gioco a Milano si rappresenta invece così

	Estivo	Invernale
Estivo	(6,6)	(3,7)
Invernale	(7,3)	(4,4)

Il principio implica che ai due giocatori conviene giocare a Genova nonostante, qualunque cosa facciano, le utilità sono maggiori per entrambi a Milano!

Un'altra conseguenza sorprendente

Due proprietari di due bar che si trovano nello stesso quartiere di una piccola città devono decidere se acquistare dei macchinari per iniziare a produrre e vendere anche il gelato o no. Se comprano le macchine per il gelato, la clientela di ciascuno aumenta facendo crescere i loro guadagni del 5%. Possiamo descrivere il gioco con questa tabella, in cui utilizziamo la percentuale di aumento dei guadagni come utilità dei giocatori:

	Gelato	Non Gelato
Gelato	(5,5)	(5,0)
Non Gelato	(0,5)	(0,0)

Immaginiamo adesso che i due giocatori venga data una terza possibilità: acquistare un nuovo macchinario per preparare il frozen yogurt. Se solo uno dei due vende il nuovo prodotto, ruba tutta la nuova clientela aumentando il suo guadagno del 6%. Ecco come rappresentare questa nuova situazione.

	Gelato	Non Gelato	Frozen Yogurt
Gelato	(5,5)	(5,0)	(0,6)
Non Gelato	(0,5)	(0,0)	(0,6)
Frozen Yogurt	(6,0)	(6,0)	(3,3)

Applicando il principio di eliminazione delle strategie strettamente dominate, si vede il fatto sorprendente che ai giocatori non conviene avere più strategie a disposizione!

Oltre il principio base

È molto difficile che arrivare a determinare un esito del gioco col metodo di eliminazione delle strategie dominate. Spesso, una strategia x è meglio della strategia y se gli altri giocatori fanno certe scelte, e viceversa se gli altri fanno altre scelte. Questo implica che nessuna delle due domina l'altra. Occorre un nuovo criterio.

Nella battaglia dei sessi:

	Mare	Montagna
Mare	(10,5)	(2,0)
Montagna	(0,2)	(5,10)

Nessun giocatore ha strategia dominata!

L'equilibrio di Nash

Definizione

Il profilo di strategie $(\bar{x}, \bar{y})$ si dice di equilibrio (di Nash) per il gioco $(X, Y, f, g : X \times Y \to \mathbb{R})$ se valgono le due relazioni seguenti:

- $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y})$ *per ogni* $x \in X$;
- $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y)$ *per ogni* $y \in Y$.

Nessun giocatore ha interesse a deviare unilateralmente da un profilo di equilibrio.

Principio del tutto coerente con l'ipotesi che il giocatore pensa per sé

Strategie dominanti e equilibri di Nash

Se $\bar{x}$ è una strategia dominante per il primo giocatore, rappresenta una scelta ottimale qualunque sia la scelta del secondo giocatore; se $(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio di Nash, allora $\bar{x}$ è ottimale per il primo giocatore, a condizione che il secondo giochi $\bar{y}$.

Se $\bar{x}$ è una strategia dominante per il primo giocatore, allora il secondo sa che il primo la gioca, quindi lui massimizza la sua funzione di utilità $g(\bar{x}, \cdot)$ e se $\bar{y}$ è uno di questi massimi, allora $(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio di Nash.

Come trovare gli equilibri di Nash

$(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio di Nash se e solo se:

- $\bar{x}$ è una risposta ottimale del primo giocatore a $\bar{y}$, cioè $\bar{x}$ massimizza la funzione $f(\cdot, \bar{y})$;
- $\bar{y}$ è una risposta ottimale del secondo giocatore a $\bar{x}$, cioè $\bar{y}$ massimizza la funzione $g(\bar{x}, \cdot)$.

Indicando con BR le risposte ottimali dei giocatori $BR(x, y) =$ (risposta ottimale del primo a y, risposta ottimale del secondo a x, allora $(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio di Nash se e solo se $(\bar{x}, \bar{y}) \in$BR$(\bar{x}, \bar{y})$.

In tal caso si dice che $(\bar{x}, \bar{y})$ è un punto fisso per BR.

La battaglia dei sessi

Esempio 1

	Mare	Montagna
Mare	(10,5)	(2,0)
Montagna	(0,2)	(5,10)

Gli equilibri di Nash sono due, con esiti $(10, 5)$ e $(5, 10)$. Il primo giocatore preferisce il primo esito, il secondo giocatore preferisce il secondo esito. . .

Chiamate al cellulare

Esempio 9 Due persone stanno parlando piacevolmente al cellulare, quando cade la linea. Che fare? Richiamare o aspettare che l'altro richiami?

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (1,1) \\ (1,1) & (0,0) \end{pmatrix}$$

Ovvero, quando ci sono più equilibri c'è il problema del coordinamento dei giocatori.

Hotelling game

Esempio 3 In una spiaggia lunga 1 km affollata in modo uniforme dai bagnanti, alcuni gelatai devono decidere in quale punto aprire i loro chioschi. I gelatai vendono tutti lo stesso tipo di gelato e l'unico criterio con cui le persone decideranno in quale chiosco recarsi è la loro distanza dal chiosco, mentre ogni gelataio cerca di avere più clienti possibili.

In questo gioco c'è un unico equilibrio di Nash: i due gelatai si dispongono esattamente a metà della spiaggia.

Se i gelatai sono tre, si vede che non esiste nessun equilibrio di Nash.

Se sono 4 o 5, c'è ancora un solo equilibrio di Nash (a parte permutazioni)

Se sono 6 o più, ci sono infiniti equilibri di Nash!

Un problema di traffico

Esempio 4

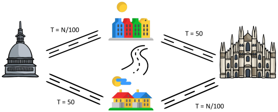


Figure: Viaggiando da Milano a Torino

Ci sono 4.000 persone che ogni mattina devono andare da Torino a Milano utilizzando le strade del disegno di sopra. In due tratti il tempo di percorrenza è fisso, nell'altro dipende dal traffico: in minuti questo risulta $\frac{N}{100}$, dove N indica il numero di auto che sono sulla strada. La strada che connette i due paesi al momento è chiusa. In questo caso consideriamo funzioni di costo per i giocatori, assumendo che desiderino passare meno tempo possibile per strada. L'unico equilibrio di nash allora è che 2.000 passino di sopra e 2.000 passino di sotto. Ciascuno impiega 20+50=70 minuti.

Che succede se si apre la strada tra i due paesi, il cui tempo di percorrenza è di 5 minuti?

Paradosso di Braess

El Farol bar

Esempio 5 Un certo numero di persone, diciamo 100 per semplicità, decidono, in maniera indipendente e simultanea, se andare in un bar che oltre all'aperitivo propone musica dal vivo. Lo spazio nel bar è limitato, e la serata è piacevole solo se meno del 60% della popolazione è presente. Non è possibile stabilire a priori quanti andranno al bar, per cui ognuno decide a seconda se pensa che quella sera al bar ci vadano più o meno di 60 persone.

In questo gioco tutti e soli gli esiti che danno 60 persone al bar e 40 a casa sono un equilibrio di Nash.

Situazione asimmetrica per giocatori simmetrici...

Ultimatum game

Esempio 7 Un padre ha comprato una torta per i suoi due figli; va dal maggiore e gli dice: "offri una frazione qualunque della torta a tuo fratello; se lui accetta la divido secondo il vostro accordo, se invece rifiuta la torta me la mangio io".

In questo gioco prima di tutto occorre specificare che cosa sono le strategie.

- Per il figlio maggiore una strategia è $x \in [0, 1]$, che rappresenta la porzione di torta che vuole per sé (offre quindi $1 - x$)
- Per il figlio minore una strategia è scegliere tra accettare o rifiutare per ogni offerta possibile $1 - x$ del maggiore.

In questo gioco possiamo usare l'induzione a ritroso, che dà come risultato:

Induzione a ritroso:

L'induzione a ritroso dà come risultato:

- Il figlio maggiore offre 0
- Il figlio minore accetta ogni offerta.

L'esito del gioco è che il figlio maggiore ottiene tutta la torta.

Ci sono altri equilibri di Nash in questo gioco?

Gli equilibri di Nash

Ogni divisione $(x, 1-x)$ è esito di equilibri di Nash?

- Il figlio maggiore offre $1-x$
- Il figlio minore . . . .

Utilità ed equilibrio

Esempio 9 *Il dilemma del viaggiatore* Una compagnia aerea ha perso i bagagli di due viaggiatori, che avevano in valigia esattamente le stesse cose. Dice loro che risarcisce il danno, che deve essere quantificato. L'intervallo delle richieste possibili è $[300, 600]$: possono richiedere ogni intero r di Euro purché $300 \leq r \leq 600$. La compagnia paga quanto viene richiesto se la cifra è la stessa, la cifra minore se sono diverse, ma con un premio di $p > 1$ Euro per chi ha fatto l'offerta più bassa, Euro che vengono sottratti dal pagamento di chi ha fatto l'offerta più alta.

Se un giocatore dichiara n e l'altro k, distinguiamo tre casi:

- $k < n$: in tal caso le utilità dei giocatori sono $k + x$ e $k - x$. Non può esserci equilibrio di Nash, offrire n non è una miglior risposta all' offerta k
- $k = n > 300$. Se un giocatore gioca k, offrire k non è una miglior risposta, la dichiarazione $k - 1$ porta a un'utilità $k - 1 + x > k$
- $k = n = 300$ Unico equilibrio di Nash!

La morra cinese

Esempio 10 *Carta, sasso,forbici*

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (0,0) & (1,-1) \\ (1,-1) & (-1,1) & (0,0) \end{pmatrix}$$

Ha un equilibrio di Nash?

Ma forse si può ancora dire qualcosa lo stesso...

Non giocare a caso

Che succede se decidessi di tirare una moneta e se viene testa gioco forbici, se viene croce gioco carta?

Che fareste?

Strategie miste

Dal momento che non ha senso giocare sempre la stessa strategia, ci si può chiedere se è possibile scegliere con che probabilità giocare le strategie, in maniera ottimale.

Si definisce allora l'estensione in strategie miste del gioco, e si cerca di stabilire se per questo gioco esteso esistono equilibri di Nash.

Un teorema, dimostrato da Nash stesso, garantisce che ogni gioco finito ha equilibrio, pur di considerare anche le strategie miste.

Ancora su CSF

Carta sasso forbici è un esempio di gioco a somma zero:

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (0,0) & (1,-1) \\ (1,-1) & (-1,1) & (0,0) \end{pmatrix}$$

La somma delle utilità dei giocatori è nulla in ogni esito possibile del gioco, in questo caso le utilità possono essere interpretate come pagamenti.

I giochi a somma zero hanno proprietà molto speciali, tra cui quella che, anche in presenza di molteplici equilibri, il risultato finale è sempre lo stesso in termini di utilità.

CSF è un gioco equo, quindi come naturale all'equilibrio il risultato è 0 per entrambi (che denota il pareggio); inoltre esiste un'unica strategia di equilibrio ed è di giocare con uguale probabilità le tre strategie.

Ovviamente questo va inteso in media

Un ultimo gioco, equo

Consideriamo questo gioco equo:

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (3,-3) & (-2,2) & (0,0) \\ (-3,3) & (0,0) & (0,0) & (4,-4) \\ (2,-2) & (0,0) & (0,0) & (-3,3) \\ (0,0) & (-4,4) & (3,-3) & (0,0) \end{pmatrix}$$

Si dimostra che sono equilibri di Nash tutte le coppie di quaterne della forma $(p, 0, 0, 1-p)$ con $\frac{4}{7} \leq p \leq \frac{3}{5}$

Ad esempio un equilibrio di Nash è $[(\frac{4}{7}, 0, 0, \frac{3}{7}), (\frac{3}{5}, 0, 0, \frac{2}{5})]$