

LA RELATIVITÀ GENERALE: UN CAPOLAVORO IN TRE ATTI

di Vincenzo Barone

Vincenzo Barone ✉
barone@to.infn.it
Università del Piemonte orientale



Insegna Fisica teorica presso l'Università del Piemonte orientale. È autore di numerose pubblicazioni nel campo della Fisica delle interazioni fondamentali e di un manuale di relatività (*Relatività. Principi e applicazioni*, Bollati Boringhieri, 2004). Fa parte del comitato scientifico di *Asimmetrie*, rivista divulgativa dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, e collabora con il supplemento domenicale de *Il Sole 24 Ore*. Tra i suoi libri: *L'ordine del mondo. Le simmetrie in fisica da Aristotele a Higgs* (Bollati Boringhieri, 2013), *Albert Einstein. Il costruttore di universi* (Laterza, 2016), *La matematica della natura* (con G. Giorello, il Mulino, 2016). Ha curato la riedizione degli articoli di Einstein sulla relatività (*Le due relatività*, Bollati Boringhieri, 2015).

La lezione inaugurale che Einstein tenne il 2 luglio 1914 davanti all'Accademia Prussiana delle Scienze, in occasione del suo insediamento come nuovo membro del sodalizio, destò non poche perplessità tra i presenti, a cominciare dal più famoso di loro, Max Planck, che nei mesi precedenti si era mosso in prima persona per convincere il trentacinquenne fisico di Ulm a trasferirsi a Berlino. Gli accademici speravano che nella capitale Einstein si dedicasse al tema di maggiore attualità della ricerca in quel momento, la teoria dei quanti; lui invece ribadì il suo interesse per la generalizzazione della relatività. Lo scopo del fisico teorico, sostenne nella lezione, è di scoprire i "principi generali" della natura, e spiegò che, mentre nell'ambito dei fenomeni quantistici tale obiettivo era lontano e i fisici quindi

non sapevano come utilizzare i fatti empirici a loro disposizione (trovandosi in una situazione simile a quella degli astronomi prima di Newton), nel caso della teoria della relatività un principio – quello dell'invarianza delle leggi fisiche rispetto a cambiamenti del sistema di riferimento inerziale – era già stato formulato e aveva ottenuto delle conferme sperimentali, ma non sembrava del tutto soddisfacente, perché attribuiva un ruolo speciale e ingiustificato ai sistemi inerziali.

Nella sua risposta al discorso di Einstein, Planck osservò che il carattere privilegiato del moto uniforme non gli pareva un problema da risolvere. "*Si potrebbe con altrettanta fondatezza – disse – assumere il punto di vista opposto e considerare la posizione privilegiata del moto uniforme proprio come una caratteristica molto importante e preziosa della teoria*". Dopo tutto, argomentava, "*dovremmo forse considerare insoddisfacente la legge di attrazione di Newton perché la seconda potenza vi gioca un ruolo preferenziale?*" [1].

L'opinione di Planck era quella prevalente tra i fisici. Einstein la pensava in maniera del tutto diversa. L'esistenza di una classe privilegiata di sistemi di riferimento gli appariva inammissibile e ai suoi occhi costituiva un problema anche il fatto che la legge della gravità non fosse assoggettata a un principio generale, come quello di relatività. Il suo credo, espresso esplicitamente nell'*Autobiografia scientifica* del 1949, ma abbracciato fin dai suoi esordi in Fisica, era cristallino: "*La natura è costituita in modo tale che è possibile logicamente stabilire leggi fortemente determinate, nell'ambito delle quali si presentino*

solo costanti definite in modo completamente razionale (non costanti, quindi, il cui valore numerico possa essere cambiato senza distruggere la teoria)” [2]. Da questo punto di vista, la relatività ristretta, che pure rappresentava il completamento del grande programma dell'elettrodinamica di Faraday, Maxwell e Lorentz, non poteva costituire un punto d'arrivo. “Una volta giustificata l'introduzione del principio ristretto di relatività, ogni mente portata alla generalizzazione sentirà la tentazione di azzardare il passo verso il principio generale di relatività”, si legge nella *Relatività: esposizione divulgativa* [3].

La relatività ristretta, in effetti, ha due limitazioni. Innanzitutto, come già accennato, il principio di relatività del 1905 si applica soltanto ai sistemi inerziali (quelli in moto uniforme): una restrizione non trascurabile sul piano empirico, dato che i sistemi di riferimento in cui conduciamo tutti i nostri esperimenti non sono inerziali, bensì accelerati. Ma ciò che disturba di più Einstein è il carattere non operativo della nozione di sistema inerziale: non esiste infatti alcuna procedura sperimentale per stabilire se un determinato sistema di riferimento sia inerziale o meno. Il principio ristretto di relatività viola quindi quel criterio epistemologico che Einstein chiama “*clausola del significato*” – la condizione per cui le teorie fisiche devono ammettere “*solo concetti e distinzioni cui si possano associare, senza ambiguità, fatti osservabili*” [4].

La seconda importante limitazione della relatività ristretta risiede nel fatto che questa teoria, nata per risolvere il conflitto tra le leggi dell'elettromagnetismo e le proprietà di invarianza delle leggi della Meccanica, non è in grado di descrivere la gravità. Einstein si accorge del problema nel 1907 mentre sta scrivendo un articolo di rassegna sulla relatività. “*Mi resi conto – ricorderà nel 1922 in una conferenza all'Università di Kyoto [5] – che tutti i fenomeni naturali potevano essere trattati in termini di relatività ristretta, a eccezione della legge di gravitazione. Provai un profondo desiderio di comprendere le ragioni sottostanti [...]. Non mi soddisfaceva per nulla il fatto che, nonostante la relazione fra l'inerzia e l'energia fosse derivata così elegantemente [nell'ambito della relatività ristretta], non vi fosse invece alcuna relazione fra l'inerzia e il peso. Sospettai che quest'ultima relazione fosse irraggiungibile con i mezzi della relatività ristretta*” [6]. Tutti i tentativi di costruire una teoria gravitazionale coerente con i postulati della relatività ristretta si rivelarono in effetti infruttuosi. Come dimostra l'atteggiamento di Planck, le motivazioni teoriche alla base del programma di generalizzazione della relatività generale apparivano tali solo allo stesso Einstein. Né esistevano urgenti ragioni sperimentali che spingessero in direzione di una nuova teoria della gravità. L'unica evidenza osservativa non immediatamente inquadrabile nello schema newtoniano era lo spostamento anomalo del perielio di Mercurio. Qualcuno aveva ipotizzato correzioni o modificazioni della legge della gravitazione di Newton, ma la spiegazione che pareva più plausibile era che l'ano-

malia in questione fosse dovuta all'attrazione newtoniana esercitata da una distribuzione diffusa di materia tra Mercurio e il Sole.

La costruzione della teoria generale della relatività fu, dunque, un'impresa essenzialmente solitaria [7] (Einstein vi coinvolse solo due amici fidati, Michele Besso e Marcel Grossmann), durata otto anni. Lo storico della Fisica John Stachel ha parlato, in proposito, di “*un'opera in tre atti*” [8]. Nella genesi della teoria, in effetti, sono tre i momenti cruciali: il 1907, quando Einstein enuncia il principio di equivalenza; il 1912, quando intuisce la natura geometrica della gravità e identifica il potenziale gravitazionale con il tensore metrico; il 1915, quando completa la teoria ottenendo le equazioni del campo gravitazionale.

Il primo atto: Berna 1907-Praga 1911

“*Stavo seduto in poltrona nell'Ufficio brevetti a Berna quando all'improvviso mi ritrovai a pensare: 'Se una persona cade liberamente, non avverte il proprio peso.' Rimasi stupefatto. Questo pensiero, così semplice, mi colpì profondamente, e ne venni sospinto verso una teoria della gravitazione*” [9]. Così Einstein rievoca, nella conferenza di Kyoto del 1922, quello che in un'altra occasione chiamerà “*il pensiero più felice della mia vita*” [10]. L'anno è il 1907 e Einstein è stato incaricato da Johannes Stark di scrivere un articolo di rassegna sulla teoria relativistica per lo *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*. La quinta sezione di questo corposo saggio [11], intitolata “Principio di relatività e gravitazione”, segna l'inizio del lungo e tortuoso percorso verso la relatività generale.

Il punto di partenza del ragionamento einsteiniano è il fatto ben noto, e osservato per la prima volta da Galileo, che tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione. Ciò è dovuto alla circostanza (sperimentalmente verificata con grandissima precisione [12]) che la massa gravitazionale di un oggetto – quella che compare nella legge di gravità e che determina il peso dei corpi – è uguale alla massa inerziale – quella che compare nelle equazioni del moto (il cosiddetto “principio di equivalenza debole”). Questa uguaglianza – che nella Fisica newtoniana appare fortuita [13] – fa sì che la forza gravitazionale, a differenza delle altre forze fondamentali, sia proporzionale alla massa inerziale dei corpi e sia perciò simile alle forze inerziali che si manifestano nei sistemi di riferimento accelerati.

Supponiamo allora, seguendo uno dei famosi esperimenti ideali di Einstein [14], di trovarci all'interno di una cabina chiusa, in caduta libera sotto l'effetto di un campo gravitazionale statico e omogeneo. Dal momento che tutti i corpi presenti all'interno della cabina cadono con la stessa accelerazione, non avremo modo, con i nostri esperimenti, di evidenziare la gravità: la forza inerziale dovuta all'accelerazione del sistema cancella infatti la forza gravitazionale. La situazione è indistinguibile da quella in cui la cabina è lontana da ogni influenza gravitazionale e non è soggetta ad accelerazioni (Fig. 1). Ana-

La relatività generale

logamente, se ci trovassimo all'interno di un razzo accelerato verso l'alto, sentiremmo una forza diretta verso il basso simile alla gravità, perché l'accelerazione del razzo simulerebbe l'effetto di un campo gravitazionale (Fig. 2). Accelerazione del sistema di riferimento e gravità sono dunque localmente interscambiabili: l'una compensa o simula l'altra.

Gli esempi appena illustrati mostrano come, in una regione limitata dello spazio-tempo, la forza gravitazionale sia indistinguibile da una forza inerziale e possa quindi essere cancellata o simulata da questa. Si considerino due sistemi di riferimento, l'uno, K , in quiete in un campo gravitazionale omogeneo \vec{g} , l'altro, K' , in moto con accelerazione costante $\vec{a} = -\vec{g}$. "Allo stato attuale dell'esperienza – scrive Einstein nell'articolo del 1907 – non abbiamo ragione di supporre che i due sistemi differiscano sotto qualunque aspetto, [...] pertanto postuleremo la completa equivalenza fisica di un campo gravitazionale e della corrispondente accelerazione del sistema di riferimento" [15]. L'importanza pratica del principio di equivalenza sta nel fatto che permette di predire gli effetti di un campo gravitazionale omogeneo anche se non si possiede una teoria della gravitazione [16]. Basta sostituire il sistema di riferimento in cui agisce il campo gravitazionale con un sistema accelerato equivalente e calcolare, in questo sistema, gli effetti delle forze inerziali. È così che già nel 1907, e più approfonditamente nel 1911, dopo un silenzio sulla relatività durato tre anni e mezzo [17], Einstein prevede alcuni importanti fenomeni: lo spostamento verso il rosso, la dilatazione gravitazionale del tempo, la deflessione della luce.

Il metodo adottato per rendere il principio di equivalenza uno strumento pratico di calcolo è ingegnoso: Einstein introduce, accanto ai due sistemi di riferimento K (in quiete e soggetto a un campo gravitazionale omogeneo) e K' (in moto uniformemente accelerato), un terzo sistema, K_0 , in moto con velocità costante rispetto a K e coincidente in un istante dato con K' . K e K_0 sono legati da trasformazioni di Lorentz, mentre, in prima approssimazione, le fre-

quenze e i tempi misurati in K_0 possono essere identificati con le corrispondenti quantità misurate in K' .

Supponiamo, per esempio, che nel sistema di riferimento K' , in moto verso l'alto con accelerazione costante a , una sorgente luminosa emetta un raggio di luce di frequenza ν diretto lungo la verticale verso un rivelatore posto in basso, a distanza d . Sia K_0 un sistema di riferimento inerziale in moto anch'esso verso l'alto e solidale con K' nell'istante in cui la luce viene emessa. Rispetto a K_0 il ricevitore va incontro alla sorgente con una velocità che nell'istante in cui arriva il raggio vale $u = a(d/c)$. A causa dell'effetto Doppler la frequenza della luce misurata dal rivelatore vale (considerando solo la correzione al primo ordine) $\nu' = \nu(1 + u/c) = \nu(1 + ad/c^2)$. Nel percorrere il dislivello d la luce ha quindi subito una variazione relativa di frequenza $\delta\nu/\nu = ad/c^2$. Poiché il sistema di riferimento K' è equivalente a un sistema K soggetto a un campo gravitazionale omogeneo di intensità $g = a$ diretto verso il basso, anche la gravità produce una variazione di frequenza della luce, che vale:

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{gd}{c^2} = \frac{\delta\Phi}{c^2}$$

dove $\delta\Phi = gd$ è la differenza tra il potenziale gravitazionale nel punto in cui è collocata la sorgente e quello nel punto in cui è collocato il ricevitore. Quando la luce scende lungo un campo gravitazionale come quello terrestre, subisce uno spostamento verso il blu, cioè verso frequenze maggiori; quando invece risale il campo, subisce uno spostamento verso il rosso, cioè verso frequenze minori [18].

La variazione delle frequenze è strettamente connessa al fatto che la gravità influenza lo scorrere del tempo. L'apparente paradosso del ricevitore che si vede arrivare, in una trasmissione continua di luce, un numero di periodi per unità di tempo diverso dal numero di periodi per unità di tempo emessi dalla sorgente si spiega con il fatto che l'unità di tempo misurata da orologi nei punti di emissione e di ricezione della luce è diversa. Einstein dimo-

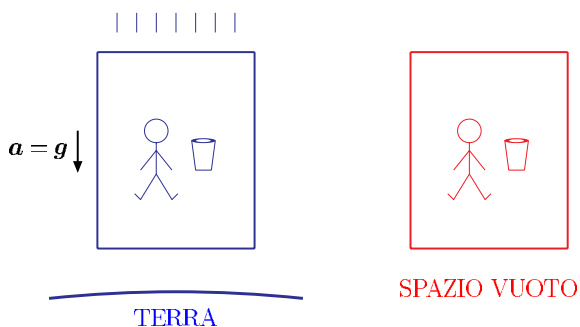


FIG. 1. UN SISTEMA DI RIFERIMENTO IN CADUTA LIBERA (A SINISTRA) È LOCALMENTE EQUIVALENTE A UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE (A DESTRA)

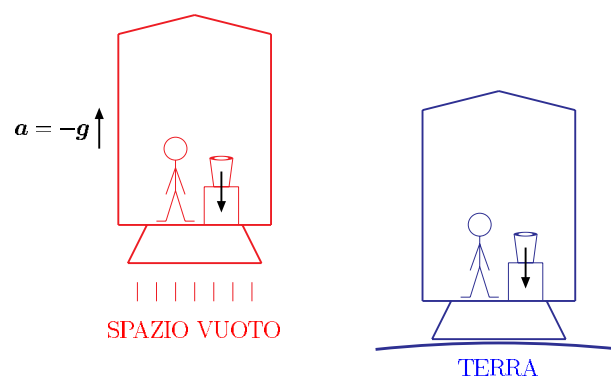


FIG. 2. UN SISTEMA DI RIFERIMENTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO (A SINISTRA) È LOCALMENTE EQUIVALENTE A UN SISTEMA DI RIFERIMENTO SOGGETTO A UN CAMPO GRAVITAZIONALE OMOGENEO (A DESTRA)

stra che là dove il campo gravitazionale è più intenso, un orologio rallenta (un fenomeno noto come “dilatazione gravitazionale del tempo”). Sulla Terra, per esempio, un orologio posto in basso, dove la gravità è maggiore, va più lento di un orologio posto in alto.

Infine, il principio di equivalenza permette di prevedere, almeno qualitativamente, l'effetto di un campo gravitazionale sulla traiettoria dei raggi luminosi. Immaginiamo che in una cabina accelerata verso l'alto una sorgente posta su una delle pareti emetta orizzontalmente un raggio di luce. A causa del moto della cabina, il raggio luminoso tocca la parete opposta in un punto che è più in basso rispetto alla posizione della sorgente: per un osservatore all'interno della cabina, la traiettoria della luce risulta incurvata. In virtù del principio di equivalenza, lo stesso fenomeno deve verificarsi in una cabina soggetta a un campo gravitazionale: la gravità, dunque, deflette la luce. Nel giugno del 1911, nell'articolo “L'effetto della gravitazione sulla propagazione della luce” [19], straordinario per la ricchezza di predizioni che vi vengono presentate, Einstein suggerisce di verificare la deflessione della luce osservando la posizione apparente delle stelle attorno al Sole durante un'eclissi totale e confrontandola con la posizione rilevata in un diverso momento dell'anno, quando le stelle sono visibili di notte e i loro raggi luminosi non risultano deviati. Il valore che ottiene per la deviazione angolare (0,87 secondi d'arco, con i parametri astronomici attuali) è però la metà di quello corretto (e coincide peraltro con il valore previsto dalla teoria newtoniana nell'ipotesi che la luce sia costituita da corpuscoli di energia per unità di massa $c^2/2$). Il principio di equivalenza, in effetti, è un formidabile strumento euristico, ma non è sufficiente a costruire una teoria completa della gravitazione. Mostra però chiaramente che la restrizione della prima relatività ai sistemi di riferimento inerziali e l'impossibilità di descrivere, nell'ambito di quella teoria, la gravitazione sono problemi strettamente connessi, che vanno risolti assieme, con la stessa mossa. È questo l'obiettivo che Einstein comincia a perseguire a Praga, all'inizio del 1912.

Il suo primo tentativo consiste nel formulare una teoria di un campo gravitazionale statico basata sul principio di equivalenza. Il potenziale gravitazionale è identificato con una singola funzione scalare che soddisfa un'equazione non lineare, conseguenza del fatto che – come lo stesso Einstein ha dimostrato – l'energia “pesa”, cioè genera gravità, e il campo gravitazionale, che è dotato di energia, agisce a sua volta come sorgente gravitazionale. Il tentativo è di breve durata perché già alla fine del periodo praghese – quando cerca di introdurre nella teoria un campo gravitazionale dinamico – Einstein si convince che il potenziale gravitazionale non può essere uno scalare, ma deve essere un oggetto matematico più complesso. Sta per entrare in gioco, dopo l'inerzia e la gravità, il terzo ingrediente della relatività generale, quello radicalmente innovativo: la Geometria.

Il secondo atto: Zurigo 1912-13

“Ebbi l'idea decisiva dell'analogia tra il problema matematico della teoria e la teoria gaussiana delle superfici solo nel 1912, dopo il mio ritorno a Zurigo, senza che all'epoca fossi al corrente dei lavori di Riemann, Ricci e Levi-Civita. Questi vennero portati alla mia attenzione per la prima volta dal mio amico Grossmann” [20]. Nell'edizione ceca della *Relatività: esposizione divulgativa*, apparsa nel 1923, Einstein situa temporalmente l'intuizione del carattere geometrico della gravità al suo rientro a Zurigo, nell'estate del 1912.

È probabile però che l'idea avesse cominciato a prendere corpo qualche tempo prima, negli ultimi mesi del periodo praghese. Cercando una teoria dinamica della gravitazione, Einstein si era trovato a riflettere sulla Geometria nei sistemi di riferimento accelerati, in particolare in quelli rotanti. Consideriamo, per esempio, un sistema di riferimento K' che ruota con velocità angolare costante rispetto a un sistema inerziale K . Se misuriamo con regoli a riposo in K la circonferenza e il diametro di un disco centrato nell'origine, troveremo che il loro rapporto, secondo le leggi della Geometria euclidea, è π . Se invece effettuiamo la misura con regoli solidali con K' , a causa della contrazione relativistica delle lunghezze nella direzione di moto, la circonferenza risulterà accorciata, mentre il diametro resterà immutato. Di conseguenza, il loro rapporto sarà maggiore di π . La Geometria euclidea, dunque, non vale nei sistemi di riferimento rotanti e, per il principio di equivalenza, c'è da aspettarsi che non valga neanche in presenza di campi gravitazionali.

Osservazioni come questa indicano la necessità di svincolarsi dallo spazio piatto della relatività ristretta e di prendere in considerazione spazi curvi, di geometria variabile. Sul piano matematico, il principio generalizzato di relatività (“le leggi fisiche devono avere la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento, qualunque sia il loro moto”) si traduce nel “principio di covarianza generale”: le leggi fisiche devono rimanere invariate per trasformazioni arbitrarie delle coordinate spazio-temporali. Ne consegue, tra l'altro, che le coordinate non potranno più avere un significato fisico diretto, in termini di lunghezze e intervalli temporali [21].

L'idea chiave del “secondo atto” della relatività generale è che il potenziale gravitazionale è dato dal tensore metrico $g_{\mu\nu}$ dello spazio-tempo quadridimensionale, un insieme di quantità che definiscono la distanza invariante ds tra due eventi di coordinate x^μ e $x^\mu + dx^\mu$ (con $\mu = 0, 1, 2, 3$), attraverso la relazione $ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. È in questo momento che Einstein riscopre e rivaluta la formulazione geometrica della prima relatività, che Hermann Minkowski aveva elaborato tra il 1907 e il 1908, introducendo il concetto di spazio-tempo (inizialmente liquidato da Einstein come una mera curiosità matematica). Nello spazio-tempo piatto della relatività ristretta, $g_{\mu\nu}$ ha solo le quattro componenti diagonali (quelle con indici uguali)

La relatività generale

non nulle e costanti. In uno spazio-tempo curvo, invece, $g_{\mu\nu}$ ha dieci componenti indipendenti, che dipendono dalle coordinate. Sono queste dieci funzioni che prendono il posto del singolo potenziale newtoniano Φ e che dovranno comparire, assieme alle loro derivate, nelle equazioni della nuova teoria.

Tornato come professore di Fisica teorica al Politecnico di Zurigo, Einstein vi ritrova un vecchio compagno di studi, il matematico Marcel Grossmann. “*Gli posi il problema – ricorderà nel 1923 – della ricerca di tensori generalmente covarianti le cui componenti dipendano solo dalle derivate dei coefficienti dell’invariante quadratico fondamentale [cioè dalle derivate di $g_{\mu\nu}$]*”. Grossmann indirizza l’amico verso la Geometria riemanniana e il calcolo differenziale assoluto sviluppato negli anni a cavallo del secolo da Gregorio Ricci Curbastro e Tullio Levi-Civita. Einstein si impadronisce in fretta del formalismo (come testimonia il “Taccuino di Zurigo” [22], compilato tra il 1912 e il 1913) e avvia, per tentativi ed errori, l’elaborazione matematica della relatività generale.

In analogia alla teoria del campo elettromagnetico, la teoria relativistica del campo gravitazionale dovrà articolarsi in due equazioni fondamentali: 1) l’equazione del moto di un corpo in un campo gravitazionale assegnato; 2) l’equazione del campo gravitazionale generato da determinate sorgenti. Einstein ricava subito la prima di queste due equazioni. Come nella Meccanica newtoniana un corpo non soggetto a forze si muove lungo una retta, che è la linea più breve tra due punti in uno spazio piatto, così nella teoria einsteiniana un corpo in caduta libera si muove lungo una geodetica, che è la linea di distanza estrema tra due punti in uno spazio di curvatura non nulla. L’equazione del moto di un corpo soggetto a gravità è, quindi, l’equazione delle geodetiche

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} = 0$$

dove i simboli di Christoffel, o coefficienti di connessione, $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ contengono il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ e le sue derivate prime. L’equazione si riduce, come deve, all’equazione di Newton nel caso di velocità non relativistiche e campi statici e di debole intensità. L’aspetto interessante è che i due termini che vi compaiono, il primo di natura inerziale, il secondo di natura gravitazionale, si trasformano l’uno nell’altro per un cambiamento del sistema di coordinate, coerentemente con il principio di equivalenza, secondo cui inerzia e gravità sono localmente indistinguibili.

L’equazione del campo gravitazionale si rivela invece un bersaglio ben più arduo e ci vorranno tre anni prima che Einstein riesca a centrarlo. Egli immagina che la struttura dell’equazione debba essere del tipo $G_{\mu\nu} = KT_{\mu\nu}$, dove $G_{\mu\nu}$ è una quantità che contiene le derivate seconde del potenziale gravitazionale (cioè della metrica $g_{\mu\nu}$) [23], K è una costante e $T_{\mu\nu}$ è il tensore di energia-quantità di moto, che

incorpora le densità di energia e di quantità di moto delle sorgenti, ma fatica a individuare la corretta espressione di $G_{\mu\nu}$. La teoria finale deve in ogni caso soddisfare alcuni criteri: *i)* deve essere coerente con il principio di equivalenza; *ii)* deve ridursi alla teoria newtoniana per campi deboli; *iii)* deve rispettare la legge di conservazione dell’energia e della quantità di moto. A questi requisiti fisici va aggiunto il principio di covarianza generale.

Nella ricerca dell’equazione del campo, Einstein oscilla tra due diverse strategie [24]: una “strategia fisica”, che consiste nello scegliere possibili candidati per $G_{\mu\nu}$ che rispettino il limite newtoniano e le leggi di conservazione e nel controllare poi il grado di covarianza dell’equazione ottenuta; una seconda “strategia matematica”, che consiste nello scegliere $G_{\mu\nu}$, imponendo la covarianza generale e verificando poi il limite newtoniano e la validità delle leggi di conservazione.

Nel 1913 pubblica assieme a Grossmann un articolo dal titolo “Abbozzo [Entwurf] di una teoria generale della relatività e di una teoria della gravitazione” [25] in cui presenta quella che fino all’estate del 1915 considererà la teoria definitiva della gravità. L’equazione fondamentale della teoria dell’“Entwurf”, frutto della strategia fisica, è espressa direttamente in termini delle derivate di $g_{\mu\nu}$ e soddisfa il criterio del limite newtoniano e i principi di conservazione, ma ha un difetto: non gode della proprietà della covarianza generale, essendo covariante solo rispetto a trasformazioni lineari. Einstein accetta tale restrizione (“*una brutta macchia*”, la chiama in una lettera a Lorentz) perché ritiene – sbagliandosi – che sia giustificata dalla conservazione dell’energia, e anche perché pensa di aver dimostrato che è impossibile costruire una teoria covariante in modo generale. Il suo errore di fondo è di ritenere che le equazioni determinino completamente il campo gravitazionale. Non è così: il campo è determinato solo a meno di una trasformazione corrispondente a un cambiamento arbitrario delle coordinate. Einstein, insomma, non ha ancora fatto pienamente i conti con il carattere convenzionale delle coordinate e con la libertà di scelta che ne deriva. Possiamo allora capire quel passo dell’*Autobiografia scientifica* in cui attribuisce la lunga e difficile gestazione della relatività generale proprio al fatto che “*non è facile liberarsi dall’idea che le coordinate debbano avere un significato fisico immediato*” [26].

Quella che emerge tra il 1912 e il 1913, sia pure espressa in una forma provvisoria, è una nuova concezione del rapporto tra Geometria e Fisica, che supera l’idea tradizionale dello spazio-tempo come qualcosa di separato da ogni contenuto fisico e come uno scenario fisso degli eventi. L’interpretazione del tensore metrico come campo fisico permette di eliminare una di quelle asimmetrie che tanto disturbavano Einstein. È impensabile infatti che lo spazio agisca sugli oggetti (come fa lo *spatium absolutum* di Newton, che è “*la causa indipendente del comportamento inerziale dei corpi*”), senza che questi esercitino

alcuna reazione sullo spazio [27]. Nella teoria einsteiniana, invece, lo spazio-tempo ha una dinamica e interagisce con tutto ciò che lo popola, materia ed energia.

Manca ancora il tassello fondamentale, l'equazione corretta del campo, e per scoprirla Einstein dovrà prima di tutto convincersi che l'impresa che non gli è riuscita con Grossmann – costruire una teoria generalmente covariante – è realizzabile.

Il terzo atto: Berlino 1915

“Pensavo di aver trovato la sola legge della gravitazione che soddisfacesse un principio di relatività generale ragionevolmente espresso. [...] Ho perso fiducia nelle equazioni del campo che avevo derivato, e ho quindi cercato un modo di limitare le possibilità in un modo naturale. In questa ricerca sono arrivato al requisito di covarianza generale, un requisito da cui mi ero allontanato, sia pure a malincuore, tre anni fa, quando lavoravo assieme al mio amico Grossmann” [28].

Non è una confessione privata. È quanto Einstein dichiara pubblicamente nel primo dei quattro lavori che invia nel novembre del 1915 all'Accademia Prussiana delle Scienze [29] e che segnano la nascita della relatività generale (presentata poi in forma più sistematica nella lunga Memoria “Il fondamento della teoria della relatività generale”, comparsa l'11 maggio 1916 sugli *Annalen der Physik* [30]). Verso la fine dell'estate ha capito che la teoria dell'“Entwurf” non è sostenibile, né emendabile. Il principale difetto è quello che egli stesso descrive ai colleghi dell'Accademia ed è ancora una volta squisitamente formale: l'equazione del campo scritta con Grossmann non è determinata in maniera univoca da un principio di minima azione. L'altro serio problema è che la covarianza dell'equazione, ristretta – come abbiamo detto – alle trasformazioni lineari, non include neanche le rotazioni uniformi [31].

Einstein ricomincia dunque daccapo, concentrando stavolta l'attenzione sulle entità matematiche della teoria. La mossa vincente consiste nell'identificare il campo gravitazionale con il simbolo di Christoffel $\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}$. A posteriori, sembra una scelta abbastanza naturale, dato che, come abbiamo visto, $\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}$ compare nell'equazione delle geodetiche. A questo punto, la strada verso le equazioni del campo è aperta. Ma all'inizio, nei lavori del 4 e dell'11 novembre, Einstein impone ancora delle condizioni restrittive sulle trasformazioni di coordinate e sul tensore di energia-quantità di moto della materia. Come si accorge appena qualche giorno dopo, questi vincoli, che semplificano le espressioni, non sono in realtà necessari. Nella breve comunicazione che invia il 25 novembre all'Accademia compaiono per la prima volta le equazioni definitive del campo gravitazionale, quelle che oggi scriviamo abitualmente nella forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

FIG. 3. A. EINSTEIN, “IL FONDAMENTO DELLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ GENERALE” (1916)



A sinistra, la grandezza tensoriale che combina il tensore di Ricci $R_{\mu\nu}$ e la curvatura scalare $R = R^{\sigma}_{\sigma}$ contiene le derivate seconde di $g_{\mu\nu}$ ed è legata alla curvatura dello spazio-tempo [32]; a destra, il tensore $T_{\mu\nu}$ rappresenta le sorgenti. In presenza di masse e di distribuzioni di energia, lo spazio-tempo si deforma (come la superficie di un tappeto elastico) e una particella o un raggio

di luce si muove lungo traiettorie curvilinee.

Einstein dimostra che la nuova teoria si riduce a quella di Newton nel limite di campi deboli, cioè quando la metrica $g_{\mu\nu}$ differisce poco dalla metrica piatta. In questo limite, sopravvivono solo l'elemento g_{00} della metrica e il simbolo di Christoffel Γ^i_{00} e le loro relazioni con il potenziale newtoniano Φ sono $g_{00} = 1 + 2\Phi/c^2$ e $\Gamma^i_{00} = -\partial(\Phi/c^2)/\partial x_i$.

Più contorta si rivela, almeno all'inizio, la questione della legge di conservazione dell'energia-quantità di moto, l'altro fondamentale requisito fisico della teoria. Nella comunicazione all'Accademia berlinese del 25 novembre 1915, Einstein di fatto impone tale legge, invece di derivarla. Nella Memoria del 1916 fa un passo avanti: verifica la legge attraverso un calcolo diretto, mostrando esplicitamente che è la somma dell'energia della materia e del campo gravitazionale a essere conservata e non le due quantità separate. Né Einstein né, sorprendentemente, Hilbert, che ricava le equazioni del campo gravitazionale a partire da un principio di minima azione, conoscono all'epoca l'identità tensoriale ottenuta nel 1902 dal matematico italiano Luigi Bianchi, in virtù della quale la derivata covariante del tensore al primo membro delle equazioni di campo vale zero. Ciò comporta che si annulli anche la derivata covariante del tensore di energia-quantità di moto al secondo membro – l'espressione matematica della legge di conservazione.

Le equazioni di Einstein ci dicono che qualunque distribuzione di energia genera gravità. Possedendo energia, il campo gravitazionale è sorgente di se stesso, il che si riflette nel fatto che le equazioni sono non lineari in $g_{\mu\nu}$. Questa caratteristica cruciale rende la relatività generale più ricca di conseguenze rispetto all'altra teoria classica di campo, l'elettromagnetismo, ma anche molto più complicata sul piano computazionale.

La relatività generale

La relatività generale alla prova dei fatti

Equivalenza locale tra osservatori accelerati e osservatori soggetti a campi gravitazionali, metrica come campo fisico, gravità come curvatura dello spazio-tempo: questi, in sintesi, gli elementi di base della teoria generale della relatività. Il genio di Einstein si manifesta nel modo in cui tre concetti fondamentali – Inerzia, Geometria, Gravità –, precedentemente disgiunti o connessi da relazioni deboli e prive di giustificazione, vengono unificati in una “teoria di principi” [33], improntata alla massima semplicità logica. L’indiscutibile eleganza formale della relatività generale non deve però far dimenticare la solidità delle sue basi sperimentali e osservative. Einstein trovò subito una conferma della teoria nella precessione anomala del perielio di Mercurio. Il risultato gli apparve talmente importante da meritare di essere comunicato a voce, e non solo per iscritto, all’Accademia Prussiana delle Scienze, il 18 novembre 1915. Il giorno dopo, David Hilbert, messosi anche lui da qualche tempo alla ricerca delle equazioni del campo gravitazionale, gli scrisse un breve messaggio, congratulandosi per la “conquista” del perielio di Mercurio e aggiungendo: “*Se fossi veloce come Lei a fare i calcoli, nelle mie equazioni l’elettrone capitolerebbe e l’atomo di idrogeno dovrebbe porgere le sue scuse per non irradiare*” [34] (c’era nel matematico di Gottinga la speranza, rivelatasi presto infondata, che le equazioni della relatività generale potessero descrivere anche l’elettromagnetismo e la struttura atomica).

Il moto orbitale anomalo di Mercurio era stato scoperto nel 1859 dall’astronomo francese Urbain-Joseph Le Verrier, famoso per aver predetto nel 1846 l’esistenza dell’ottavo pianeta del Sistema solare, Nettuno. In quel caso si era trattato di un grande successo della teoria newtoniana e della Matematica, perché Le Verrier, ipotizzando che le anomalie riscontrate nell’orbita di Urano fossero dovute alla presenza di un altro pianeta perturbatore, aveva calcolato la posizione e il moto del nuovo corpo celeste, che era stato poi scoperto esattamente là dove previsto.

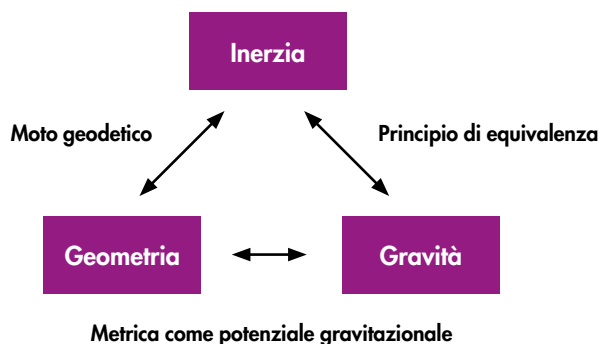


FIG. 4. IL TRIANGOLO CONCETTUALE DELLA RELATIVITÀ GENERALE

Anche Mercurio aveva una strana orbita, non spiegabile a partire dalla sola attrazione gravitazionale del Sole. Le osservazioni astronomiche mostravano che l’asse orbitale di Mercurio ruota lentamente, con un avanzamento del perielio di 575” (secondi d’arco) al secolo (cfr. Fig. 5). Ciò è dovuto in gran parte all’attrazione esercitata dagli altri pianeti, ma Le Verrier scoprì che questo effetto non era in grado di riprodurre l’intero fenomeno: c’era uno scarto di 38” (valore corretto successivamente in 43”), che la teoria di Newton, sulla base della forza di gravità esercitata dai corpi celesti noti, non riusciva a spiegare.

Sebbene rappresentasse un punto debole nella descrizione del Sistema Solare, l’anomalia di Mercurio non era percepita dagli astronomi come un vero segnale di crisi del paradigma newtoniano. Ma già nel 1907, in una lettera all’amico Conrad Habicht, Einstein aveva espresso la speranza che la nuova teoria della gravitazione su cui stava riflettendo potesse spiegare anche il moto anomalo di Mercurio. Il primo tentativo di calcolo, effettuato nel 1913 assieme a Michele Besso, era basato sulla teoria dell’“Entwurf”. Ne conosciamo i dettagli grazie a un manoscritto scoperto nel 1988 e composto da 52 pagine, alcune di pugno di Einstein, altre scritte da Besso [35]. I due amici lavorarono sul problema nell’estate del 1913. Einstein impostò la trattazione, ricavando l’espressione del campo gravitazionale del Sole a partire dalle equazioni della teoria elaborata con Grossmann. Besso scrisse l’equazione del moto del perielio di Mercurio ed entrambi procedettero alla sua risoluzione. Il risultato finale era deludente: la teoria prevedeva un avanzamento di soli 18”, largamente inferiore a quello osservato. Nonostante il palese disaccordo con i dati astronomici, Einstein – come abbiamo visto – continuò a credere ancora per due anni nella correttezza della teoria dell’“Entwurf”. Nel novembre del 1915 rifece essenzialmente, nell’ambito della relatività generale, il calcolo del 1913 (ecco perché fu rapidissimo, destando l’ammirazione di Hilbert). Si accorse allora che il valore della precessione del

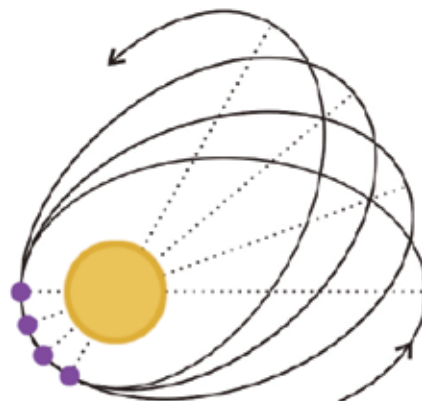


FIG. 5. L’AVANZAMENTO ANOMALO DEL PERIELIO DI MERCURIO (L’EFFETTO È FORTEMENTE ACCENTUATO PER CHIAREZZA)

perielio di Mercurio ottenuto con Besso andava corretto di un fattore 12/5, diventando così 43", in accordo con le misure astronomiche.

Lo spostamento angolare (per ogni singola rivoluzione) del perielio di un pianeta orbitante attorno al Sole è, secondo la relatività generale (M_S è la massa del Sole, a il semiasse maggiore dell'orbita, ϵ l'eccentricità):

$$\delta\varphi = 6\pi \frac{GM_S}{c^2 a(1 - \epsilon^2)}$$

e si vede che l'effetto è maggiore quando l'orbita è più eccentrica, come nel caso di Mercurio. Inoltre, la precessione è cumulativa, cioè si somma a ogni rivoluzione, e Mercurio è il pianeta che ha il maggior numero di rivoluzioni al secolo (la precessione secolare di Venere è circa cinque volte inferiore a quella di Mercurio). Attualmente, la predizione relativistica per l'avanzamento del perielio di Mercurio è verificata con un grado di precisione dello 0,01% [36].

L'anomalia del moto orbitale di Mercurio, oltre ad aver svolto un ruolo importante nella genesi della relatività generale, convincendo Einstein della validità della teoria (in seguito egli avrebbe detto di aver avuto le palpitazioni per il risultato e di aver rivalutato la pignoleria degli astronomi), è un fenomeno di grande importanza teorica, perché si tratta di una conseguenza diretta della non linearità delle equazioni del campo gravitazionale. Poiché il campo gravitazionale del Sole e l'energia potenziale che esso possiede hanno simmetria sferica, se l'orbita del pianeta fosse circolare, l'unico effetto consisterebbe in un aumento dell'intensità del campo (equivalente a un aumento della massa del Sole). Nel caso di un'orbita ellittica, invece, il pianeta si trova al perielio in un campo più forte e all'afelio in un campo più debole, e la variazione del campo da un punto all'altro non obbedisce alla legge dell'inverso del quadrato della distanza: di conseguenza, l'orbita non si chiude e il suo asse maggiore ruota lentamente.

Gli altri due "test classici" della relatività generale riguardano i fenomeni che Einstein aveva previsto fin dal 1907. Quello che si rivelò cruciale per i destini della teoria è la deflessione della luce stellare passante in prossimità del

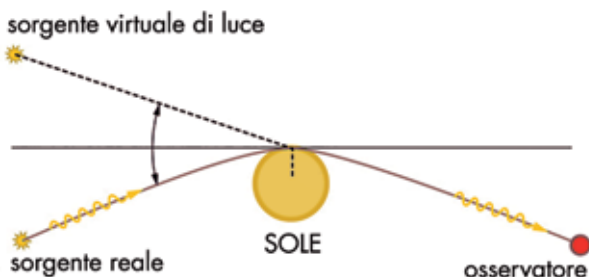


FIG. 6. LA DEFLESSIONE DELLA LUCE STELLARE DA PARTE DEL SOLE



FIG. 7. L'ECLISSI DI SOLE DEL 1919 RIPRESA DAGLI ASTRONOMI BRITANNICI A SOBRAL. LE COPPIE DI TRATTINI CHE SI INTRAVEDONO ATTORNO AL SOLE DELIMITANO LE POSIZIONI DELLE STELLE OSSERVATE (IMMAGINE DI PUBBLICO DOMINIO, TRATTA DA WWW.WIKIPEDIA.ORG)

Sole. Sulla base della relatività generale, Einstein ottenne per l'angolo di deflessione (in radianti) l'espressione:

$$\delta\theta = \frac{4GM_S}{c^2 R_S}$$

Numericamente si trova $\delta\theta = 1,75''$, un valore doppio rispetto a quello previsto nel 1911 (per avere un'idea della piccolezza di questo angolo, si pensi che esso corrisponde all'incirca a un millesimo del diametro angolare del Sole) [37].

Il fenomeno fu osservato per la prima volta durante l'eclissi totale di Sole del 1919. Due spedizioni britanniche, guidate da Arthur Eddington e Frank Dyson, a Sobral (in Brasile) e all'Isola di Principe (al largo delle coste africane), misurarono l'angolo di deflessione della luce proveniente da alcune stelle, ottenendo un valore che, entro l'incertezza sperimentale (di circa il 30%), era in accordo con la predizione einsteiniana. Misure astronomiche successive, sempre nell'ottico, non risultarono molto più precise di quelle di Eddington e Dyson. La svolta si è avuta a partire dagli anni Settanta, con l'osservazione della deflessione di segnali radio provenienti da quasar e radiogalassie. L'accordo delle misure più recenti con la relatività generale è al livello dello 0,01%.

L'ultimo dei test classici della teoria einsteiniana è lo spostamento gravitazionale verso il rosso. Al primo ordine, il risultato relativistico coincide con quello che si ottiene sulla base del principio di equivalenza [38]. Einstein non

La relatività generale

ebbe la soddisfazione di assistere alla conferma di questo fenomeno (osservazioni compiute dall'astronomo tedesco Erwin Freundlich, che avevano destato un iniziale entusiasmo, si rivelarono in seguito non significative). Su scala terrestre l'effetto è molto piccolo. Come si può facilmente verificare usando la formula $\delta v/v = gd/c^2$, per un dislivello di 10 metri lo spostamento è dell'ordine di 10^{-15} . È quindi necessario determinare la frequenza della luce con una precisione elevatissima. Nel 1960 (cinque anni dopo la morte di Einstein) due ricercatori americani, Robert Pound e Glen Rebka, sfruttando l'effetto Mössbauer, furono in grado di misurare la variazione di frequenza di raggi gamma nel percorso lungo la torre del *Jefferson Physical Laboratory* della *Harvard University* (22,6 metri di dislivello) e verificarono lo spostamento gravitazionale verso il rosso con una precisione dell'1%. Negli anni Sessanta fu osservato per la prima volta anche lo spostamento delle linee spettrali della luce emessa dal Sole (il test proposto inizialmente da Einstein).

Con l'avvento degli orologi atomici è stato possibile sottoporre a verifica diretta la dilatazione gravitazionale del tempo. Nell'ottobre del 1971 Joseph Hafele e Richard Keating imbarcarono su jet di linea degli orologi atomici al cesio precedentemente sincronizzati. Gli orologi effettuarono due giri attorno alla Terra, in direzioni opposte. Al ritorno, i tempi misurati vennero confrontati tra loro e con il tempo segnato da un orologio rimasto a terra: rispetto a questo, l'orologio che aveva viaggiato verso est era in ritardo di (59 ± 10) ns, mentre l'orologio che aveva viaggiato verso ovest era in anticipo di (273 ± 7) ns. I risultati erano in accordo con le predizioni relativistiche – rispettivamente (40 ± 23) ns e (275 ± 21) ns – tenendo conto sia della dilatazione gravitazionale del tempo, dovuta alla diversa altitudine, sia della dilatazione cinematica del tempo (prevista dalla relatività ristretta), dovuta al moto degli orologi (nel volo verso est la velocità dell'aereo si somma a quella di rotazione della terra e l'effetto cinematico prevale su quello gravitazionale, di segno opposto). Nel 1976 Luigi Briatore e Sigfrido Leschiutta verificarono la sola dilatazione gravitazionale confrontando i tempi di due orologi a riposo, l'uno collocato a Torino (alt. 250 m), l'altro sul Plateau Rosa (alt. 3500 m), che risultarono differire di (33.8 ± 6.8) ns/giorno, in accordo – entro l'errore – con la predizione teorica di 30.6 ns/giorno.

Nelle condizioni degli esperimenti di Hafele-Keating e di Briatore-Leschiutta l'effetto di rallentamento gravitazionale del tempo era dell'ordine di 10^{-12} , al limite dell'accuratezza degli orologi dell'epoca. Gli orologi atomici attuali hanno raggiunto un'accuratezza dell'ordine di 10^{-18} e permettono di osservare il diverso scorrere del tempo su dislivelli di appena qualche decina di centimetri. È anche il caso di ricordare che il *Global Positioning System* (GPS), per funzionare correttamente, deve incorporare gli effetti temporali della relatività. La correzione relativistica complessiva è di 39 μ s al giorno (46 μ s dovuti alla dilatazione gravitazionale del

tempo, -7 μ s dovuti alla dilatazione cinematica del tempo). Se non si tenesse conto di questi effetti, l'errore sulla localizzazione sarebbe dell'ordine dei 10 km!

Cento anni dopo

Nel giugno del 1916, all'indomani della pubblicazione sugli *Annalen der Physik* della lunga Memoria sulla relatività generale, Einstein inviò all'Accademia berlinese una comunicazione, dal titolo "Integrazione approssimata delle equazioni di campo della gravitazione" [39], in cui evidenziava un'ulteriore conseguenza della sua teoria: l'esistenza di onde gravitazionali prodotte da masse in moto accelerato. Nel limite di campi deboli, infatti, le equazioni del campo gravitazionale nel vuoto si riducono a un'equazione d'onda, simile all'equazione delle onde elettromagnetiche. Successivamente, nel 1918, Einstein scoprì che la radiazione gravitazionale non è emessa da sistemi dotati di simmetria sferica, ma da distribuzioni di massa di quadrupolo.

Fu subito chiaro che, a causa dell'estrema debolezza della gravità, sarebbe stato difficile, addirittura proibitivo, rivelare le onde gravitazionali. Per molti anni, anche il loro status teorico rimase dubbio, tanto da far pensare che non rappresentassero qualcosa di reale, ma solo un artefatto della covarianza generale. Nel suo influentissimo trattato *The Mathematical Theory of Relativity*, Eddington scrisse che le onde viaggiavano "alla velocità del pensiero" [40], perché sembravano comparire e scomparire a seconda della scelta del sistema di coordinate. Lo stesso Einstein, attorno al 1936, pensò per un breve periodo che le onde non esistessero realmente, salvo ricredersi subito dopo. Fu solo alla fine degli anni Cinquanta, grazie al lavoro teorico di una nuova generazione di relativisti (in particolare Hermann Bondi) e alla tenacia di un grande fisico sperimentale, Joe Weber, che le onde gravitazionali divennero oggetto di vera ricerca. Nel 1969 Weber annunciò di averle captate con una delle sue barre risonanti [41], ma aveva preso un abbaglio. L'appuntamento era rimandato di mezzo secolo. A rivelare finalmente le onde sono stati strumenti di concezione diversa, gli interferometri gravitazionali. Nel febbraio 2016 le collaborazioni LIGO (statunitense) e Virgo (italo-francese) hanno comunicato la scoperta della prima onda gravitazionale [42], captata dai due strumenti di LIGO il 14 settembre 2015. Come mostrano le simulazioni teoriche, questa onda è stata prodotta dalla fusione di due buchi neri distanti 1.3 miliardi di anni luce da noi, che hanno emesso radiazione gravitazionale per un'energia totale equivalente a 3 masse solari. La scoperta delle onde rappresenta un trionfo, al tempo stesso, del lavoro sperimentale, che ha permesso di evidenziare deformazioni spaziali dell'ordine di 10^{-18} m, e del calcolo teorico, che ha fornito soluzioni delle equazioni di Einstein per sistemi di due corpi e per campi estremamente intensi. A cento anni dalla sua nascita, la relatività generale è più viva che mai. ■

Note

- [1] Cfr. A. Pais, "Sottile è il Signore...". *La scienza e la vita di Albert Einstein*, tr. it. di L. Belloni e T. Cannillo, Bollati Boringhieri, Torino, 2012, p. 262.
- [2] A. Einstein, *Autobiografia scientifica* (1949), in *Opere scelte* (d'ora in poi OS), a cura di E. Bellone, Bollati Boringhieri, Torino, 1988, p. 90.
- [3] A. Einstein, *Relatività: esposizione divulgativa* (1917), tr. it. di V. Geymonat, Boringhieri, Torino 1960, p. 79.
- [4] A. Einstein, *Idee e problemi fondamentali della teoria della relatività* (1923), in OS, pp. 517-519.
- [5] Una traduzione in inglese di questa conferenza, dal titolo "How I created the theory of relativity", è stata pubblicata su *Physics Today*, agosto 1982, pp. 45-47.
- [6] Cfr. Pais, *op. cit.*, p. 196.
- [7] Nell'aprile del 1915 Einstein scriveva a Tullio Levi-Civita: "È sorprendente quanto poco i miei colleghi siano sensibili all'esigenza di una vera teoria della relatività" (Pais, *op. cit.*, p. 265).
- [8] J. Stachel, in *The Genesis of General Relativity*, a cura di M. Janssen et al., Springer, Dordrecht, 2007, vol. 1, p. 81.
- [9] Vedi Pais, *op. cit.*, p. 195.
- [10] L'espressione compare nel testo inedito *Concetti fondamentali e metodi della teoria della relatività illustrati nel loro sviluppo* (1920), il cosiddetto manoscritto Morgan.
- [11] A. Einstein, "Il principio di relatività e le conseguenze che se ne traggono" (1907), in *The Collected Papers of Albert Einstein* (d'ora in poi CPAE), vol. 2, a cura di J. Stachel et al., Princeton University Press, Princeton (NJ), 1990, pp. 432-488.
- [12] L'uguaglianza di massa gravitazionale e massa inerziale era stata verificata accuratamente alla fine dell'Ottocento da Roland von Eötvös a Budapest, ma nel 1907 Einstein non conosceva ancora questo risultato. Nel corso del Novecento, esperimenti simili a quello di Eötvös sono stati replicati con precisione crescente.
- [13] "Si tratta – osserva Einstein nel 1911 – di una delle leggi più generali che l'osservazione della natura ci abbia fornito; ciò nonostante, essa non trova posto tra i fondamenti della nostra concezione del mondo fisico" ("L'effetto della gravitazione sulla propagazione della luce", in OS, p. 222).
- [14] Vedi A. Einstein, *Relatività: esposizione divulgativa*, cit., § 20.
- [15] Cfr. Pais, *op. cit.*, p. 196.
- [16] Su questo punto sono particolarmente interessanti le considerazioni svolte in D.W. Sciama, *La relatività generale*, Zanichelli, Bologna, 1979.
- [17] Einstein torna sul problema della gravitazione e sul principio di equivalenza nel 1911, durante il suo breve soggiorno a Praga, dove è chiamato alla cattedra di Fisica teorica della sezione tedesca dell'Università.
- [18] Il motivo per cui il fenomeno è noto generalmente come "spostamento verso il rosso" è che Einstein propose di verificarlo osservando la luce proveniente dal Sole: in questo caso, la frequenza della luce, che si allontana dal centro di gravità, diminuisce, spostandosi verso il rosso.
- [19] OS, pp. 221-232.
- [20] Cfr. Pais, *op. cit.*, p. 232.
- [21] Nell'ultimo articolo scritto a Praga (luglio 1912) Einstein osserva: "La semplice interpretazione fisica delle coordinate spazio-temporali dovrà essere abbandonata, e non si riesce ancora a comprendere quale forma possano avere le equazioni generali delle trasformazioni spazio-temporali. Proporrei a tutti i colleghi di impegnarsi nella soluzione di questo importante problema!" (Pais, *op. cit.*, p. 231). L'invito, come abbiamo visto, cadde nel vuoto.
- [22] Questo documento è stato approfonditamente studiato in *The Genesis of General Relativity*, *op. cit.*, voll. 1 e 2.
- [23] La presenza delle derivate seconde risponde alla richiesta che l'equazione si riduca nel limite di campi deboli all'equazione di campo newtoniana (l'equazione di Poisson), che contiene le derivate seconde del potenziale gravitazionale.
- [24] Cfr. H. Gutfreund e J. Renn, *The Road to Relativity*, Princeton University Press, Princeton (NJ), 2015, pp. 22-23.
- [25] CPAE, vol. 4, pp. 302-343.
- [26] OS, p. 93.
- [27] Questo punto è enfatizzato nella premessa che Einstein scrisse nel 1953 per il volume di Max Jammer, *Storia del concetto di spazio*, tr. it. Feltrinelli, Milano, 1963, pp. 7-8.
- [28] CPAE, vol. 6, pp. 214-224.
- [29] Per la comunicazione del 4 novembre, vedi la nota precedente. Le comunicazioni dell'11, del 18 e del 25 novembre sono riportate in CPAE, vol. 6, pp. 225-229, pp. 233-243, pp. 244-249.
- [30] Per una traduzione italiana si veda A. Einstein, *Le due relatività*, a cura di V. Barone, Bollati Boringhieri, Torino, 2015.
- [31] C'è anche un problema empirico: come vedremo, Einstein ha calcolato fin dal 1913, assieme al suo amico Michele Besso, lo spostamento anomalo del perielio di Mercurio e ha trovato un valore molto più piccolo di quello misurato dagli astronomi.
- [32] Già nel Taccuino di Zurigo Einstein aveva preso in considerazione $R_{\mu\nu}$, ma si era erroneamente convinto che un'equazione contenente questo tensore non soddisfacesse i requisiti fisici. Cfr. Gutfreund e Renn, *op. cit.*, p. 91.
- [33] Cfr. A. Einstein, *Tempo, spazio e gravitazione* (1948), in OS, p. 580.
- [34] Lettera di D. Hilbert ad A. Einstein, 19 novembre 1915, in CPAE, vol. 8A, p. 202.
- [35] Questo documento è riprodotto e commentato in CPAE, vol. 4, pp. 344-473 e 630-682.
- [36] Per una recente rassegna dei test sperimentali e osservativi della relatività generale, si veda C.M. Will, "The Confrontation between General Relativity and Experiment", in *Living Reviews in Relativity*, 17 (2014), 4.
- [37] Il principio di equivalenza spiega solo metà della deflessione. Per ottenere il valore corretto è necessario prendere in considerazione la curvatura dello spazio-tempo.
- [38] Strettamente parlando, quindi, lo spostamento verso il rosso è un test del principio di equivalenza, più che della relatività generale, perché anche altre teorie metriche della gravità, che incorporano tale principio, prevedono lo stesso fenomeno, della medesima entità.
- [39] CPAE, vol. 6, pp. 347-257.
- [40] A.S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge, 1930, p. 130.
- [41] J. Weber, "Evidence for Discovery of Gravitational Radiation", in *Physical Review Letters* 22 (1969), 1320.
- [42] B.P. Abbott et al. (LIGO and Virgo Collaborations), "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger", in *Physical Review Letters* 116 (2016), 061102.