FRONTESPIZIO DELLA *MÉCHANIQUE ANALITIQUE* E DORSI DELLA *MÉCANIQUE ANALITIQUE* (© Collections *École Polytéchnique* di Parigi)

LA STORIA DELLA *MÉCHANIQUE ANALITIQUE*

di Sandro Caparrini

Sandro Caparrini

Si è laureato in Fisica e in Matematica all'Università di Torino. I suoi interessi di storico si concentrano quindi sulle questioni al confine tra le due discipline, dal Settecento in avanti. È stato borsista a Harvard, allo MIT e presso le Università di Tel-Aviv, Ferrara e Toronto. Ha insegnato per due anni Storia della Scienza all'Università di Lille. Nel 2004 ha vinto il *Premio Slade* della *British Society for the History of Science*, assegnato al lavoro di storia della scienza più originale del biennio precedente.

1. La Meccanica dopo Newton

Pochi leggono i classici della letteratura, pochissimi i classici della scienza e solo una sparuta minoranza va oltre le prime pagine dei classici della Matematica. In una graduatoria ideale di libri molto citati ma poco letti, la *Méchanique analitique* di Lagrange (pubblicata nel 1788) occuperebbe uno dei primi posti. Le note a piè di pagina dei libri di Meccanica superiore si limitano a dire che diede origine a quella disciplina detta appunto "Meccanica analitica". Le storie generali della scienza spiegano che è il punto d'arrivo della Meccanica del Settecento, ma raramente aggiungono altro.

Per comprendere il ruolo della *Méchanique analitique* nella storia della scienza, dobbiamo tornare alla pubblicazione dei *Principia* di Newton nel 1687. Una vecchia tradizione storiografica lascia credere che Newton abbia scoperto la maggior parte della Meccanica classica, lasciando ai suoi successori il semplice compito di sviluppare gli aspetti formali. In realtà, le cose andarono diversamente. Nei *Principia* si trovano risolti con metodi semi-geometrici parecchi problemi importanti sul moto di un punto sottoposto all'azione di una forza centrale, ma non vi è nulla che si avvicini a una teoria dei sistemi vincolati. La meccanica dei fluidi vi è esposta in forma primitiva, mancano quasi del tutto i corpi rigidi e i sistemi vibranti vi sono appena accennati. Per sviluppare queste teorie, occorreva nuova Matematica ma soprattutto c'era bisogno di nuovi princìpi fisici.

Nei decenni successivi alla pubblicazione dei *Principia*, il problema titanico della creazione di una meccanica dei sistemi in forma analitica fu affrontato da tre generazioni di fisici matematici di prim'ordine.

La prima generazione era formata da contemporanei di Newton. Tra il 1690 e il 1710, Pierre Varignon e Johann Bernoulli tradussero in notazione leibniziana parecchi risultati dei *Principia*. Jacob Hermann, nella *Phoronomia* (1716), espresse la seconda legge di Newton tramite la formula $f = m\, dv/dt$. Con la soluzione di Johann Bernoulli del problema della catenaria (1691) e l'analisi di suo fratello Jacob della deformazione elastica di una trave infissa in un muro (1694), ebbe inizio la meccanica dei continui.

La seconda generazione arrivò sulla scena poco prima del 1730. I suoi principali esponenti erano Daniel Bernoulli, Leonhard Eulero, Alexis Clairaut e Jean le Rond d'Alembert. Avevano in comune il fatto di essere nati all'inizio del secolo, di aver imparato le sottigliezze del calcolo leibniziano nell'adolescenza e di aver assorbito i *Principia* prima di compiere diciotto anni. Direttamente o indirettamente, erano tutti allievi di Johann Bernoulli. Le loro scoperte furono tante e di tale portata che persino un semplice elenco richiederebbe troppo spazio. Limitiamoci a ricordare che ci hanno lasciato in eredità la dinamica dei corpi rigidi, la teoria dei fluidi perfetti e alcuni capitoli fondamentali dell'elasticità lineare. A loro dobbiamo i teoremi di conservazione, il concetto di potenziale, i princìpi della Statica e della Dinamica per i sistemi e la teoria delle perturbazioni in Astronomia.

Attorno al 1760, la Meccanica cominciava ad assomigliare a quella che viene insegnata oggi nelle nostre Università. Per rendersene conto, basta porre fianco a fianco una memoria di Eulero e un capitolo dei *Principia*. Un bravo laureato in Fisica o in Matematica dei nostri giorni può riuscire con qualche sforzo a capire Eulero (purché conosca il latino) mentre solo un esperto è in grado di apprezzare Newton. Tuttavia, nonostante gli enormi progressi, la Meccanica di quel periodo appariva ancora come una collezione di teorie separate. Non esistevano né una formulazione generale né un collegamento ben definito tra i diversi princìpi.

È a questo punto che entra in scena Lagrange, il principale rappresentante della terza generazione di successori di Newton. Aveva circa trent'anni meno di Euler e d'Alembert. All'età in cui i ragazzi del giorno d'oggi escono dalle scuole medie, in un paio d'anni si era impadronito completamente di tutta la Matematica e la Meccanica prodotte nei decenni precedenti. Conosceva a fondo la recentissima teoria delle equazioni a derivate parziali, la chiave per accedere alla meccanica dei continui. Forte di queste armi, Lagrange si pose fin dall'inizio l'obiettivo di unificare tutta la Meccanica conosciuta ai suoi tempi.

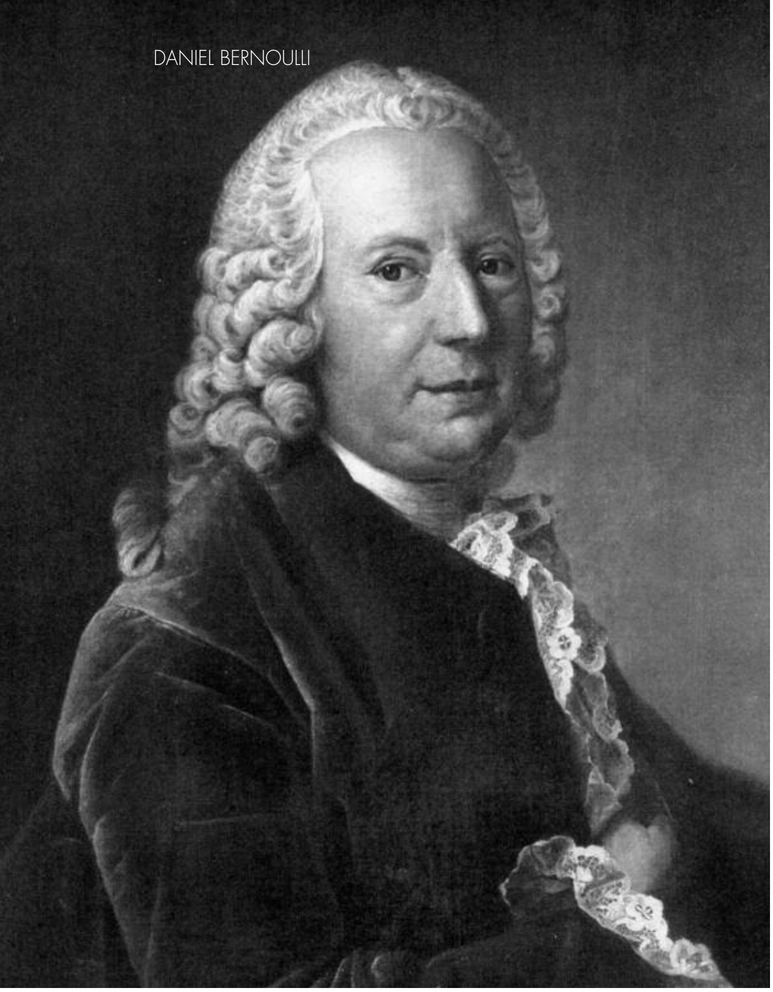
"Il problema titanico della creazione di una meccanica dei sistemi in forma analitica fu affrontato da tre generazioni di fisici matematici di prim'ordine."

2. Il programma lagrangiano di formalizzazione della Meccanica

Quando pubblicò la *Méchanique analitique*, Lagrange aveva cinquantadue anni. Non tutto nel libro era nuovo: parecchi risultati erano apparsi in precedenza in lavori suoi e di Eulero. Sarebbe sbagliato però credere che esso sia il tentativo di un matematico avviato verso la senilità di coordinare le proprie scoperte giovanili. Al contrario: dapprima nacque il progetto di un testo che unificasse tutta la Meccanica, poi vennero i singoli risultati. Il sogno di una unificazione e formalizzazione della Meccanica è l'asse portante delle ricerche di Fisica matematica di Lagrange.

Lagrange accenna ai propri studi sui fondamenti della Meccanica già nella sua prima lettera a Eulero (4 luglio 1754), scritta quando aveva solo diciotto anni. In un elenco di risultati dei quali vorrebbe discutere in futuro compaiono anche "*alcune osservazioni sui massimi e minimi che si trovano nelle azioni della natura*". Si tratta di un riferimento al principio di minima azione, formulato da Pierre-Louis de Maupertuis e da Eulero nel 1744. Nella versio-

DANIEL BERNOULLI



PIERRE VARIGNON

SIR ISAAC NEWTON

ne di Maupertuis, il principio della minima azione asseriva che il moto di un sistema di corpi sotto l'azione di forze qualsiasi era tale da minimizzare il prodotto della velocità per la distanza percorsa. L'idea era promettente ma la formulazione era poco chiara e l'esposizione si riduceva a uno sfoggio di retorica. Eulero affrontò il problema, con ben altro stile, in appendice al suo libro sui problemi variazionali, la *Methodus inveniendi* (*Metodo per trovare le curve che godono di proprietà di massimo o di minimo*, 1744). Applicando i risultati puramente matematici della prima parte, Eulero dimostrò che nel caso di un singolo punto materiale sotto l'azione di forze centrali l'integrale:

$$\int_P^Q v\,ds,$$

(dove P è il punto di partenza, Q il punto d'arrivo, s la lunghezza d'arco della traiettoria) risulta minimo in corrispondenza della traiettoria effettiva. Si trattava di un risultato notevole ma certo non sufficiente a fondare tutta la Dinamica, come invece pretendeva Maupertuis. Nel 1748 Eulero espresse l'opinione che si fosse ancora molto lontani ("*encore bien éloignés*") dal trovare la grandezza da minimizzare per un sistema meccanico qualsiasi.

Il problema che Eulero considerava difficilissimo fu risolto da Lagrange quasi come una conseguenza della sua scoperta del Calcolo delle variazioni. Ricordiamo che Lagrange ebbe l'intuizione del Calcolo delle variazioni nel 1755 dopo aver letto la *Methodus inveniendi*. Un primo abbozzo del nuovo algoritmo appare nella sua seconda lettera a Eulero (12 agosto 1755), il quale rispose immediatamente complimentandosi per l'importante scoperta (6 settembre

> Nel 1748 Eulero espresse l'opinione che si fosse ancora molto lontani dal trovare la grandezza da minimizzare per un sistema meccanico qualsiasi. Il problema che considerava difficilissimo fu risolto da Lagrange quasi come una conseguenza della sua scoperta del Calcolo delle variazioni.

1755). Poi la discussione si spostò verso la Meccanica. La lettera successiva di Lagrange (20 novembre 1755) contiene una soluzione analitica del problema di trovare la curva della discesa più rapida di un punto materiale lungo un piano verticale da un punto fisso ad una curva assegnata.
All'inizio del 1756 Lagrange spedì a Eulero una Memoria sul principio di minima azione da pubblicare negli *Atti dell'Accademia delle Scienze* di Berlino. A quell'epoca già pensava che il principio "*si può considerare come la chiave di tutti i problemi, sia statici che dinamici*" (lettera a Eulero del 19 maggio 1756). Dunque, a distanza di solo un anno dalla scoperta del Calcolo delle variazioni, Lagrange mirava a dedurre l'intera Meccanica dal principio di minima azione.
In effetti si ha l'impressione che, dalla fine del 1755 fino circa al 1760, Lagrange si sia dedicato soprattutto alla Meccanica. Le sue Memorie di quel periodo riguardano il principio di minima azione, la propagazione ondosa, le corde vibranti e la risoluzione delle equazioni alle derivate parziali del moto dei fluidi. Oltre alla soddisfazione puramente scientifica di risolvere i maggiori problemi della Fisica matematica di quell'epoca, c'era in gioco la possibilità di ottenere l'appoggio accademico di Eulero e Maupertuis.
Dopo aver spedito a Berlino la Memoria sulla minima azione, Lagrange si mise al lavoro per preparare una trattazione completa dei propri risultati variazionali. Il 4 maggio 1757 scrisse al matematico milanese Paolo Frisi affermando di aver quasi terminato due dissertazioni: la prima riguardava il Calcolo delle variazioni, la seconda consisteva "*nell'applicazione del Principio Maupertuisiano a tutti i casi più complicati della Dinamica ed Idrodinamica, ricavando da esso delle formole generalissime per cui, dato un sistema qualunque di corpi, colle leggi delle forze sollecitanti si vengono a dirittura e con facilità grandissima a ritrovare tutte le equazioni necessarie per la determinazione del moto di ciascun corpo*".
Con il passare del tempo, la massa di risultati cresceva. Nel 1759, le due dissertazioni avevano preso la forma di un libro centrato soprattutto sulla Meccanica. Lagrange ne parla in una lettera a Daniel Bernoulli del 15 novembre 1759: "*Poiché sto lavorando ad un'opera* ["un Ouvrage"] *che ha per scopo di dedurre in modo semplice e generale la soluzione dei problemi più complicati, sia dell'equilibrio che del movimento, dalla sola formula della minima quantità d'azione, desidererei molto sapere tutto quello che avete scoperto riguardo alle curve elastiche per mezzo di questa formula*". Possiamo considerare questo trattato come il primo passo verso la *Méchanique analitique*.
Mentre era impegnato contemporaneamente nella creazione di un nuovo ramo dell'Analisi e nella rifondazione della Dinamica, Lagrange doveva anche redigere due serie di appunti (di Analisi e di Meccanica) per gli allievi della Regia Scuola d'Artiglieria di Torino. Degli appunti di Analisi si è conservata una copia; di quelli di Meccanica, invece, si sono perse le tracce all'inizio dell'Ottocento. Certamente, queste note elementari per studenti erano troppo lontane dai metodi avanzati della Meccanica superiore per essere una prima versione della difficilissima *Méchanique analitique*. Però, Lagrange riteneva di aver organizzato il testo secondo "*la vraye metaphisique*" della Meccanica. Nella terminologia del Settecento, la "metafisica" di una scienza era la sua fondazione metodologica. Possiamo quindi ipotizzare che gli appunti di Meccanica per i giovani artiglieri torinesi abbiano avuto qualche peso nell'evoluzione del suo pensiero sui princìpi della Meccanica.
Nel 1756 la corrispondenza tra Eulero e Lagrange si interruppe a causa della Guerra dei Sette Anni. Riprese nel 1759, quando Lagrange riuscì a far arrivare a Berlino due lettere e il primo volume dei *Miscellanea philosophico-mathematica* della Società Privata di Torino (la futura Accademia delle Scienze). Tra le altre cose, chiedeva a Eulero se sarebbe stato possibile far stampare il suo libro a Berlino (28 luglio e 4 agosto 1759).
Riassumiamo la situazione come si presentava alla metà del 1759. Per almeno tre anni Lagrange aveva scritto e riflettuto sul Calcolo delle variazioni e sulla unificazione della Dinamica; tuttavia, non aveva ancora pubblicato nulla e pochissimi sapevano di tali ricerche. Attendeva la pubblicazione di una Memoria sul principio di minima azione negli *Atti* dell'Accademia di Berlino e teneva sulla scrivania un trattato completo, ormai pronto per la stampa. Nel frattempo, sulla base dei soli risultati spediti per lettera ad Eulero e Maupertuis, era stato eletto socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Berlino.
Questo tergiversare con le pubblicazioni si concluse com'era in fondo logico aspettarsi. Il 2 ottobre 1759 Eulero rispose a Lagrange. Lo ringraziava del dono dei *Miscellanea*, consigliava di pubblicare il libro sulla minima azione a Ginevra o a Losanna e lo informava della scomparsa di Maupertuis. Inoltre, quasi per inciso, gli faceva sapere di aver presentato all'Accademia di Berlino, tre anni prima, due Memorie sul nuovo Calcolo delle variazioni. Per correttezza aveva chiesto di non pubblicare le Memorie fino a quando Lagrange non avesse resi noti a tutti i propri risultati. Della Memoria sul principio di minima azione, spedita nel 1756, non faceva menzione (e a tutt'oggi non se n'è trovata traccia).

La storia della *Méchanique analitique*

È difficile a distanza di due secoli e mezzo interpretare i sentimenti di un uomo riservato qual era Lagrange ma esistono abbastanza indizi per credere che si sia sentito tradito. Il suo risentimento si può intuire leggendo i commenti sarcastici su Eulero che ricorrono nella corrispondenza con d'Alembert. Eulero, da parte sua, sembra che non si sia troppo interessato ai successi del principio di minima azione. Forse la visione lagrangiana della Fisica matematica era troppo formale per i suoi gusti.

A questo punto bisognava pubblicare senza indugi. L'anno seguente Lagrange inserì due Memorie, una sul Calcolo delle variazioni e l'altra sul principio di minima azione, nel secondo volume dei *Miscellanea* torinesi. Qui la trattazione è estremamente scarna e concisa; probabilmente si trattava di riassunti delle Memorie di cui aveva scritto a Frisi nel 1757. Nella lettera che accompagna il dono del volume a Eulero (28 ottobre 1762), Lagrange spiega che aveva creduto "*di dover sopprimere quello che aveva già quasi ottenuto sull'argomento*" rendendo l'esposizione "*corta per quanto possibile*" dopo aver saputo dell'imminente apparizione dei lavori di Eulero sul Calcolo delle variazioni. La scelta di pubblicare due monconi piuttosto che lo sviluppo completo di scoperte fondamentali rivela qualcosa del suo carattere chiuso e orgoglioso. Sorprendentemente, ringrazia Eulero per aver riformulato a modo suo il Calcolo delle variazioni: "*Sono impaziente di poter approfittare della nuova luce che voi avete gettato su una materia tanto difficile; nel frattempo vi prego di ricevere i miei umilissimi ringraziamenti per l'onore che avete voluto farmi, e che considero la ricompensa più lusinghiera per i miei studi matematici*". Questo è il primo esempio nella corrispondenza dell'ironia sottile e feroce di cui Lagrange sapeva dar prova.

La seconda Memoria, intitolata *Application de la méthode exposée dans le Mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique*, è in effetti un trattatello sul principio della minima azione generalizzato a sistemi di punti vincolati. Lagrange definisce la quantità da minimizzare come la somma su tutti i corpi del sistema degli integrali di Eulero, ciascuno moltiplicato per la massa del corpo:

$$m_1 \int_P^Q v_1 ds_1 + m_2 \int_P^Q v_2 ds_2 + \cdots ecc.,$$

(dove m_1, m_2, ... ecc. sono le masse) con la condizione che valga la conservazione dell'energia. Quindi la relazione che Eulero riteneva quasi impossibile scoprire non era altro che una immediata estensione della formula data nella *Methodus inveniendi*. Come mai Eulero non ci era arrivato per primo? La spiegazione sta nelle diverse concezioni scientifiche dei due matematici. Semplificando un po' la questione: per Eulero era necessario dimostrare in base alle leggi della Meccanica che un certo integrale dovesse essere reso minimo, mentre per Lagrange era sufficiente trovare una espressione che conducesse a risultati corretti. Da allora, i due metodi continuano a ricorrere nella storia della Fisica teorica.

> "Per almeno tre anni Lagrange aveva scritto e riflettuto sul Calcolo delle variazioni e sulla unificazione della Dinamica; tuttavia, non aveva ancora pubblicato nulla e pochissimi sapevano di tali ricerche."

Notiamo che Lagrange non parla di "principio della minima azione" – una locuzione associata al nome di Maupertuis e a fastidiose polemiche di priorità – ma di un generico "principio generale" che estende un teorema di Eulero. Queste sottigliezze dialettiche, di cui si trovano altri esempi nei suoi scritti, generalmente indicano quali fossero le reali opinioni di Lagrange su uomini e fatti, al di là delle cortesie convenzionali.

(Una precisazione: i testi moderni talvolta creano confusione nella nomenclatura sui princìpi variazionali. Per qualche motivo, i fisici hanno deciso di chiamare "principio di minima azione" il principio variazionale di Hamilton, che è una generalizzazione del principio di Maupertuis, Eulero e Lagrange. Basta però consultare un trattato classico di Meccanica razionale per ristabilire la chiarezza).

I risultati della *Application* vanno molto al di là di tutto quanto fino a quel momento era stato ottenuto dai princìpi variazionali. Lagrange ritrova facilmente i teoremi di Eulero sul singolo punto libero attirato da diversi centri di forza, poi li generalizza al caso di più punti (liberi o vincolati). In seguito, passa ai sistemi continui ricavando ad esempio le equazioni del moto di una corda elastica, di un corpo rigido libero o vincolato, di un fluido comprimibile o incomprimibile.

Dopo aver annunciato al mondo matematico le nuove scoperte, sarebbe stato naturale che Lagrange avesse fatto stampare il trattato completo. Invece il libro non fu mai pubblicato; come la Memoria per l'Accademia di Berlino, è scomparso senza lasciare traccia. Lagrange non dice nelle sue lettere cosa sia successo e a noi non resta che fare delle ipotesi. La più ragionevole è che Lagrange avesse deciso che il principio di minima azione non fosse abbastanza forte da reggere tutta la Meccanica. Si trova qualche indicazione di questo ripensamento in una Memoria del 1762 sulla composizione delle forze scritta da Daviet de Foncenex, un allievo di Lagrange alla Scuola d'Artiglieria. Foncenex scrive che nella Meccanica "*non esiste alcun problema al quale non si possa applicare con successo il metodo che si trova all'inizio della seconda parte del* Traité de dynamique *di M. d'Alembert*". Qualche pagina dopo, afferma che il principio delle velocità virtuali "*si può a ragione considerare come il più fecondo e il più universale della Meccanica: in effetti, tutti gli altri si riducono facilmente ad esso; il principio delle forze vive, e generalmente tutti quelli che i matematici hanno immaginato per facilitare la risoluzione di vari problemi, ne sono una conse-*

guenza puramente matematica, o piuttosto non sono altro che questo principio ridotto in formule". Sono appunto questi due princìpi che Lagrange pose a fondamento della *Méchanique analitique*. Può darsi che li avesse esposti nel suo corso alla Scuola; certamente ne discusse con Foncenex. Addirittura, secondo il collega e biografo Delambre, il vero autore della Memoria sarebbe proprio Lagrange. In tutti i casi, vi sono pochi dubbi che Foncenex esprima il pensiero di Lagrange.
Nel 1766 Lagrange lasciò Torino per succedere a Eulero come direttore della classe di Matematiche dell'Accademia di Berlino. Vi rimase per ventun anni. Fu un periodo estremamente produttivo, nel quale la sua vita e il lavoro si identificano totalmente.
In diverse Memorie del periodo berlinese compaiono temi e risultati che si ritroveranno poi nella *Méchanique analitique*. Il principio dei lavori virtuali in congiunzione con il principio di d'Alembert, come base della Dinamica, appare nel 1765; gli integrali primi generali delle equazioni del moto (tramite l'uso sistematico del potenziale delle forze) nel 1779; le celebri equazioni del moto di Lagrange, nel 1782. L'uso di coordinate qualsiasi appariva implicitamente già nella *Application* del 1762. Lagrange stava pian piano erigendo la struttura del suo trattato.
Il primo accenno esplicito alla *Méchanique analitique* compare in una lettera a Laplace del 13 settembre 1782: "*Ho quasi terminato un trattato di Meccanica analitica fondato unicamente sul principio o formula che espongo nella prima sezione della Memoria qui acclusa*". Nel 1786 l'opera era ultimata. Lagrange desiderava che fosse stampata a Parigi, dove sperava che i tipografi facessero meno errori nel comporre le numerose formule. Una copia del manoscritto fu portata all'abate Marie, un autore di testi didattici che Lagrange conosceva fin dai tempi della sua prima visita a Parigi. Tra gli stampatori parigini solo Desaint accettò di pubblicare un testo di livello così elevato e lo fece a patto che l'abate Marie si impegnasse per iscritto ad acquistare le copie invendute. Le bozze di stampa furono corrette da Legendre, uno degli astri nascenti della Matematica francese.
La *Méchanique analitique* fu pubblicata nel 1788, quando ormai l'autore si era stabilito a Parigi. Fu immediatamente chiaro a tutti i competenti che si trattava di un capolavoro. Ma Lagrange, colto da una forma di depressione e di disgusto per la Matematica, non riuscì a godere del suo trionfo. Delambre racconta che neppure aprì la propria copia.

3. Cosa contiene la *Méchanique analitique*?

Ogni descrizione della *Méchanique analitique* cita quel brano dell'Introduzione in cui si afferma che "*non si troveranno figure in quest'opera*". A essere precisi, non si trovano figure in quasi nessuna pagina delle *Œuvres* di Lagrange. Siamo ormai andati molto avanti sulla strada dell'astrazione, ma su questo terreno Lagrange può reggere il confronto con i moderni. Persino Eulero, in tarda età e ormai quasi cieco, confessò di non riuscire a capire bene alcune formule usate da Lagrange in una Memoria sul moto del corpo rigido.
L'uso di metodi analitici piuttosto che geometrici pervade tutta la Fisica matematica del Settecento. Ma Lagrange va oltre la semplice scelta di un linguaggio: la *Méchanique analitique* è un tentativo di ridurre la Meccanica ad un ramo dell'Analisi. Lagrange basa tutta la propria costruzione su una singola formula che dovrebbe costituire la relazione più generale tra le forze, le masse e i moti in presenza di vincoli e il cui sviluppo, caso per caso, fornisce le equazioni differenziali per qualsiasi problema. Secondo Lagrange, la Meccanica superiore non è altro che l'insieme delle trasformazioni della formula fondamentale per mezzo di un calcolo infinitesimale formalizzato, ovvero ridotto a sua volta ad una sorta di super Algebra.
Questa concezione ipermatematica della Meccanica è stata spesso considerata una caratteristica di tutta la Meccanica del XVIII secolo. Nulla di più falso: Newton, Eulero e d'Alembert discussero a fondo della natura dello spazio e del tempo, del principio d'inerzia, del concetto di massa e della definizione di forza; Daniel Bernoulli eseguì parecchi esperimenti di Fluidodinamica e considerò attentamente i limiti di validità del proprio modello teorico; Eulero e Daniel Bernoulli si occuparono molto di Fisica tecnica. Tutto sommato, i matematici del Settecento si confrontarono con la realtà più di certi fisici teorici dei nostri giorni. Ma, a ben guardare tra le righe dei suoi lavori, anche Lagrange dimostra di aver riflettuto sui fondamenti fisici della Meccanica. Se si limita all'aspetto formale è anche perché presuppone nel lettore la conoscenza della Meccanica elementare. In fondo i trattati moderni di Meccanica analitica procedono esattamente allo stesso modo.
Come abbiamo detto in precedenza, la formula fondamentale di Lagrange è quella che esprime il principio dei lavori virtuali, posta a base della Statica nella prima parte del libro. Aggiungendovi il principio di d'Alembert si ottiene la Dinamica, sviluppata nella seconda parte.
Il principio dei lavori virtuali risale all'antichità ed è basato sull'osservazione del fatto che negli argani, nelle leve e nelle pulegge si guadagna in forza quello che si perde in distanza. Ad esempio, un uomo può sollevare un peso enorme grazie ad un opportuno sistema di carrucole ma deve tirare un lungo tratto di fune. La formulazione di Lagrange è più astratta. Usando una terminologia moderna, essa afferma che, per un sistema di corpi legati da vincoli senza attrito, il lavoro totale delle forze vincolari è nullo per ogni spostamento dei corpi compatibile con i vincoli. Consideriamo infatti, per fissare le idee, un sistema di punti legati fra loro da fili e costretti a muoversi sopra delle superfici lisce. Effettuiamo un piccolo spostamento di prova (virtuale) dei punti: ci aspettiamo intuitivamente che il lavoro dei vincoli (anch'esso virtuale) sia sempre nullo. Se poi il sistema è in equilibrio, le forze attive bilanciano le forze vincolari: ne deduciamo che, per piccoli spostamenti di prova attorno a una

configurazione di equilibrio, anche il corrispondente lavoro delle forze attive è nullo. In formule, l'equilibrio è dato da:

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \cdots ecc. = 0,$$

dove P, Q, R, ... sono le forze che agiscono sui punti del sistema e δp, δq, δr, ... sono le proiezioni degli spostamenti virtuali di questi punti sulla direzione delle forze. L'aspetto notevole di questa espressione è che vi compaiono solo le forze attive, che si suppongono conosciute, e non le forze vincolari che generalmente non sono note.

Nelle prime pagine della *Méchanique* Lagrange tenta una specie di dimostrazione del principio dei lavori virtuali, basata sostanzialmente sull'ipotesi che il principio sia intuitivamente valido per due soli punti. Per quanto il ragionamento sia ingegnoso, è difficile credere che egli lo considerasse qualcosa di più di un argomento euristico per mostrare che il principio è abbastanza ampio da coprire la Meccanica elementare.

Del principio di d'Alembert esistono diverse formulazioni, sottilmente diverse tra loro. Quella che segue è ragionevolmente vicina alle idee di Lagrange (con alcune semplificazioni e ammodernamenti). Si consideri un sistema di punti vincolati e soggetti a forze. Sul generico punto i-esimo, di massa m_i, agisce la forza $\mathbf{f}_i$; tuttavia, a causa dei vincoli, l'accelerazione $\mathbf{a}_i$ non ha la stessa direzione di $\mathbf{f}_i$. In effetti $\mathbf{f}_i$ riesce ad accelerare il punto solo mediante una sua componente uguale ad $m_i\mathbf{a}_i$, mentre la restante componente $\mathbf{f}_i - m_i\mathbf{a}_i$ viene eliminata dai vincoli. Se dunque il sistema fosse sottoposto alle cosiddette forze perdute $\mathbf{f}_1 - m_1\mathbf{a}_1$, $\mathbf{f}_2 - m_2\mathbf{a}_2$, ... , esso risulterebbe in equilibrio.

Ci siamo così ricondotti alla Statica. Se i vincoli sono pri-

MÉCANIQUE

ANALYTIQUE,

PAR J.-L. LAGRANGE.

TROISIÈME ÉDITION, REVUE, CORRIGÉE ET ANNOTÉE

PAR M. J. BERTRAND.

TOME PREMIER.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, GENDRE ET SUCCESSEUR DE BACHELIER,

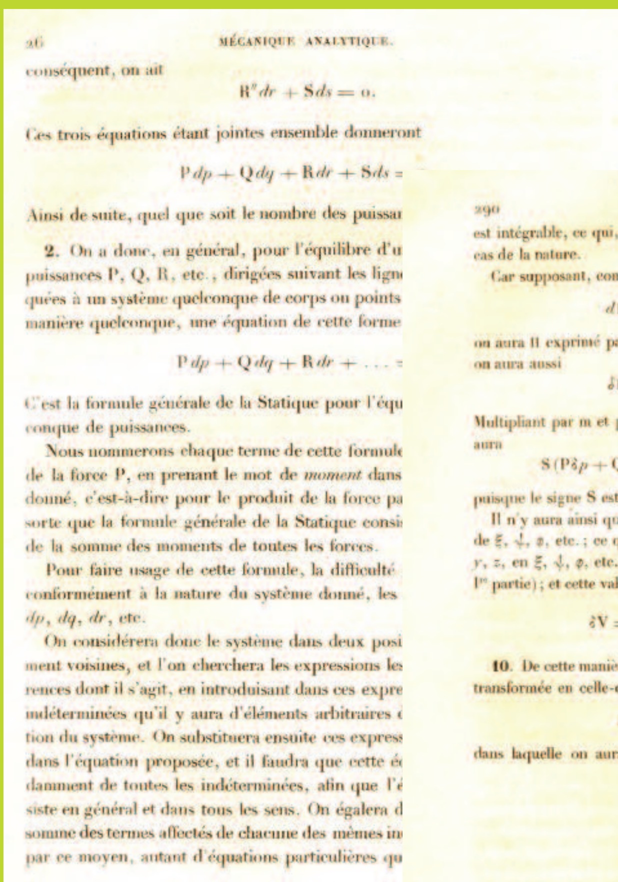
Imprimeur-Libraire

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DE L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

1853

FRONTESPIZIO DELLA *MÉCANIQUE ANALYTIQUE* (1853)
(Cortesia di Sandro Caparrini)



26 MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

conséquent, on ait

$$R'' dr + S ds = 0.$$

Ces trois équations étant jointes ensemble donneront

$$P dp + Q dq + R dr + S ds =$$

Ainsi de suite, quel que soit le nombre des puissan

2. On a donc, en général, pour l'équilibre d'u
puissances P, Q, R, etc., dirigées suivant les ligne
quées à un système quelconque de corps ou points
manière quelconque, une équation de cette forme

$$P dp + Q dq + R dr + \ldots =$$

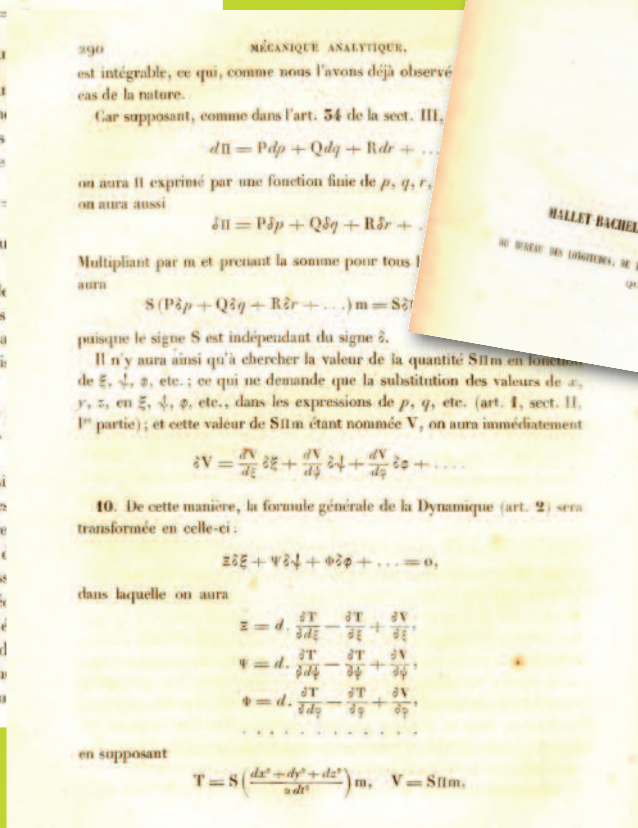
C'est la formule générale de la Statique pour l'équ
conque de puissances.

Nous nommerons chaque terme de cette formule
de la force P, en prenant le mot de *moment* dans
donné, c'est-à-dire pour le produit de la force pa
sorte que la formule générale de la Statique consi
de la somme des moments de toutes les forces.

Pour faire usage de cette formule, la difficulté
conformément à la nature du système donné, les
dp, dq, dr, etc.

On considérera donc le système dans deux posi
ment voisines, et l'on cherchera les expressions les
rences dont il s'agit, en introduisant dans ces expre
indéterminées qu'il y aura d'éléments arbitraires d
tion du système. On substituera ensuite ces express
dans l'équation proposée, et il faudra que cette é
damment de toutes les indéterminées, afin que l'é
siste en général et dans tous les sens. On égalera d
somme des termes affectés de chacune des mêmes in
par ce moyen, autant d'équations particulières qu

IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI
NELLA *MÉCANIQUE ANALYTIQUE* (1811)
(Cortesia di Sandro Caparrini)



290 MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

est intégrable, ce qui, comme nous l'avons déjà observé
cas de la nature.

Car supposant, comme dans l'art. **34** de la sect. III,

$$d\Pi = P dp + Q dq + R dr + \ldots$$

on aura Π exprimé par une fonction finie de p, q, r,
on aura aussi

$$\delta\Pi = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots$$

Multipliant par m et prenant la somme pour tous l
aura

$$S(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots)m = S\delta$$

puisque le signe S est indépendant du signe δ.

Il n'y aura ainsi qu'à chercher la valeur de la quantité SΠm en fonction de ξ, ψ, φ, etc.; ce qui ne demande que la substitution des valeurs de x, y, z, en ξ, ψ, φ, etc., dans les expressions de p, q, etc. (art. **1**, sect. II, 1[re] partie); et cette valeur de SΠm étant nommée V, on aura immédiatement

$$\delta V = \frac{dV}{d\xi}\delta\xi + \frac{dV}{d\psi}\delta\psi + \frac{dV}{d\varphi}\delta\varphi + \ldots$$

10. De cette manière, la formule générale de la Dynamique (art. **2**) sera transformée en celle-ci :

$$\Xi\delta\xi + \Psi\delta\psi + \Phi\delta\varphi + \ldots = 0,$$

dans laquelle on aura

$$\Xi = d.\frac{\partial T}{\partial d\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \xi},$$
$$\Psi = d.\frac{\partial T}{\partial d\psi} - \frac{\partial T}{\partial \psi} + \frac{\partial V}{\partial \psi},$$
$$\Phi = d.\frac{\partial T}{\partial d\varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

en supposant

$$T = S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2}\right)m, \quad V = S\Pi m.$$

LE EQUAZIONI DI LAGRANGE
NELLA *MÉCANIQUE ANALYTIQUE*
(1811)
(Cortesia di Sandro Caparrini)

vi d'attrito, si può applicare il principio dei lavori virtuali alle forze perdute. Scomponendo ognuna di tali forze parallelamente ai tre assi di un sistema cartesiano ortogonale, si ottiene la formula:

$$\sum_i[(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\delta y_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\delta z_i] = 0,$$

dove δx_1, δy_1, δz_1 , .. sono le proiezioni degli spostamenti virtuali lungo i tre assi cartesiani.
Stabilito il principio generale, Lagrange passa alla dimostrazione dei risultati fondamentali della meccanica dei sistemi. Nell'ordine ottiene la seconda legge di Newton per il punto libero, la conservazione della quantità di moto, la conservazione del momento della quantità di moto, la conservazione dell'energia, il principio della minima azione. Tutti i princìpi della Meccanica scoperti da Newton in poi si trovano così ordinati logicamente. Notiamo che la conservazione della quantità di moto viene dimostrata nell'ipotesi che il sistema possa traslare liberamente lungo una certa direzione, quella del momento della quantità di moto supponendo che il sistema possa ruotare liberamente attorno a un dato asse. Abbiamo qui un primo vago accenno all'idea che le simmetrie del sistema conducano a leggi di conservazione, di cui il teorema di Noether sarà nel 1918 l'espressione finale.

> “La *Méchanique analitique* è un tentativo di ridurre la Meccanica ad un ramo dell'Analisi infinitesimale. Lagrange basa tutta la propria costruzione su una singola formula che dovrebbe costituire la relazione più generale tra le forze, le masse e i moti in presenza di vincoli e il cui sviluppo, caso per caso, fornisce le equazioni differenziali per qualsiasi problema.”

Adesso possiamo capire meglio come mai nel 1760 Lagrange avesse abbandonato il principio di minima azione. Nella *Méchanique*, l'unione tra il principio di d'Alembert e la formula dei lavori virtuali permette di dimostrare sia il principio di minima azione che la conservazione dell'energia (oltre a tutti i princìpi della Dinamica noti fino a quel momento). Nella *Application*, invece, Lagrange aveva dovuto imporre la conservazione dell'energia come condizione aggiunta al principio della minima azione.
La *Méchanique analitique* viene ricordata anche per i capitoli introduttivi di carattere storico alle sezioni principali del testo. Lagrange racconta sinteticamente la storia della Statica del punto, della Dinamica del punto, dell'Idrostatica e dell'Idrodinamica passando in rassegna tutte le opere rilevanti da Archimede in poi. Ancora oggi, nonostante l'avanzare degli studi storici, queste eleganti carrellate risultano piacevoli e istruttive. La loro influenza fu notevole: la *Mechanik* di Ernst Mach (*La meccanica nel suo sviluppo storico-critico*, 1883) deve molto alle note storiche di Lagrange. Naturalmente, bisogna leggere questi capitoli *cum grano salis*; Lagrange esprime le opinioni della sua epoca (per uno storico moderno sarebbe impensabile scrivere che, durante il Medioevo e il Rinascimento, la Meccanica non fece progressi) e cita di preferenza le opere che sono confluite nella *Méchanique*.
Oltre allo stile matematico, c'è lo stile letterario. Come Archimede, Galileo, Newton, Eulero e d'Alembert, anche Lagrange è un ottimo scrittore. Nelle sue frasi sembra di avvertire l'eco degli autori del secolo di Luigi XIV. Il suo stile è conciso, elegante, diretto ed estremamente preciso. La monotonia cadenzata del periodare rispecchia il fluire ininterrotto di formule e teoremi.
Per chi ha studiato Meccanica razionale, la lettura della *Méchanique analitique* si trasforma rapidamente in una caccia al tesoro. I vincoli anolomi compaiono a p. 53, le coordinate generalizzate a p. 214, le celebri equazioni di Lagrange sono a p. 226, le coordinate ignorabili a p. 237. Lasciamo il resto della ricerca al lettore curioso.

4. Dalla *Méchanique analitique* alla *Mécanique analytique*

La storia della *Méchanique analitique* non termina con la pubblicazione della prima edizione. Tutti i lavori di Meccanica che Lagrange pubblicò dopo il 1788 fanno riferimento in modo naturale al suo trattato.
Dal corso di Analisi tenuto da Lagrange all'*École Polytechnique* ebbe origine un testo innovativo, la *Théorie des fonctions analytiques* (1797). Il libro è diviso in tre parti: la prima riguarda i fondamenti dell'Analisi, la seconda contiene le applicazioni alla Geometria. La terza parte – per noi la più interessante – è una concisa introduzione alla Dinamica.
Questa terza parte della *Théorie* è a un livello meno avanzato rispetto alla *Méchanique analitique*. Rappresenta il punto di vista di Lagrange sui fondamenti della Dinamica ed è probabile che discenda in qualche misura dalle lezioni del 1756 per gli studenti della Scuola d'Artiglieria di Torino. Si inizia con la cinematica del moto rettilineo; il moto tridimensionale è semplicemente la composizione di tre moti rettilinei lungo tre assi mutuamente perpendicolari; il principio d'inerzia è un dato dell'esperienza; la forza che agisce su un corpo è misurata dalla sua accelerazione; partendo dalla $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, si ottengono le leggi di conservazione per i sistemi. Chi voglia capire la struttura logica della Meccanica secondo Lagrange deve leggere la *Théorie* prima della *Méchanique*.
All'inizio del nuovo secolo, Lagrange aveva ormai passato i sessant'anni ma continuava a produrre Matematica e Meccanica di eccellente livello. Nel 1798 pubblicò una dimostrazione fisica del principio dei lavori virtuali fondata su considerazioni di Meccanica elementare. In competi-

La storia della *Méchanique analitique*

LAZARE CARNOT

LOUIS POINSOT

> All'inizio del nuovo secolo, Lagrange aveva ormai passato i sessant'anni ma continuava a produrre Matematica e Meccanica di eccellente livello.

JOSEPH FOURIER

zione con Laplace, toccò vari temi di Meccanica celeste. Nel 1809 espose in due Memorie il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, che da allora è uno dei capisaldi della teoria delle perturbazioni.

Nel frattempo, la Meccanica era progredita in varie direzioni. Fourier e Fossombroni avevano smontato criticamente e poi ricostruito il principio dei lavori virtuali; Poinsot aveva riformulato la Statica nel linguaggio limpido e classico della Geometria sintetica; Laplace aveva riorganizzato i prinсìpi della Meccanica nel *Traité de mécanique celeste* (1799); Lazare Carnot e Prony avevano trasformato la Meccanica applicata degli ingegneri in una vera e propria disciplina scientifica; Frisi, Eulero, Prony e Poinsot si erano accorti che non solo le forze e le velocità, ma anche i momenti delle forze e le velocità angolari si compongono secondo la regola del parallelogramma.

Dal suo punto d'osservazione privilegiato a Parigi, Lagrange seguiva con attenzione questi progressi. Stava preparando una seconda edizione del trattato, in cui man mano inseriva i risultati recenti, quasi a voler dimostrare che la propria formulazione della Meccanica era quella definitiva.

Con queste aggiunte, il nuovo testo risultò circa il doppio di quello originale. Il primo volume della seconda edizione, adesso intitolata *Mécanique analytique* (anche l'ortografia era progredita) uscì nel 1811; il secondo, postumo, nel 1815. È questa l'edizione che fu letta fino circa al 1920 da chiunque aspirasse a fare ricerca in Meccanica razionale e che venne ristampata alla fine dell'Ottocento nelle *Œuvres*.
Naturalmente la crescita della Meccanica superò ben presto anche i limiti della seconda edizione. A partire circa dal 1820 si cominciò a sviluppare la nuova meccanica dei continui di Cauchy, Poisson e Lamé per la quale l'approccio lagrangiano si dimostrò inadeguato. In direzione opposta, Hamilton e Jacobi, proseguirono sulla strada aperta da Lagrange creando la Meccanica analitica moderna. Quando nel 1853 uscì un'edizione corretta e commentata della seconda edizione, la *Mécanique analytique* era ormai sotto parecchi aspetti un'opera sorpassata.
Gli storici hanno dato pareri discordi sul valore e sul significato della *Méchanique*. In fondo è il destino comune a ogni tentativo di sintesi nelle scienze matematiche: si potrebbe formare una bella antologia di opinioni diametralmente opposte, poniamo, sugli *Elementi* di Euclide o sui bourbakisti. I critici sostengono che la *Méchanique analitique* è soprattutto un riordinamento di risultati precedenti, che è aridamente formale e che contiene solo una parte della splendida messe di scoperte del XVIII secolo. I sostenitori fanno invece notare che vi è parecchio di nuovo (una teoria dei vincoli, le coordinate generalizzate, le diverse forme delle equazioni del moto, la teoria delle piccole oscillazioni di un sistema qualsiasi ecc.), che il riordinamento formale di un insieme di teorie non è cosa da poco e che la *Méchanique analitique* è il primo inquadramento soddisfacente dei sistemi con un numero finito di gradi di libertà. Ma sono discussioni ristrette a pochi specialisti. Il fatto importante è che oggi sugli scaffali delle biblioteche scientifiche si trovano decine di testi intitolati *Meccanica analitica*. Dall'uno all'altro passano molte differenze di stile e di contenuto ma in ognuno di essi è ben riconoscibile il nucleo di teoremi e concetti stabiliti da Lagrange oltre due secoli fa. ■

Bibliografia

AA.VV., *Sfogliando la Mechanique analitique: giornata di studio su Louis Lagrange: Milano, 19 ottobre 2006*, a cura di G. Sacchi Landriani e A. Giorgilli, Milano, LED, 2008.

Barroso Filho W., *La mécanique de Lagrange: principes et méthodes*, Paris, Karthala, 1994.

Benvenuto E., *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico*, Firenze, Sansoni, 1981. Ristampa: Genova, Edizioni di storia, scienza e tecnica, 2008.

Borgato M.T e Pepe L., "Lagrange a Torino (1750-1759) e le sue lezioni inedite nelle R. Scuole di Artiglieria", *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, 7 (1987), pp. 3-43.

Caparrini S., "The Discovery of the Vector Representation of Moments and Angular Velocity", *Archive for the History of Exact Sciences*, 56 (2002), pp. 151-181.

Caparrini S., "An Unpublished Letter by Lagrange Concerning the Turin Academy of Science", *Atti della Accademia delle Scienze di Torino* 141, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali (2007), pp. 45-52.

Caparrini S. & Fraser C., "Mechanics in the Eighteenth Century", di prossima pubblicazione in *The Oxford Handbook of the History of Physics*, a cura di J. Buchwald e R. Fox, Oxford, Oxford University Press, 2014.

Capecchi D., *History of Virtual Work Laws: A History of Mechanics Prospective*, Milano, Springer-Verlag Italia, 2012.

Dugas R., *Histoire de la mécanique*, Neuchâtel, Griffon, 1950. Trad. inglese: *A History of Mechanics*, Neuchâtel, Griffon, 1955.

Fraser C., "J.L. Lagrange's Early Contributions to the Principles and Methods of Mechanics", *Archive for the History of Exact Sciences*, 28 (1983), pp. 197-241.

Galletto D., "La genesi della *Mécanique analytique*", in *La Mécanique analytique de Lagrange et son héritage: Torino, 26-28 ottobre 1989*, 2 voll., supplemento agli *Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino*, 126, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (1992), vol. 2, pp. 277-370.

Guicciardini N., *Reading the Principia: the debate on Newton's mathematical methods for natural philosophy from 1687 to 1736*, Cambridge, Cambridge University Press, 1999.

Juskevic A.P. e Taton R. (a cura di), *Correspondence de Leonhard Euler avec A.C. Clairaut, J. d'Alembert et J.L. Lagrange*, in *L. Euleri opera omnia*, s. IV A, vol. V, Basel, Birkhäuser, 1980.

Lagrange J.L., *Méchanique analitique*, Paris, Desaint, 1788. Ristampa: Sceaux, Gabay, 1989.

Lagrange J.L., *Mécanique analytique*, 2 voll., Paris, Courcier, 1811-1815. Ristampa: *Œuvres de Lagrange*, voll. 11-12.

Lagrange J.L. , *Œuvres*, 14 voll., Paris, Gauthier-Villars, 1867-1892.

Levi-Civita T. e Amaldi U., *Lezioni di meccanica razionale*, due volumi in tre tomi, Bologna, Zanichelli, 1991.

Mach E., *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico*, a cura di Alfonsina d'Elia, Torino, Bollati-Boringhieri, 2002.

Maltese G., *La storia di F=ma: la seconda legge del moto nel XVIII secolo*, Firenze, Olschki, 1992.

Pulte H., "Joseph Louis Lagrange, *Méchanique analitique*, First Edition (1788)", in *Landmark Writings in Western Mathematics: 1640-1940*, a cura di I. Grattan-Guinness, Amsterdam, Elsevier, 2005, pp. 208-224.

Speiser D., *Discovering the principles of mechanics 1600-1800*, a cura di S. Caparrini e K. Williams, Basel, Birkhäuser, 2008.

Szabò I., *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, a cura di P. Zimmerann e E.A. Fellmann, seconda edizione, Basel, Birkhäuser, 1987.

Truesdell C., *Essays in the History of Mechanics*, Berlin, Springer-Verlag, 1968.