Lettera Matematica (giugno 2016) 97:56-64
DOI 10.1007/s10031-016-0023-1

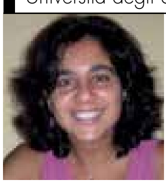
UN DIBATTITO CHE CONTINUA IN GEOMETRIA ELEMENTARE: LA RETTA DI SIMSON-WALLACE E LE SUE MOLTEPLICI GENERALIZZAZIONI

di Nicla Palladino e
Maria Alessandra Vaccaro

Nicla Palladino ✉
nicla.palladino@unipa.it
Università degli Studi di Palermo

Dottore di ricerca in Matematica applicata e Informatica, ha rivolto i suoi studi principalmente ai modelli di superfici matematiche costruiti nell'800, all'esame delle corrispondenze epistolari tra matematici a cavallo del periodo risorgimentale e a varie questioni ad esse connesse, come alcuni aspetti storici ed analitici legati alle ricerche sul calcolo infinitesimale a metà Settecento e alla risoluzione delle equazioni algebriche di quinto grado mediante funzioni ellittiche. Attualmente si sta dedicando alla Geometria elementare e ad alcune applicazioni di questa alla didattica.

Maria Alessandra Vaccaro
marialessandra.vaccaro@unipa.it
Università degli Studi di Palermo



Dottore di Ricerca in Matematica, è ricercatore universitario di Geometria presso l'Università di Palermo e docente referente di Ateneo per il Tirocinio Formativo Attivo nella classe di concorso Scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali per la Scuola secondaria di I grado. Insegna Algebra lineare (modulo dell'insegnamento di Geometria 1) presso il corso di laurea in Matematica e collabora col Progetto Nazionale Lauree Scientifiche. Negli ultimi anni si è interessata alle origini storiche delle trasformazioni cremoniane, facendo uso anche delle corrispondenze epistolari Cremona-Schiaparelli e Cremona-Hirst e di aspetti storici legati a problemi di Geometria elementare e relative applicazioni al campo della didattica.

Lo sviluppo e la rapida diffusione dei *software* di Geometria dinamica hanno dato un nuovo impulso a un vecchio dibattito di natura epistemologica sul ruolo della Geometria elementare nella formazione dei docenti e nell'insegnamento superiore. In particolare ci riferiamo, per quanto riguarda l'Italia, agli interventi di Benedetto Scimemi alla fine degli anni Novanta e di Renato Betti qualche anno fa, che si sono soffermati sull'importanza didattica della Geometria del triangolo e delle sue generalizzazioni.
Già nel 1981, il matematico russo Isaak Yaglom aveva percepito la necessità di una nuova definizione di Geometria elementare anche in relazione alle novità derivanti dall'uso dei computer, seppur il suo intervento fosse stato precedente alla creazione di *software* per la Geometria dinamica. Secondo Yaglom, durante il XX secolo si è manifestato un declino dell'importanza della Geometria elementare a seguito dell'uso crescente, anche a fini didattici, dell'Algebra lineare, seguendo Dieudonné, l'avvento del movimento bourbakista e in generale l'"algebrizzazione" della Geometria. Yaglom in primo luogo si è chiesto quale sia il ruolo della Geometria nella seconda metà del Novecento. Non si può fare a meno infatti di parlare di Geome-

trie finite, Geometrie che consistono solo di un numero finito di elementi, come punti e rette, considerate più come un "gioco geometrico" che per il loro valore intrinseco. Invece Yaglom non si è limitato a teorizzare il significato di "Geometria elementare" ma ha proposto come esempio un percorso che a nostro avviso si presta assai bene a un uso laboratoriale e a un'intensa applicazione dei metodi della Geometria dinamica. Si tratta del cosiddetto "punto di Clifford" e delle problematiche ad esso legate. Senza entrare nel dibattito generale, ma con un riferimento implicito ad esso, abbiamo scelto di prendere spunto da questa proposta, presentando un itinerario laboratoriale che si sviluppa da alcuni problemi classici relativi alla retta di Simson-Wallace e alle sue generalizzazioni, nonché al punto di Miquel-Clifford e al cerchio di Feuerbach. Didatticamente interessante ci sembra lo stretto legame esistente tra la retta di Simson-Wallace e le ipocicloidi. Riteniamo che questi possano essere esempi di una Geometria elementare, nel senso che non richiede particolari requisiti, ma certamente non banale e quindi particolarmente indicata anche per la formazione dei docenti.

La retta di Simson-Wallace e le sue generalizzazioni.
Dato un triangolo iscritto in una circonferenza, i piedi delle perpendicolari condotte da un punto della circonferenza ai lati del triangolo, o ai suoi prolungamenti, sono allineati e la retta su cui giacciono è detta *retta di Simson-Wallace* (Fig. 1).

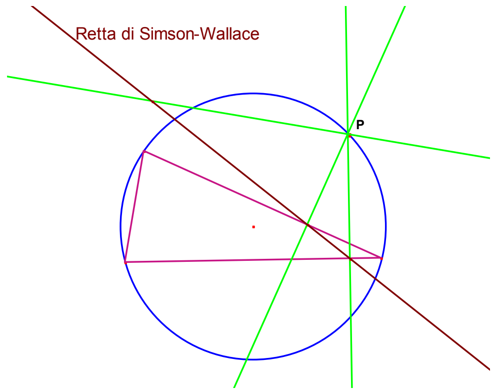
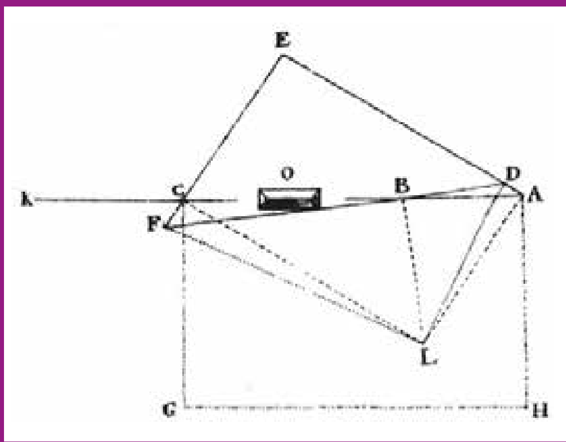


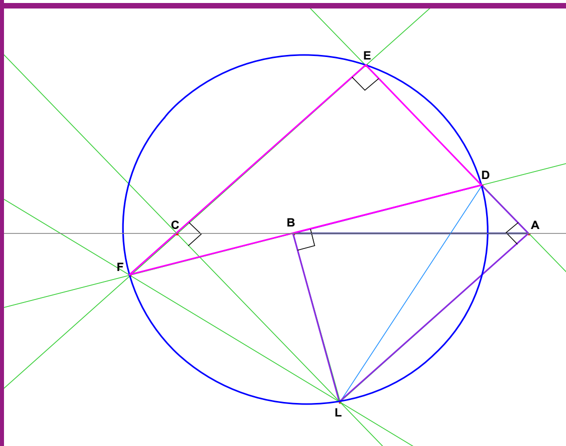
FIG. 1

Nel 1814 François-Joseph Servois (1767-1847) utilizzò la retta di Simson-Wallace per cercare la soluzione ad una questione di Geometria pratica: "*Prolonger une droite accessible audelà d'un obstacle qui borne la vue, en n'employant que l'équerre d'arpenteur, et sans faire aucun chaînage*" ("*Prolungare una retta oltre un ostacolo che impedisce la vista, impiegando solo il supporto geometrico, e senza fare alcun concatenamento*").

Sintesi

La costruzione di Servois della retta di Simson-Wallace





Per risolvere il problema relativo al prolungamento di una retta al di là di un ostacolo che ne delimita la vista, Servois procede con la seguente costruzione: presi due punti *A* e *B* sulla direzione della retta da costruire, si determinino i punti *L* e *D* in modo tale che gli angoli *LBD* e *LAD* siano retti: è importante che dal punto *L* si possa vedere al di là dell'ostacolo. Da *L*, preso come vertice, si costruisca l'angolo retto *DLF*, con *F* che giace sul prolungamento di *BD* e, analogamente, sul prolungamento di *AD* si determini il punto *E* tale che l'angolo *AEF* sia retto. Infine, si determini il punto *C* sulla direzione *EF* in modo che l'angolo *LCE* sia retto: il punto *C* così trovato giace sul prolungamento del segmento *AB*, al di là dell'ostacolo *O*. Il quadrilatero *DEFL*, per come è stato costruito, è iscrivibile in una circonferenza; così *L* risulta un punto sulla circonferenza circoscritta al triangolo *DEF*. I punti allineati *A*, *B* e *C* sono i piedi delle perpendicolari condotte da *L* ai lati del suddetto triangolo.

Molte generalizzazioni del teorema di Simson-Wallace furono studiate nel XIX secolo, in particolare da Jacob Steiner. Nel 1828-1829 Steiner ampliò il teorema di Jean-Victor Poncelet che riportiamo di seguito: se, da un punto qualsiasi di una circonferenza circoscritta ad un triangolo, si abbassano sotto lo stesso angolo, preso arbitrariamente, delle oblique sui tre lati del triangolo, i tre piedi delle oblique giacciono su una stessa retta (Fig. 2). Steiner aggiunse che le rette ottenute al variare dell'angolo inviluppano una parabola, il cui fuoco è il punto da cui le oblique sono tracciate.

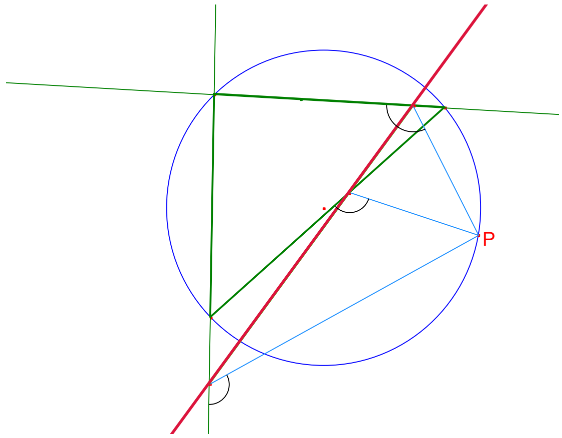


FIG. 2

Nello stesso lavoro, Steiner propose ancora una generalizzazione della retta di Simson-Wallace ad una conica qualsiasi (piuttosto che ad una circonferenza) circoscritta ad un triangolo dato, ottenendo il seguente risultato: se, da un qualsiasi punto *D* di una conica circoscritta ad un triangolo dato *ABC*, si tracciano, sui lati del triangolo, le oblique rispettivamente parallele ai diametri che passano per i punti medi dei lati, i loro piedi appartengono ad una stessa retta (Fig. 3). Può essere interessante in laboratorio la comprensione che si tratta effettivamente di una generalizzazione.

Un'altra generalizzazione, contenuta negli *Annali di Gergonne* e dovuta probabilmente a Gergonne stesso, è: se, da un punto di una circonferenza concentrica a quella circoscritta ad un triangolo, si tracciano le perpendicolari ai lati del triangolo e si congiungono i tre piedi, il triangolo che si forma ha area costante (Fig. 4). L'analogo, relativo ad un poligono regolare, proposto da Simon Antoine Jean Lhuilier, è: se da un punto qualunque di una circonferenza concentrica con un dato poligono regolare si abbassano le perpendicolari sui lati di questo, l'area del poligono che ha i vertici nei piedi delle perpendicolari è costante (Fig. 5).

Nel 1895, John Edward Aloysius Steggall, i cui interessi erano rivolti alla Geometria del triangolo, fornì la costruzione della retta di Simson-Wallace di un poligono. Per

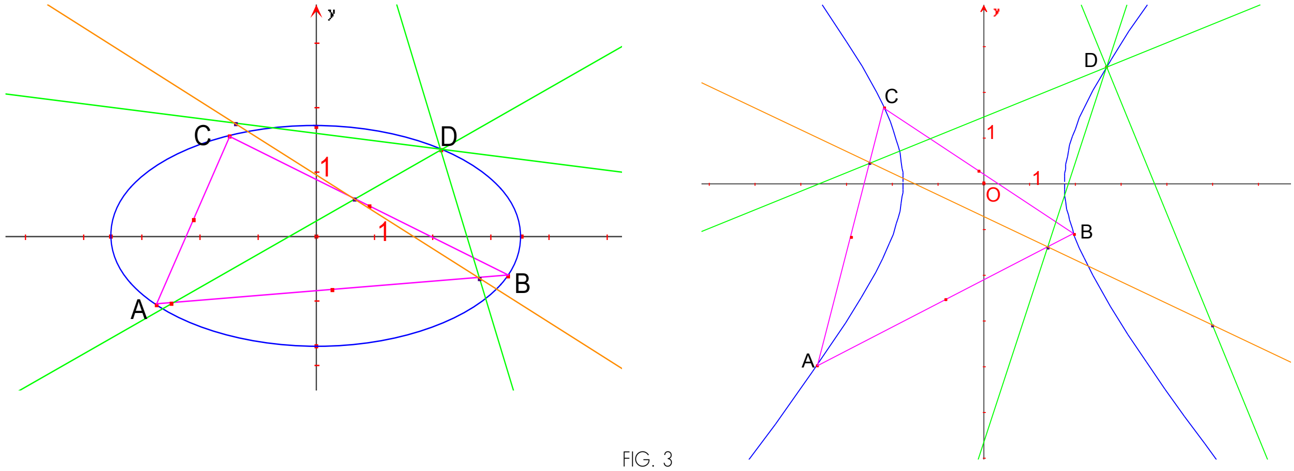


FIG. 3

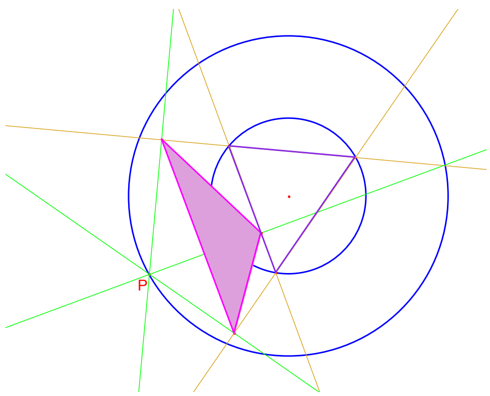


FIG. 4

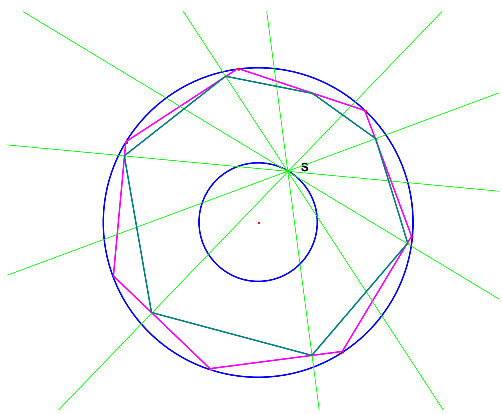


FIG. 5

definirla geometricamente, si può partire dalla costruzione della retta di Simson-Wallace relativa ad un quadrilatero inscrivibile in una circonferenza: si prenda un punto *P* sulla circonferenza circoscritta e si considerino i quattro triangoli ottenuti tralasciando di volta in volta uno dei quattro vertici del quadrilatero. Per ognuno di essi si determinino le relative rette di Simson-Wallace e su queste si traccino le perpendicolari a partire dal punto *P*: si verifica che i piedi delle perpendicolari sono allineati e la retta che li contiene viene definita come la retta di Simson-Wallace del quadrilatero di partenza (Fig. 6).

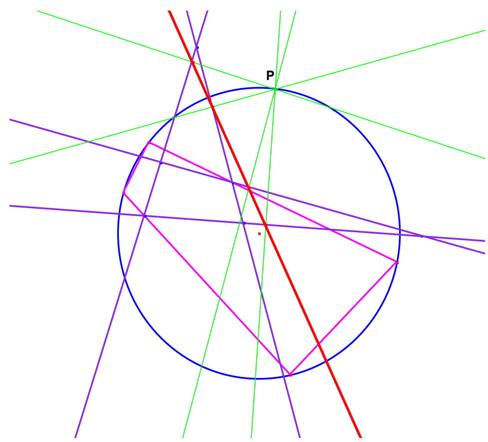


FIG. 6

Volendo generalizzare, si consideri un poligono di *n* lati inscritto in una circonferenza e un punto *P* sulla circonferenza stessa. Per costruire la retta di Simson-Wallace del poligono, si omette di volta in volta uno dei vertici e per ciascuno degli *n* poligoni di *n*-1 lati ottenuti si costruisce la relativa retta di Simson-Wallace applicando un procedimento di tipo ricorsivo. Come prima, i piedi delle perpendicolari condotte da *P* alle *n* rette di Simson-Wallace appartengono tutti ad una stessa retta, la retta di Simson-Wallace del poligono.

La retta di Simson-Wallace e il quadrilatero completo

Nel percorso proposto, Yaglom illustra una serie di teoremi caratteristici della Geometria elementare classica, dove per classica intende facente parte della Geometria sviluppatasi nell'Ottocento. La scienza dei triangoli e

delle circonferenze – spiega infatti l'autore – fu fondata proprio nel XIX secolo, l'età d'oro della Geometria elementare.
Premettiamo la definizione di *quadrilatero completo,* che è quella figura piana individuata da quattro punti, a tre a tre non allineati, e dalle sei rette che li congiungono a due a due (Fig. 7).

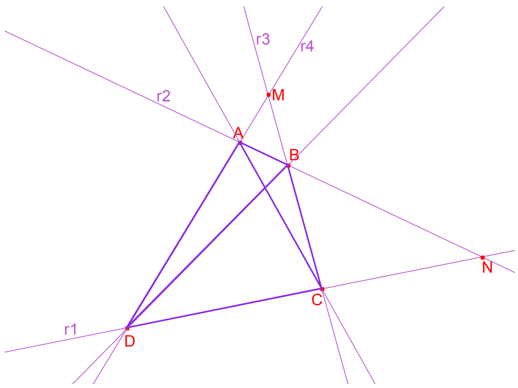


FIG. 7

Yaglom considera un quadrilatero Δ (che non sia un trapezoide) i cui lati siano dati dalle rette r_1, r_2, r_3, r_4 (Fig. 7), che, prese a tre a tre, formano i quattro triangoli T_1, T_2, T_3, T_4, e fornisce una serie di proprietà (facilmente verificabili se si eseguono le costruzioni mediante un *software* di Geometria dinamica, ma dimostrabili pure con poche nozioni di Geometria euclidea): gli ortocentri dei quattro triangoli giacciono su una retta *s* (detta da Yaglom *retta di Steiner* di Δ), i punti medi delle diagonali di Δ e il punto medio del segmento che congiunge i punti di intersezione delle coppie di lati opposti giacciono sulla retta *g* (detta *retta di Gauss* di Δ); si ha poi che *s* e *g* sono sempre perpendicolari tra di loro (Fig. 8).

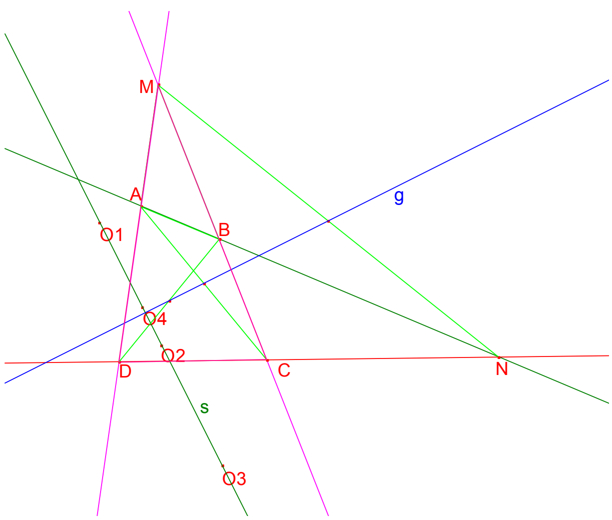


FIG. 8

Inoltre, le circonferenze circoscritte ai quattro triangoli T_i si intersecano in un punto comune *F* (detto *punto di Clifford* di Δ); i piedi delle perpendicolari tracciate da *F* sui lati di Δ giacciono su una retta *w* (detta da Yaglom *retta di Wallis*), la retta di Simson-Wallace di ciascuno dei quattro triangoli considerati, che viene anche chiamata *retta pedale* del quadrilatero Δ (Fig. 9). Si vuole puntualizzare che in un quadrilatero la retta di Simson-Wallace e la retta pedale derivano da due diverse costruzioni, a differenza di ciò che accade nel triangolo. In più, anche i cerchi dei nove punti relativi ai triangoli T_i si intersecano in un punto *E* (chiamato da Yaglom *punto di Eulero*).

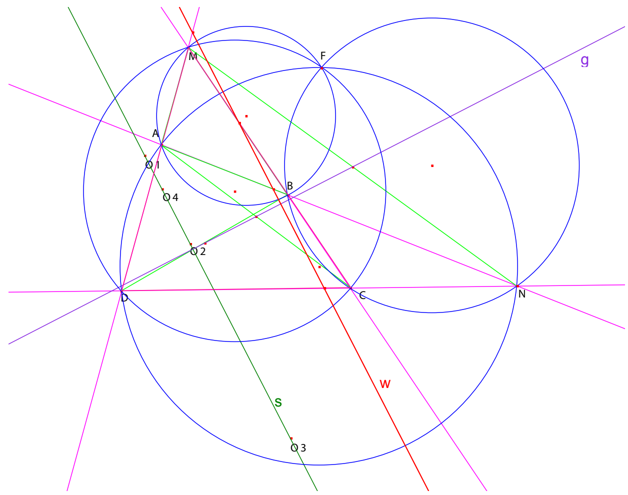
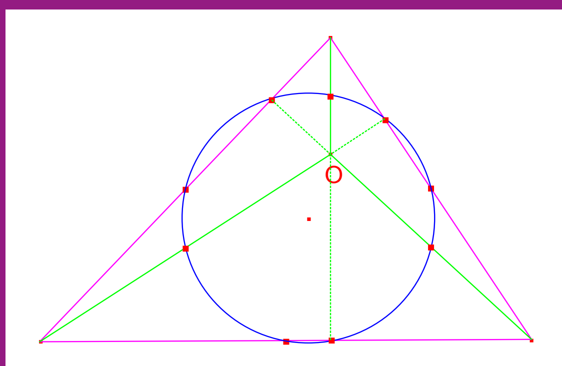


FIG. 9

Il cerchio di Feuerbach

Il cerchio di nove punti, noto anche come *cerchio di Eulero* o *cerchio di Feuerbach* dal nome del suo scopritore Karl Wilhelm Feuerbach, passa per nove punti notevoli di un triangolo: i punti medi dei lati, i piedi delle altezze e i punti medi dei segmenti che congiungono i vertici del triangolo all'ortocentro.



La retta pedale del quadrilatero Δ è parallela alla retta degli ortocentri s e, di conseguenza, perpendicolare alla retta g per i punti medi delle diagonali. Inoltre i centri C_i delle quattro circonferenze circoscritte ai triangoli T_i, che s'intersecano nel punto F, appartengono ad una stessa circonferenza, detta la *circonferenza dei centri*, che passa anche per F, come si evince dalla Fig. 10.

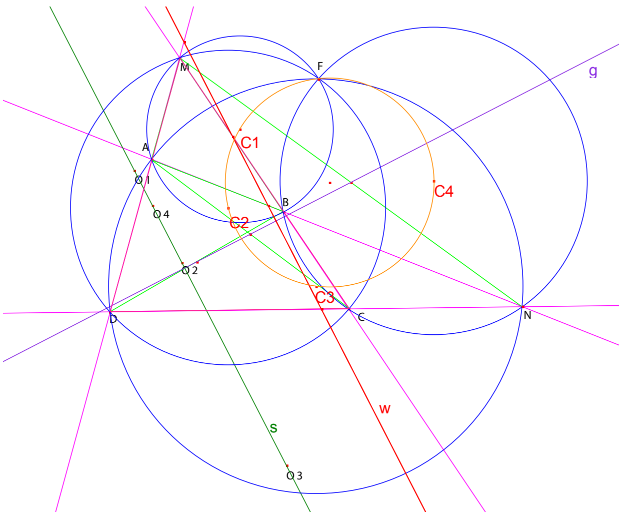


FIG. 10

L'articolata costruzione può essere ampliata se si parte, piuttosto che da un quadrilatero, da un pentagono, indicato con $\prod$ e di lati r_1, r_2, r_3, r_4, r_5. Le cinque quadruple di linee (r_2, r_3, r_4, r_5), (r_1, r_3, r_4, r_5), (r_1, r_2, r_4, r_5), (r_1, r_2, r_3, r_5), (r_1, r_2, r_3, r_4), descrivono cinque quadrilateri completi $\Delta_1,\ldots, \Delta_5$. Le rette di Gauss g_1, …, g_5 dei cinque quadrilateri si intersecano in un punto G (*punto di Gauss* di $\prod$); i relativi *punti di Clifford* giacciono su una circonferenza c (*circonferenza di Clifford* relativa a $\prod$); se poi il pentagono è inscrivibile in una circonferenza, si possono anche definire altri concetti analoghi. Questa serie di teoremi, che può essere estesa ancora di più, costituisce una parte non indifferente nei testi di Yaglom relativi alla Geometria elementare e all'uso in Geometria del principio di induzione. Ulteriori generalizzazioni possono essere ottenute e sono state studiate usando l'inversione circolare, sostituendo le rette con circonferenze passanti per un punto o anche estendendo il problema a dimensione superiore.

Analogia tra la retta di Simson-Wallace ed il teorema di Miquel

La costruzione del quadrilatero completo condotta da Yaglom s'inserisce in un quadro più ampio che si può far risalire al 1871 e a William Kingdon Clifford e che tracceremo sinteticamente.
Il punto d'intersezione F delle quattro circonferenze che circoscrivono i triangoli T_i, il punto di Clifford, è noto anche come *punto di Miquel*, in onore di Auguste Miquel che nel 1838 dimostrò il primo di una serie di dieci teoremi proposti da Steiner nel 1827-1828 e di cui si può vedere una recente interessante dimostrazione completa di Jean Pierre Ehrmann (2004): *"I fuochi di cinque parabole, ognuna delle quali è tangente a quattro rette (di cinque assegnate), stanno su di una circonferenza"*.
Era già un teorema noto che la circonferenza che circoscrive il triangolo formato da tre rette tangenti ad una parabola contenga il fuoco F della stessa (Fig. 11). Questo teorema fu dimostrato da Wallace nel 1798 e mostra che i piedi delle perpendicolari condotte dal fuoco alle tre tangenti sono allineati e cadono sulla tangente al vertice. Essa è quindi la retta di Simson-Wallace del triangolo formato dai punti di intersezione delle tre tangenti alla parabola, da cui deriva l'attribuzione a Wallace del nome stesso della retta.

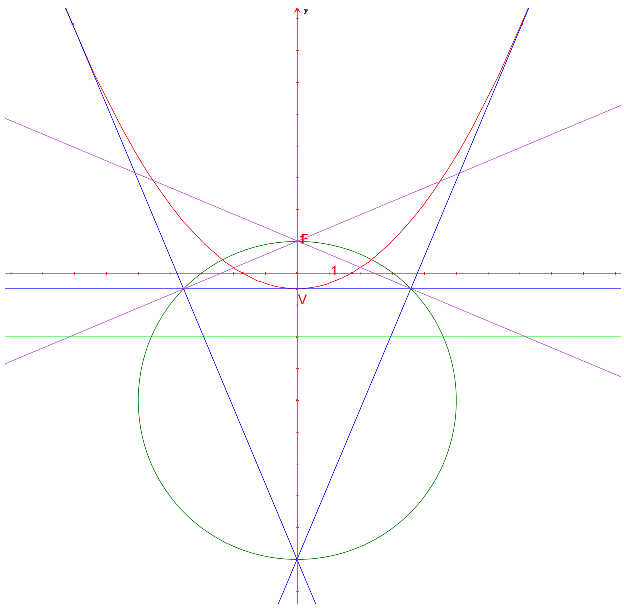


FIG. 11

Se, date quattro rette, si considerano i quattro triangoli ottenuti tralasciando di volta in volta una delle rette, essi saranno circoscritti da quattro circonferenze passanti per il fuoco F della parabola tangente alle quattro rette. Tale problema, che è sostanzialmente quello del quadrilatero completo descritto da Yaglom, si può esprimere chiaramente con proprietà elementari derivanti da rette e circonferenze, senza coinvolgere le parabole, e si dimostra facendo uso della Geometria euclidea classica. È quanto mostra Clifford nel suo lavoro del 1871, generalizzando il teorema a un numero qualsiasi di rette. Infatti, se si hanno cinque rette, togliendone successivamente una, si ottengono cinque quadrilateri completi e cinque punti di Clifford che stanno in una stessa circonferenza (secondo teorema di Steiner); da sei rette togliendone via via una, si ottengono sei insiemi di cinque rette e quindi sei circonferenze come nel caso precedente: queste circonferenze si intersecano in un punto. Ragionando ricorsivamente si ha il teorema generale: un numero pari di rette, $2n$, individua $2n$ circonferenze che s'intersecano in un punto (per $n = 2$ si ha la configurazione del quadrilatero completo); invece un numero dispari di rette, $2n + 1$, genera $2n + 1$ punti che giacciono sulla stessa circonferenza (per $n = 2$ si ha il primo teorema di Steiner). Si consideri la definizione della retta di Simson-Wallace (che Clifford enuncia). Questa costruzione, nel quadro di riferimento del teorema di Miquel, nel caso $2n + 1$ con $n = 2$, viene così generalizzata da Clifford: se da un punto P della circonferenza contenente i cinque punti, generatisi dalle cinque rette, si conducono le perpendicolari ad esse, i relativi piedi appartengono ad una stessa conica passante anche per P (Fig. 12).

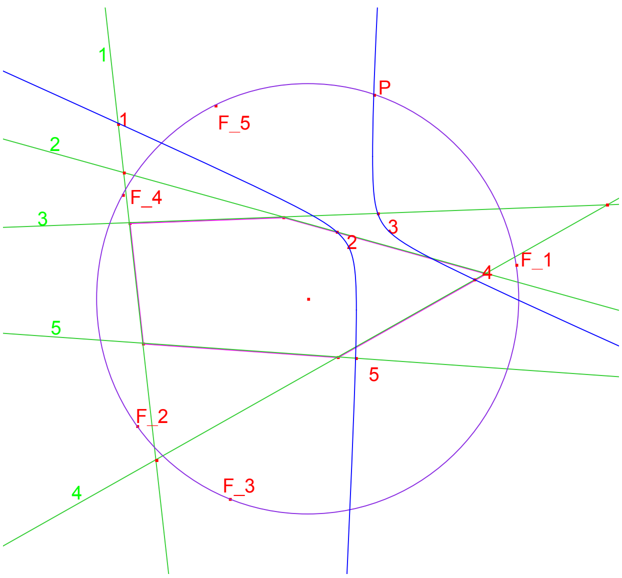


FIG. 12

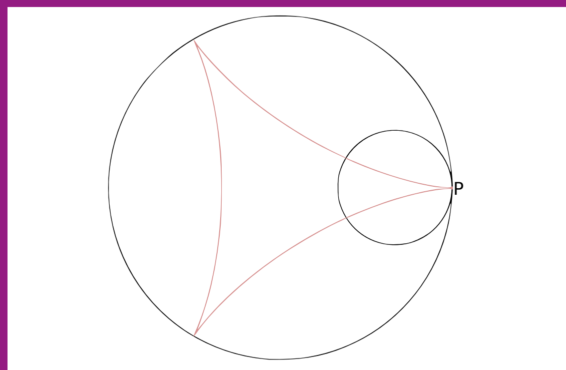
Nel teorema precedente, nel caso $n = 3$, invece di una conica si ottiene una cubica che ha P come punto doppio. È da precisare che gran parte delle costruzioni proposte sinora si ritrova anche in quelle presentate da Steiner nei lavori del 1827-28 e del 1828-29. In particolare, in quest'ultimo, il matematico espose diversi teoremi riguardanti la Geometria dei triangoli e delle coniche e articolate costruzioni sui quadrilateri completi che sarebbe interessante esaminare dal nostro punto di vista laboratoriale.

La retta di Simson-Wallace e le ipocicloidi

Ricordiamo che la classe di una curva algebrica è data dal numero di tangenti che da un punto generico si possono tracciare alla curva. Quindi per esempio una conica è una curva di seconda classe. Nel 1857 Steiner descrisse l'inviluppo della retta di Simson-Wallace relativa ad un triangolo (Fig. 13), mostrando che questa è una curva di quarto ordine e di terza classe (nota anche come *quartica di Steiner*), ossia una *ipocicloide tricuspide*.

L'ipocicloide tricuspide

L'ipocicloide si definisce, in modo classico, come la curva piana generata da un punto su una circonferenza che rotola all'interno di un'altra circonferenza. Se il raggio r della circonferenza mobile è 1/3 (o, che è equivalente, 2/3) del raggio R della circonferenza fissa, la curva è l'ipocicloide tricuspide. In generale, se la circonferenza più piccola ha raggio r e la più grande ha raggio $R = kr$, dove k è un intero, allora la curva che si forma è chiusa ed ha k cuspidi.



In realtà si deve al matematico italiano Luigi Cremona la prova nel 1864 dell'equivalenza della quartica di Steiner con l'ipocicloide tricuspide attraverso un metodo puramente geometrico.

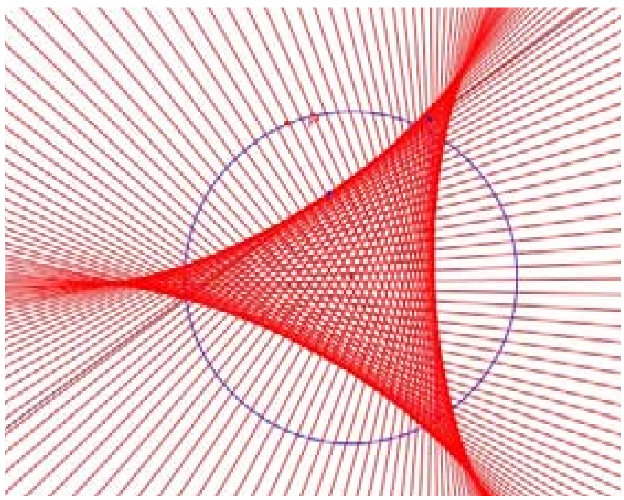


FIG. 13

Alcune proprietà di questa curva sono molto interessanti. L'ipocicloide tricuspide circoscrive il cerchio di nove punti (Fig. 14) relativo al triangolo che genera la retta di

Simson-Wallace. Il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo è doppio del raggio del cerchio di nove punti; inoltre, quest'ultimo è concentrico con la circonferenza che passa per le tre cuspidi dell'ipocicloide.

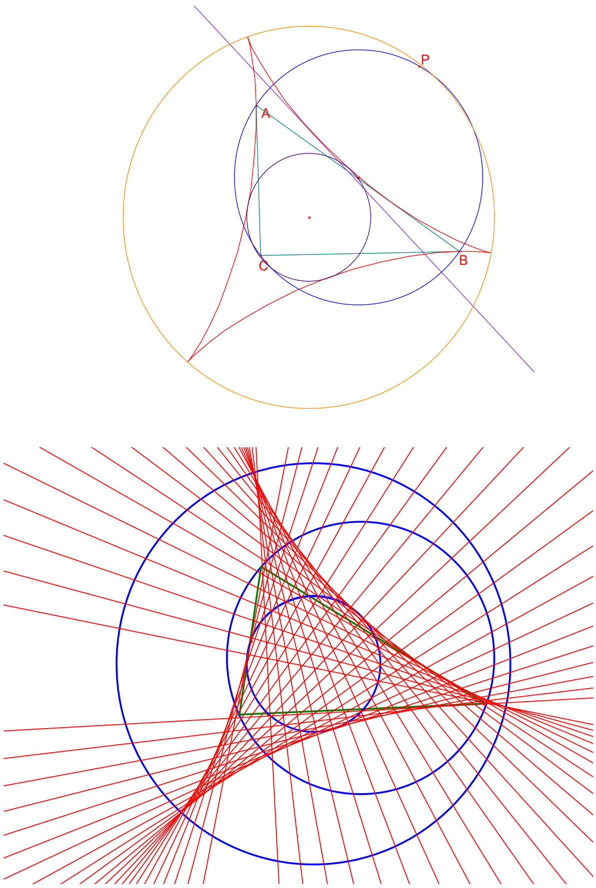


FIG. 14

Un risultato notevole del lavoro di Steggall sopra menzionato è che l'inviluppo della retta di Simson-Wallace relativa ad un quadrato (Fig. 15) è una ipocicloide a quattro cuspidi (anche detta *astroide*).

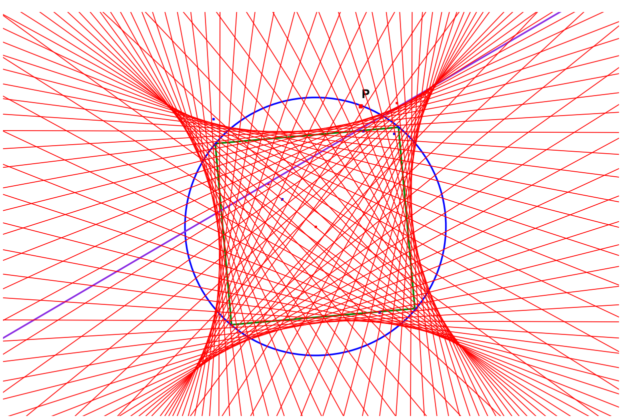


FIG. 15

Steggall generalizzò il risultato precedente mostrando che l'inviluppo della retta di Simson-Wallace relativa ad un qualsiasi poligono regolare di n lati (Fig. 16) è una ipocicloide ad n cuspidi, procedimento esaminato in dettaglio nel 1919 da David Francis Barrow.

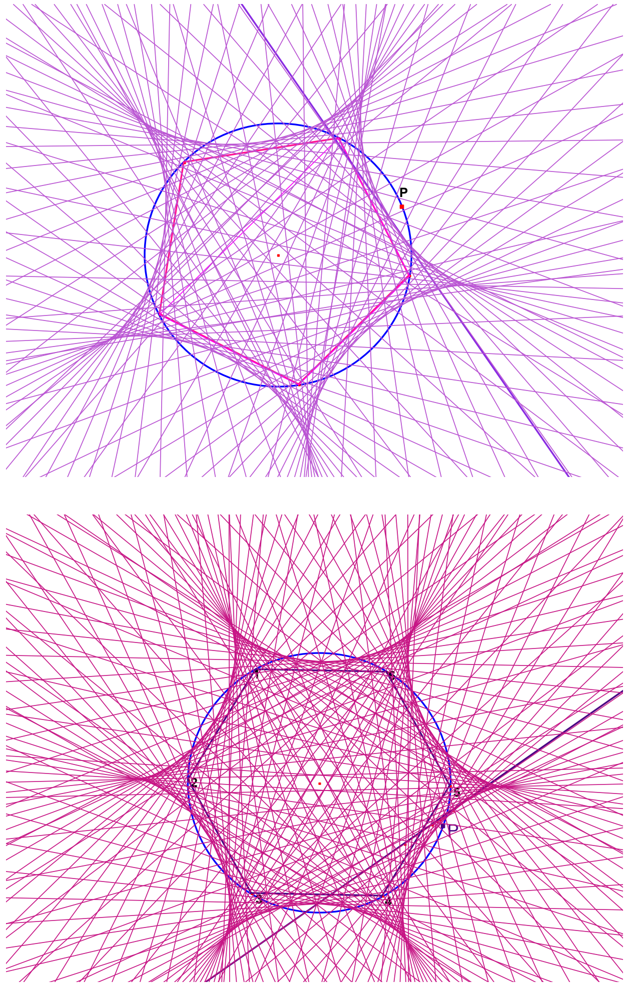


FIG. 16

Per concludere, qualche osservazione. I vantaggi della trattazione di un tema di Geometria elementare – così come affrontato da Yaglom e qui ampliato – facendo uso di *software* di Geometria dinamica sono propri della comunicazione scientifica rivolta agli insegnanti. Non si può scindere infatti tale tipo di comunicazione dalla formazione dell'insegnante e dalla didattica, perché attraverso di essa si elaborano metodologie e pratiche che si vogliono poi trasmettere. Nell'ambito della divulgazione di argomenti matematici in modalità laboratoriale, le costruzioni geometriche qui presentate non seguono la successione curriculare a cui normalmente ci si attiene, ma ripercorrono il filone storico centrato sulla retta di Simson-Wallace e le sue applicazioni. Inoltre la lettura e lo studio di problemi di grandi mate-

matici diventano più evidenti ed intuitivi: costruzioni come quelle descritte da Steiner, ad esempio, risultano più facili da capire.
Al giorno d'oggi l'avvento di *software* di Geometria dinamica ha nuovamente cambiato, almeno in parte, il ruolo ed i contenuti della Geometria elementare. Attualmente, ad esempio, molti programmi dei corsi di Matematiche Complementari si occupano di temi di Geometria elementare e gioca un ruolo chiave la possibilità di eseguire le costruzioni geometriche utilizzando come strumento un *software* di Geometria dinamica, mediante un approccio laboratoriale operativo ed interattivo. In questo quadro di riferimento, può assumere un altro significato la rilettura di testi classici di grandi matematici, quali Steiner, Cremona o Clifford, se costruzioni, teoremi e proprietà vengono riformulati mediante un *software* dinamico in un contesto laboratoriale. In questo senso e in questa direzione, la Geometria elementare assume una valenza forse più pedagogica (e culturale in senso lato) che scientifica in senso stretto e gli obiettivi a cui si può giungere nel riproporla possono essere sintetizzati nel conseguimento, da parte degli studenti, di una più profonda e consapevole conoscenza dei concetti matematici implicati nelle costruzioni, nello stimolare la memoria, l'immaginazione, l'analisi e la capacità di confronto, nell'aiutare lo sviluppo del pensiero logico. A questo proposito, possiamo riprendere quanto detto da Renato Betti (2007): "*Certamente, nell'educazione matematica moderna, si sta perdendo il senso geometrico delle figure e dello spazio che occupano. Per recuperarlo sarebbe utile senz'altro recuperare la coscienza che gli oggetti della Geometria sono, o sono stati, forme spaziali, da considerare per il loro aspetto. Il calcolo e la deduzione, gli strumenti dell'Analisi e dell'Algebra, sono un potente metodo d'indagine per numerosi fenomeni della Matematica, ma la visione sintetica legata alla percezione immediata (e anche il senso estetico) è all'origine di quella parte della Matematica che indaga le forme dello spazio. Questa rappresenta ancora oggi un potente metodo di conoscenza e una fonte di materiale educativo*".
Anche la trattazione storica può fornire spunti utili per la formazione dei docenti ed eventualmente per la realizzazione di attività didattiche incentrate su un tema di Geometria elementare. Inoltre, da un punto di vista strettamente storiografico, a nostro avviso manca una trattazione storicamente fondata di tutta una serie di problematiche, tra cui quelle di cui qui abbiamo parlato, che, pur essendo elementari, hanno giocato un ruolo non indifferente nella formazione di matematici di primo piano e hanno anche avuto frequenti intersezioni con ambiti di ricerca più avanzata. Una "buona" Matematica elementare dovrebbe avere, a nostro avviso, anche la caratteristica di significativi contatti con la ricerca attiva. Per molti spunti relativi alla ricerca attuale che si innesta sulle problematiche elementari di cui abbiamo parlato, si può consultare il lavoro di Longuet-Higgins citato in bibliografia. Per una più vasta prospettiva nella direzione dei legami tra Matematica elementare e ricerca rinviamo al sito del progetto Klein (http://blog.kleinproject.org/) cui anche l'U.M.I. dà il suo sostegno. ■

Bibliografia

Betti R., "Il triangolo: che meraviglia!", *Alice&Bob*, n. 2, Centro PRISTEM Università Bocconi, Springer, 2007.

Clifford W.K., "A synthetic proof of Miquel's theorem", *The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics*, vol. 5, pp. 124-141.

Cremona L., "Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1864, n. 64, pp. 101–123.

Ehrmann J.P., "Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral", *Forum Geometricorum*, vol. 4, 2004, pp. 35-52.

Longuet-Higgins M.S., "Clifford's chain and its analogues in relation to the higher polytopes", *Proceedings of the Royal Society of London A.*, vol. 330, 1972, pp. 443-466.

Mackay J.S., "The Wallace line and the Wallace point", *Edinburgh Mathematical Society*, vol. ix, 1890.

Scimemi B., "Geometria del triangolo: retta di Simson, parabole tritangenti", *Cabrirrsae Bollettino degli utilizzatori di Cabri-géomètre*, 1997 n. 12, pp. 16-19.

Servois F.J., "Géométrie pratique. Problème. Prolonger une droite accessible audelà d'un obstacle qui borne la vue, en n'employant que l'équerre d'arpenteur, et sans faire aucun chaînage?", *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 4, 1813-1814, pp. 250-253.

Steggall J.E.A., "On the envelope of the Simson line of a polygon", *Proceedings of The Edinburgh Mathematical Society*, vol. 14, 1895, pp. 122-126.

Steiner J., "Questions proposées. Théorème sur le quadrilatère complet", *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 18, 1827-1828, pp. 302-304.

Steiner J., "Géométrie pure. Développement d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques", *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 19, 1828-1829, pp. 37-64.

Yaglom I.M, "Elementary Geometry, Then and Now", *The Geometric Vein*, Springer New York, 1981, pp. 253-269.