di Luigi Ambrosio

L'autore ha frequentato la Scuola Normale dal 1981 al 1988. Dal 1994 è professore straordinario di Analisi matematica e attualmente insegna presso l'Università di Pavia. I suoi interessi di ricerca includono il Calcolo delle variazioni, la teoria geometrica della misura, il riconoscimento di immagini.

Pochi anni dopo la nascita della Γ-convergenza, e precisamente verso la fine degli anni '80, De Giorgi ha introdotto e studiato una nuova classe di problemi variazionali, da lui chiamati problemi con discontinuità libera. Come avrò modo di spiegare più avanti, nello studio di questo tipo di problemi si fondono due oggetti classici della matematica: le funzioni armoniche (minimizzanti l'integrale di Dirichlet) e le superfici minime, entrambi costantemente al centro degli interessi di De Giorgi.
Ho avuto la fortuna di essere a Pisa, studente del Corso di Perfezionamento della Scuola Normale, proprio negli anni in cui De Giorgi, dopo una lunga fase di rielaborazione interiore, presentava gli elementi di base della teoria dei problemi con discontinuità libere nella forma, che negli ultimi anni gli è stata più congeniale, di congetture aperte a chiunque volesse cimentarvisi.
Con questo mio contributo, mi propongo di presentare la teoria dei problemi con discontinuità libere e le sue motivazioni e vorrei farlo cercando, nei limiti delle mie capacità, di seguire lo stile discorsivo che De Giorgi adottava sia nei suoi seminari sia nelle discussioni matematiche informali.
Pur affrontando problemi che richiedono una notevole padronanza "tecnica" della matematica, egli evitava il più possibile il linguaggio specialistico, da lui considerato funzionale alle dimostrazioni di teoremi ma non alla divulgazione della matematica e alla discussione dei problemi matematici stessi.

Per problema con discontinuità libere si intende un problema di minimo nel quale l'energia totale è somma di un termine di volume e un termine di superficie; inoltre l'energia di superficie è concentrata su un insieme non fissato *a priori*, che spesso è proprio l'incognita più rilevante del problema. Il nome "discontinuità" viene dal fatto che, come vedremo, in molti casi tale insieme è rappresentabile come insieme di discontinuità di un'opportuna funzione ausiliaria, mentre l'aggettivo "libere" si riferisce al fatto che queste non sono fissate *a priori*.
Un esempio semplice da formulare è il problema:

$$(1)\quad \min\left\{\sigma_2(\partial E)+\int_E f(x)dx : E\subset \mathbf{R}^3 \text{ aperto con frontiera } C^1\right\}$$

ove f è una funzione sommabile limitata in $\mathbf{R}^3$ e $\sigma_2(\partial E)$ indica l'area superficiale della frontiera di E.
La competizione fra il termine di volume e il termine di superficie fa sì che risultino convenienti insiemi E contenuti (per lo più) nell'insieme $\{f \leq 0\}$, purché questi non abbiano perimetro troppo elevato.
In ogni caso l'esistenza di un insieme ottimale non è un fatto ovvio: per dimostrarne l'esistenza, come spesso accade nel calcolo delle variazioni, si devono prima cercare soluzioni deboli del problema (1). Queste si trovano nella classe, studiata da De Giorgi, degli insiemi di perimetro finito secondo Caccioppoli.
Nota l'esistenza di soluzioni deboli bi-

sogna verificare che esse corrispondono a soluzioni classiche: non sempre ciò accade, ma almeno in $\mathbf{R}^3$ questo è vero, come De Giorgi dimostrò nel 1960. In questo caso ∂E è l'insieme di discontinuità della funzione caratteristica di E, che vale 1 su E e 0 fuori di E.
L'esempio di problema con discontinuità libere che, in misura maggiore, ha motivato De Giorgi nella proposizione della sua teoria è suggerito dalla teoria matematica di una classe particolare di cristalli liquidi, detti nematici. Dato un dominio aperto $D \subset \mathbf{R}^3$, con frontiera C^1 e una funzione $\mathbf{n} \in C^1(\overline{D}, S^2)$ (ove con S^2 si indichi la sfera unitaria di R^3, quindi $|\mathbf{n}| = 1$), poniamo

$$(2)\qquad E(n,D)=\int_D f(\mathbf{n},\nabla\mathbf{n})dx + \int_{\partial D}\varphi(\mathbf{n},\nu_D)d\sigma_2$$

ove $\nu_D : \partial D \to S^2$ è la normale esterna a D.
Anche in questo caso l'energia totale E è somma di un'energia di volume, la cui densità dipende da $\mathbf{n}$ (detto *asse ottico* del cristallo) e dal suo gradiente mediante la funzione f, e di un'energia di superficie, dipendente tramite φ dai valori di $\mathbf{n}$ sul bordo di D e da ν_D.
Nel caso del modello dei cristalli liquidi, scelte tipiche di f e φ sono:

$$\begin{aligned}\overline{f}(\mathbf{n},\nabla\mathbf{n}) &= \kappa_1(div\,\mathbf{n})^2 + \\ &+\kappa_2\left(\langle\mathbf{n},rot\,\mathbf{n}\rangle\right)^2+\kappa_3|\mathbf{n}\wedge rot\,\mathbf{n}|^2 + \\ &+(\kappa_2+\kappa_4)(tr(\nabla\mathbf{n})^2-(div\,\mathbf{n})^2)\\ \overline{\varphi}(\mathbf{n},\nu) &= g\left(\langle\mathbf{n},\nu\rangle\right)\end{aligned}$$

Si osservi che $\overline{f}$, nota come funzione di Oseen-Frank, si riduce a un multiplo di $|\nabla\mathbf{n}|^2$ per una scelta opportuna delle costanti κ_i. La minimizzazione di $E(\mathbf{n}, D)$ con opportuni vincoli e condizioni al contorno è un problema con discontinuità libere: fisicamente si tratta di determinare la forma di D di una goccia di cristallo liquido sottoposta a forze di contatto e di volume.
Il terzo esempio è noto come problema di Mumford-Shah ed è nato nell'ambito di un approccio variazionale al problema della segmentazione delle immagini. Per una curiosa coincidenza (delle quali è piena la storia della scienza), Mumford e Shah proposero il loro problema negli stessi anni in cui De Giorgi, pensando prevalentemente al problema (2) dei cristalli liquidi, proponeva la sua teoria.
Consideriamo un rettangolo Ω del piano e una funzione misurabile $g: \Omega \to [0,1]$. Vogliamo cercare un'approssimazione della funzione g mediante funzioni C^1 a tratti in Ω, non necessariamente continue in tutto Ω.
Nel caso dell'approssimazione con funzioni globalmente regolari, il metodo classico consiste nel minimizzare:

$$(3)\ u \to \int_\Omega |\nabla u|^2 + \alpha(u-g)^2 dx, \qquad \alpha > 0$$

o equivalentemente nel risolvere l'equazione $\Delta u = \alpha(u - g)$ in Ω, con condizioni al contorno di Neumann. Le soluzioni u_α del problema sono di classe C^1 in Ω e convergono a g in $L^2(\Omega)$ per $\alpha \to \infty$. Mumford e Shah proposero invece di minimizzare il funzionale

$$(4)\ (K,u) \to \int_{\Omega\setminus K} |\nabla u|^2 + \alpha(u-g)^2 dx + \beta\sigma_1(K\cap\Omega)$$

ove α, β sono parametri positivi, $\sigma_1(K\cap\Omega)$ è la lunghezza di $K\cap\Omega$ e l'insieme (K, u) delle coppie ammissibili è definito dalle condizioni: $K \subset \overline{\Omega}$ curva di classe C^1 a tratti e $u \in C^1(\Omega\setminus K)$.
Si ammette quindi che la funzione u (vista come funzione definita su tutto il rettangolo) abbia delle discontinuità contenute nell'insieme $K\cap\Omega$, ma queste vengono penalizzate da $\beta\sigma_1(K\cap\Omega)$.
Uno dei problemi più studiati nell'ambito del riconoscimento di immagini è quello della *segmentazione*, vale a dire la possibilità di estrarre da un'immagine digitalizzata i suoi contorni essenziali. Molti studiosi ritengono che questo sia il primo livello nell'elaborazione delle immagini, a cui seguono livelli di elaborazione superiore come il riconoscimento della profondità degli oggetti e degli oggetti stessi a partire dai loro contorni, del tutto o parzialmente visibili.

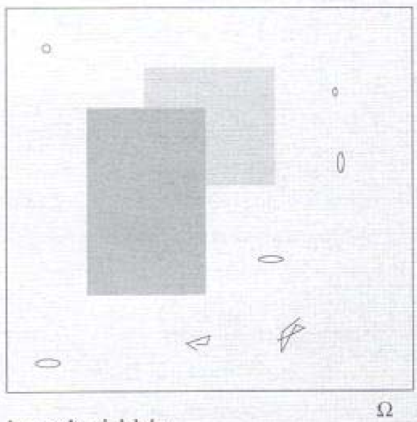
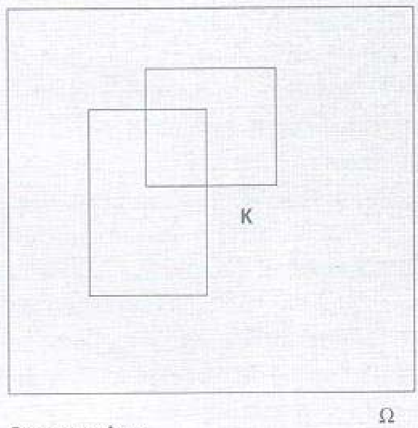


Immagine iniziale



Segmentazione

La rilevanza dell'approssimazione C^1 a tratti nel problema del riconoscimento di immagini si comprende se si pensa che la funzione g corrisponda ai livelli di grigio (tipicamente discreti e costanti a tratti, a causa del processo di digitalizzazione) di un'immagine vista da una telecamera. Cercare un'approssimazione C^1 a tratti vuol dire filtrare il rumore preservando le discontinuità "vere" della funzione g, corrispondenti ai bordi degli oggetti visti dalla telecamera. La differenza con il metodo (3) consiste proprio nel fatto che non vi è regolarizzazione, e quindi perdita di informazioni, attraverso le discontinuità nette dell'immagine. I numeri α e β fungono da parametri di scala legati alla precisione dell'approssimazione che si vuole ottenere.

Nella figura viene rappresentato, in una situazione molto idealizzata, questo processo di regolarizzazione: per opportuni valori dei parametri di scala i piccoli dettagli dell'immagine iniziale non fanno parte dell'insieme K ottimale (nella figura in basso nella pagina precedente si trascura un fenomeno di arrotondamento di K in presenza degli spigoli).

Il problema posto da Mumford-Shah, per la presenza contemporanea dell'integrale di Dirichlet e del termine di lunghezza, è oggi considerato il problema "modello" con discontinuità libere. È sorprendente notare come l'esistenza di minimi del funzionale (4) nella classe delle coppie ammissibili (K, u) prima specificata sia ancora un problema aperto, nonostante sia stato molto studiato in Italia e all'estero negli ultimi anni. È invece nota l'esistenza di soluzioni deboli del problema, alle quali accennerò più avanti.

De Giorgi, con la sua naturale attitudine a pensare in grande, propone in un lavoro del 1988 di studiare una classe molto generale di problemi di minimo, la cui energia è del tipo

$$(5) \qquad \int_{\Omega\setminus S_u} f(x,u,\nabla u)dx + \int_{\Omega\cap S_u} \varphi(x,u^+,u^-,\nu_u)d\mathrm{H}^{n-1}$$

con $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ aperto fissato e $u:\Omega \to \mathbf{R}^m$. L'insieme S_u, detto *insieme di salto* di u, corrisponde ai punti di discontinuità di u, (u^+,u^-) sono le tracce di u dai due lati di S_u, ν_u, è la normale all'insieme di salto. Nella (5) compare anche, nel caso particolare $k = (n-1)$, la misura di Hausdorff k-dimensionale in $\mathbf{R}^n$, della quale richiamerò brevemente la definizione (con ω_k indico la misura della palla unitaria di $\mathbf{R}^k$):

$$\mathrm{H}^k(C) = \frac{\omega_k}{2^k} \lim_{\delta\to 0^+} inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \left[diam(C_i)\right]^k : \; : C \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i, diam(C_i) < \delta \right\}$$

La misura $H^k(C)$ coincide con le usuali nozioni di cardinalità ($k=0$), lunghezza ($k=1$), area superficiale ($k=2$) e così via se l'insieme C è sufficientemente regolare, ma presenta il grosso vantaggio di essere definita per *ogni* insieme, in modo intrinseco e senza riferimento a parametrizzazioni.

Nel problema (5) rientrano, come caso particolare, il problema di Mumford-Shah e quello dei cristalli.

In quest'ultimo caso, indicato con Ω il dominio contenente la goccia incognita D, basta definire la funzione ausiliaria u che vale $\mathbf{n}$ su D e 0 su $\Omega\setminus D$ per ridurre la (3) alla (5) (si osservi che ∂D è proprio l'insieme S_u e ν_D - a meno del segno - è ν_u).

De Giorgi non si limita a porre il problema in termini molto generali, ma dà delle precise indicazioni, sempre in forma di congetture, sugli strumenti matematici necessari per affrontarlo. Due sono, a questo proposito, le sue idee determinanti.

La prima è quella di ridurre le variabili in gioco da due a una, come avviene nella (5): data la funzione u, l'insieme dove è concentrata l'energia di superficie è l'insieme di salto S_u. Questa idea sembra a prima vista non molto naturale, visto che in molti problemi (come ad esempio quello di Mumford-Shah) è l'insieme di discontinuità l'incognita essenziale e, noto questo, la funzione u si determina rapidamente risolvendo un opportuno problema al contorno di tipo ellittico. Tuttavia, questo semplice (*a posteriori*) artificio si è rivelato essenziale per impostare i problemi con discontinuità libere nel quadro dell'Analisi funzionale.

La seconda idea è proprio l'invenzione di un opportuno spazio funzionale, indicato con $SBV(\Omega)$. nel quale molti problemi con discontinuità libere trovano formulazione debole e soluzione, in analogia con quanto accade per il problema di minimo (1).

Accanto agli spazi di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ delle funzioni aventi come derivata nel senso delle distribuzioni una funzione $L^p(\Omega)$, si può anche considerare lo spazio $BV(\Omega)$ delle funzioni u sommabili in Ω la cui derivata nel senso delle distribuzioni è una misura vettoriale $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ in Ω, vale a dire:

$$(6) \quad \int_\Omega u(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega \phi(x)d\mu_i(x) \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad i = 1\ldots, n.$$

Le funzioni in $BV(\Omega)$, note come *funzioni a variazione limitata*, sono state studiate a fondo negli ultimi decenni, in relazione a problemi di area minima e di plasticità (in questi ultimi si lavora con uno spazio strettamente imparentato con $BV(\Omega)$, lo spazio delle funzioni $BD(\Omega)$ a deformazione limitata). Anche in questo campo De Giorgi e la sua scuola hanno dato contributi fondamentali, visto pure lo stretto legame esistente tra le funzioni a variazione limitata e gli insiemi di perimetro finito di Caccioppoli e De Giorgi.

Per lo studio di problemi (5) è naturale pensare allo spazio $BV(\Omega)$ dato che questo contiene funzioni con discontinuità lungo ipersuperfici. Tuttavia, per definire un buon ambiente funzionale atto allo studio dei problemi con discontinuità libere, De Giorgi propose di analizzare più da vicino la struttura della misura μ nella (6), selezionando solo le funzioni u, dette *speciali a variazione limitata*, la cui derivata μ è somma di una misura assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e di una misura "$(n-1)$-dimensionale".

In questo modo vengono escluse alcune funzioni BV la cui derivata nel senso delle distribuzioni non ha carattere né n-dimensionale né $(n-1)$-dimensionale. Nel caso $n = 1$ della retta reale, un esempio classico di funzione di questo tipo è la funzione di Cantor-Vitali, la cui derivata nel senso delle distribuzioni è una misura diffusa (cioè non 0-dimensionale) ma singolare rispetto alla misura di Lebesgue, in quanto concentrata sull'insieme di Cantor, che ha misura nulla. Visto il tipo di energia che si minimizza nei problemi con discontinuità libere, la restrizione proposta da De Giorgi risulta naturale.

Come è spesso accaduto con le teorie proposte da De Giorgi (un altro buon esempio è la Γ-convergenza) la teoria dei problemi con discontinuità libere ha rivelato un ambito di applicazioni più generale di quello inizialmente previsto. In questi ultimi anni sono stati studiati modelli del secondo ordine (con discontinuità della funzione e/o del suo gradiente) e problemi suggeriti dalla meccanica dei continui, di plasticità, danneggiamento e frattura.

Ennio De Giorgi, negli anni Settanta

Inoltre, il linguaggio della Γ-convergenza ha consentito di chiarire a fondo il legame tra problemi del tipo (5), posti nel continuo, e problemi discreti. Alcuni problemi con discontinuità libere sono nati infatti prima in ambito discreto (così è per il problema di Mumford e Shah, la cui versione discreta è stata introdotta da Blake e Zisserman). La relazione tra modelli discreti e continui è anche molto importante per il calcolo numerico di soluzioni approssimate di problemi con discontinuità libere.

In quest'ultimo decennio tutte le congetture proposte da De Giorgi nel suo lavoro del 1988 sono state affrontate e dimostrate grazie allo sforzo di diversi matematici, me incluso. Ritengo che questo sia un buon esempio del carattere aperto e non competitivo che De Giorgi, sicuramente ispirato dalle sue convinzioni religiose sul significato sapienziale della matematica, ha saputo imprimere alla sua scuola.

La parola scuola potrebbe infatti far pensare a un circolo piuttosto esclusivo di matematici, ma nulla è più lontano dalla realtà. Nelle sue tradizionali lezioni del Martedì, negli innumerevoli incontri nel suo studio, nei seminari tenuti presso moltissime università italiane e nei convegni, De Giorgi proponeva apertamente alla comunità dei matematici i suoi problemi, indicava i risultati parziali di cui era a conoscenza e quale poteva essere la strada per ottenere risultati più generali. Di conseguenza, era molto felice quando un matematico, anche al di fuori del suo gruppo, risolveva un problema di cui si era interessato.

La capacità di fare ricerca originale non implica necessariamente la capacità di formare allievi e creare una scuola. De Giorgi era capace di attirare gli studenti (in particolare quelli della Scuola Normale) proponendo nei suoi corsi, anche di livello elementare, un'interpretazione non tradizionale dei concetti di base della matematica. Era anche molto disponibile ed equilibrato nel rapporto con gli studenti e i giovani allievi. I suoi corsi puntavano più sulla qualità che sulla quantità: in essi venivano introdotte relativamente poche nozioni, ma nella massima generalità, e questa strategia aiutava a capire i limiti di validità e gli ingredienti essenziali di una data teoria. A mio avviso, è proprio l'amore di De Giorgi per gli schemi generali la ragione ultima del successo e della portata talora inaspettata delle teorie e delle tecniche da lui introdotte.