di Gianni Dal Maso

L'autore è professore ordinario di Calcolo delle variazioni presso la Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati (SISSA) di Trieste.

I problemi legati alla Γ-convergenza furono il principale oggetto di indagine di De Giorgi e della sua scuola durante la seconda metà degli anni '70 e i primi anni '80. Per meglio comprendere la nascita e lo sviluppo di questo nuovo indirizzo di studi, che si colloca nel quadro più generale del Calcolo delle variazioni, conviene prendere in considerazione tre diverse linee di ricerca coltivate a Pisa negli anni immediatamente precedenti e che in varia misura ne stanno alla base.

La prima consiste negli studi sulla G-convergenza di operatori ellittici, iniziati con un lavoro di Spagnolo del 1967 e descritti in questo *dossier* dallo stesso autore, mentre la seconda riguarda le varie nozioni di convergenza di insiemi e di funzioni convesse, studiate da Mosco nel suo periodo di attività a Pisa e oggetto di un fondamentale lavoro del 1969. Lo scopo di queste indagini era quello di ottenere le condizioni più generali atte a garantire la convergenza forte delle soluzioni delle corrispondenti disequazioni variazionali.

Un terzo filone di ricerche collegato alla Γ-convergenza sono le indagini sul metodo del rilassamento di problemi di minimo che De Giorgi aveva più volte impiegato nella teoria dei perimetri e nello studio delle superfici di area minima. Il legame tra i problemi di Γ-convergenza e i problemi di rilassamento, in cui si associa a un funzionale il suo inviluppo semicontinuo inferiormente, sono stati più volte sottolineati dallo stesso De Giorgi, che teneva a ricordare che, se da un lato l'operazione di rilassamento non è che un caso particolare di Γ-convergenza, dall'altro la definizione di Γ-limite può essere vista come un'estensione dell'operazione di rilassamento al caso di una successione di funzionali.

Nel 1973 venne pubblicato un articolo di De Giorgi e Spagnolo, in cui si affrontavano nuovamente i problemi della G-convergenza, con un'impostazione che, seguendo un metodo caro a De Giorgi, privilegiava gli aspetti variazionali. L'articolo può essere considerato come il primo lavoro in cui si introducono alcune delle idee che saranno poi sviluppate più compiutamente nell'ambito della Γ-convergenza. In particolare, vi è dimostrata la convergenza delle energie, che permette, tra l'altro, di ottenere una formula variazionale per individuare i coefficienti dell'operatore G-limite. Queste proprietà sono di notevole importanza sia nella teoria che nelle applicazioni, ad esempio nei problemi di omogeneizzazione.

Nel 1975 De Giorgi pubblicò un lavoro di fondamentale importanza, in cui sviluppava queste idee in un contesto puramente variazionale, senza utilizzare le proprietà delle corrispondenti equazioni di Eulero, e introduceva le principali tecniche che sono alla base della Γ-convergenza. Si tratta di un lavoro sulla convergenza di funzionali integrali del Calcolo delle variazioni a crescita lineare, in cui si dimostra che una classe di funzionali equi-lipschitziani del tipo del funzionale dell'area è compatta rispetto a una nuova nozione di convergenza, che di lì a poco sa-

rebbe stata chiamata Γ-convergenza. Tale nome compare per la prima volta in un lavoro di De Giorgi e Franzoni dello stesso anno, dove le idee e le tecniche sviluppate nel lavoro sulla convergenza di integrali a crescita lineare vengono sistemate in un quadro astratto molto generale, in cui i singoli risultati sono ottenuti nelle ipotesi più naturali.
Una caratteristica dell'attività di De Giorgi, che ho avuto modo di riscontrare varie volte durante la mia lunga collaborazione con lui, è sempre stata la tendenza a passare da un problema concreto ad un quadro astratto molto generale in cui i singoli aspetti matematici del problema trovavano la loro sistemazione più naturale. Il suo metodo di lavoro lo portava, dopo aver risolto un problema concreto, ad analizzare in forma astratta i vari passi della dimostrazione per poter poi trovare la più ampia classe di problemi cui quelle stesse argomentazioni potessero adattarsi.

Senza entrare nei dettagli tecnici della definizione di Γ-convergenza, ricordo solo che, nel quadro astratto, si tratta di una nozione di convergenza per successioni di funzionali definiti su uno spazio topologico, che garantisce la convergenza dei minimi, nel senso che se una successione di funzionali, dotati ciascuno di un unico punto di minimo, Γ-converge ad un certo funzionale, dotato anch'esso di un unico punto di minimo, e se sono verificate certe condizioni di equi-coercitività, molto frequenti nelle applicazioni, allora i punti di minimo dei funzionali della successione convergono al punto di minimo del funzionale Γ-limite e la successione dei valori minimi converge al valore minimo del funzionale Γ-limite.

Uno dei principali punti di forza della Γ-convergenza, costantemente sottolineato da De Giorgi nelle sue discussioni informali sull'argomento, sono le proprietà di compattezza, che si rivelano particolarmente utili quando si considerano problemi con forti perturbazioni, in cui spesso non è possibile determinare il limite esplicitamente. Nel quadro astratto, la compattezza si ottiene in condizioni generalissime, in virtù di una variante di un teorema di topologia che risale a Kuratowski. Ma quello che è ancora più importante, e che costituisce uno dei maggiori successi della Γ-convergenza, sono i teoremi di compattezza che riguardano classi concrete di funzionali integrali di grande interesse per il Calcolo delle variazioni. Tali risultati permettono di dedurre che il Γ-limite di una successione di funzionali integrali è ancora un funzionale integrale dello stesso tipo.
Il primo di questi teoremi è dovuto allo stesso De Giorgi, e riguarda i funzionali integrali a crescita lineare, di cui ho già parlato. Nello stesso anno, il 1975, in cui gettava le basi della teoria astratta dei Γ-limiti, De Giorgi affidò a Sbordone, in quel periodo ospite della Scuola Normale, il compito di dimostrare un teorema di compattezza rispetto alla Γ-convergenza per una classe di funzionali integrali con crescita polinomiale, che includeva come caso particolare i funzionali quadratici associati agli operatori ellittici lineari. Si realizzava così in maniera rigorosa quel collegamento tra Γ-convergenza e G-convergenza che portava ad una notevole semplificazione nella dimostrazione del teorema di compattezza per gli operatori ellittici.
De Giorgi era convinto delle enormi potenzialità di questo nuovo strumento per lo studio dei problemi di comportamento asintotico, di stabilità e di approssimazione che si presentano nel Calcolo delle variazioni e, fino alla metà degli anni '80, fu l'animatore di un folto gruppo di matematici che si dedicavano allo studio delle molteplici applicazioni della Γ-convergenza. Individuò subito diverse linee di ricerca e spinse vari gruppi ad occuparsene. Inoltre formulò linee guida per lo studio dei problemi di Γ-convergenza, che forniscono uno schema generale di dimostrazione molto flessibile, che da allora è stato adattato con successo a parecchi casi concreti.
Si tratta del cosiddetto metodo di *localizzazione*, che consiste essenzialmente in questo. Se si deve studiare il Γ-limite di una successione di funzionali integrali definiti su un aperto dello spazio euclideo, non ci si limita a studiare il problema su quel singolo aperto, ma lo si considera contemporaneamente su tutti gli aperti dello spazio euclideo. Questo fa sì che i funzionali in esame debbano essere considerati come dipendenti sia da un aperto che da una funzione. In questo contesto si collocano i risultati generali sulle funzioni crescenti d'insieme e sui loro limiti, ottenuti in quegli anni da De Giorgi e Letta e pubblicati nel 1977. È proprio lo studio del comportamento del Γ-limite rispetto all'aperto che permette in molti casi di rappresentarlo come un integrale. Da allora questo schema di ragionamento è stato impiegato con successo in moltissimi casi, sia in problemi di rilassamento che di Γ-convergenza, e costituisce ancora oggi la via più efficace per risolvere questo genere di problemi.
Una delle linee di ricerca proposte da De Giorgi riguardava lo studio sistematico dei Γ-limiti di funzionali integrali. I primi risultati, ottenuti da lui stesso e da Sbordone, coprivano solo il caso di

funzionali integrali dipendenti da una funzione e dalle sue derivate prime ed erano ottenuti sotto ipotesi molto forti sul comportamento degli integrandi. De Giorgi spingeva diversi ricercatori ad occuparsi dello stesso problema in ipotesi molto più deboli, oppure quando il funzionale dipendesse anche da derivate di ordine superiore. I risultati ottenuti finora in questa direzione danno un quadro completo del comportamento dei funzionali integrali dipendenti da una funzione scalare e dalle sue derivate prime, mentre restano ancora alcuni problemi aperti per il caso vettoriale o per funzionali dipendenti anche da derivate di ordine superiore. Questi risultati hanno permesso di affrontare con successo un'ampia classe di problemi di omogeneizzazione retti da principi variazionali che portano ad equazioni di Eulero non lineari, partendo dal caso modello di strutture periodiche per arrivare, con tecniche più raffinate, a studiare anche problemi di omogeneizzazione con struttura quasi-periodica o di tipo stocastico.

Un secondo gruppo di problemi riguardava un modo di approssimare, nel senso della Γ-convergenza, il funzionale perimetro mediante una perturbazione singolare di un problema ellittico semilineare con due buche di potenziale. Questo risultato, ottenuto nella sua formulazione iniziale da Modica e Mortola nel 1977, mostra l'estrema flessibilità della Γ-convergenza, che permette di approssimare un problema di tipo geometrico, qual è il problema di area minima, avente per dominio la famiglia delle funzioni indicatrici di insiemi a perimetro finito, con problemi ellittici non lineari, aventi per dominio uno spazio di funzioni molto più regolari. Questa tecnica di approssimazione ha avuto da allora un notevole sviluppo, che ha portato da un lato alla giustificazione teorica di certi modelli di transizione di fase sulla base di una perturbazione singolare, dall'altro ad un'efficace approssimazione numerica di problemi di tipo geometrico.

Un terzo filone di ricerca riguardava lo studio del comportamento asintotico delle soluzioni di problemi di minimo con ostacoli. Occorre qui distinguere tra condizioni di ostacolo sulla funzione e condizioni di ostacolo sul gradiente, che danno luogo a risultati di natura completamente diversa e richiedono l'uso di tecniche altrettanto diverse. In entrambi i casi si nota che la presenza degli ostacoli modifica in maniera sostanziale il Γ-limite, che dipende in maniera assai complessa dall'interazione tra i funzionali da minimizzare e gli ostacoli. Le tecniche introdotte da De Giorgi per lo studio dei Γ-limiti di problemi con ostacoli sono state poi applicate con successo allo studio del comportamento asintotico delle soluzioni di equazioni ellittiche con condizioni di Dirichlet in domini perforati di tipo molto generale, che possono essere visti come un caso particolare di problema con ostacoli bilaterali. Ciò ha permesso di arrivare ad una formulazione rilassata dei problemi di ottimizzazione di forma nel caso di condizioni al contorno di Dirichlet, che ha avuto un certo sviluppo in questi ultimi anni. L'idea che la Γ-convergenza sia lo strumento principale per lo studio di problemi di perturbazione o di approssimazione nel Calcolo delle variazioni si è ormai diffusa tra un numero sempre maggiore di ricercatori, e sono parecchi i matematici che l'hanno impiegata per affrontare problemi molto lontani da quelli studiati a Pisa nel decennio iniziale 1975-85.

Io cominciai a lavorare sotto la guida di De Giorgi per la tesi di laurea nel 1976, proprio nel momento in cui egli stava sviluppando questo nuovo ramo del Calcolo delle variazioni. Mi sono in tal modo venuto a trovare nell'invidiabile posizione di chi, senza alcun merito e ancora del tutto inesperto, può osservare da vicino un'impresa così esaltante come l'edificazione di una nuova teoria scientifica.

Quanto dico è vero a maggior ragione, in quanto De Giorgi aveva l'abitudine di confidare a noi suoi allievi, anche ai più giovani, gli obiettivi a breve e a lungo termine delle sue ricerche e di discuterli a lungo, spiegando con pazienza, a noi che faticavamo a volte a seguirlo, i motivi di una sua congettura o le tecniche che riteneva più idonee a dimostrarla.

Nel suo stile di lavoro, De Giorgi privilegiava il momento della discussione. Non solo come metodo per giudicare la validità delle motivazioni di un problema o per vagliare l'attendibilità di una congettura. Nel suo modo di concepire l'attività del matematico, la discussione informale, tra amici, dei risultati ottenuti costituiva una parte importantissima del lavoro scientifico. Lo scritto era per lui come qualcosa di privo di vita, necessario, certo, a fissare in forma definitiva i risultati, e a renderli pubblicamente accessibili, ma non così efficace a diffonderli come può esserlo solo la discussione informale tra persone unite da un vivo interesse per gli stessi problemi scientifici.

Lavorando in stretto contatto con De Giorgi ho avuto esperienza diretta del significato più alto dell'espressione "scuola scientifica": una comunità di ricercatori animati dagli stessi interessi scientifici, pronti a discutere tra loro i risultati ottenuti e a scambiarsi opinioni sulle tecniche da usare per affrontare i problemi aperti, una comunità in cui le conoscenze e l'esperienza dei più anziani vengono trasmesse ai più giovani non solo attraverso il momento formale dei corsi e dei seminari, ma soprattutto mediante la discussione informale e il lavoro in collaborazione.

Nel periodo in cui fui studente e poi perfezionando a Pisa, la scuola di De Giorgi comprendeva, oltre a noi suoi allievi, diversi docenti dell'Università di Pisa, cui si deve aggiungere un gran numero di collaboratori di altre sedi che svolgevano la loro attività di ricerca in stretto contatto con lui e che venivano spesso a discutere con lui i loro risultati.

Per noi che costituivamo, per così dire, il nucleo pisano della sua scuola, l'appuntamento fondamentale erano le lezioni del martedì. Mentre frequentavamo gli altri corsi per avere informazioni sui più importanti risultati del passato, seguivamo quello di De Giorgi per avere indicazioni riguardo al futuro. I problemi sollevati durante il suo corso erano spesso riesaminati nelle discussioni con lui che si svolgevano, a piccoli gruppi, nel suo studio. Lì aveva modo, in maniera più informale, di spiegare i dettagli delle sue congetture e di chiarire, a grandi linee, i motivi per cui le riteneva plausibili. In ogni caso, non escludeva mai la possibilità che fossero false, limitandosi ad osservare che una delle parti più importanti del lavoro di un matematico, forse la più difficile, consiste proprio nell'individuare quelle proposizioni significative, la cui verità, o eventuale falsità, abbia conseguenze di rilievo all'interno di una certa teoria.

In realtà la maggior parte delle congetture di De Giorgi su cui si è giunti in seguito ad un risultato definitivo si è dimostrata vera. Queste congetture erano preziosissimi suggerimenti che De Giorgi rivolgeva a tutta la sua scuola. Molto spesso preferiva non occuparsi della dimostrazione, lasciando questo compito ad altri, sia perché non aveva il tempo materiale di seguire personalmente tutti gli sviluppi, a volte di notevole complessità tecnica, sia perché riteneva che per lui fosse un compito assai più importante quello di indicare la direzione da seguire nella ricerca scientifica.

De Giorgi era sempre molto disponibile ad ascoltare gli altri matematici, sia i suoi allievi, sia i membri più anziani della sua scuola, sia i tanti visitatori che volevano parlargli e che andavano dai più famosi matematici del mondo che erano in visita alla Scuola Normale ai semplici borsisti desiderosi di avere un consiglio da lui. Non ricordo che abbia mai negato un colloquio a qualcuno.

In realtà queste discussioni con altri matematici erano per lui anche un modo di tenersi aggiornato, senza bisogno di passare lunghe ore in biblioteca a consultare le riviste. Spesso gli bastava un accenno ad un nuovo risultato, di cui non aveva mai letto la dimostrazione, per poterla ricostruire rapidamente in una forma molto personale che a volte metteva in luce alcuni aspetti che l'autore stesso della ricerca non aveva notato.

Molto spesso sembrava ascoltare distrattamente, anche se, in realtà, non si lasciava mai sfuggire i dettagli più significativi. La parte più interessante del colloquio iniziava di solito dopo che uno aveva terminato di esporgli i risultati ottenuti. A quel punto, anche se prima era sembrato distratto, De Giorgi si animava improvvisamente e iniziava a fornire stimolanti indicazioni su nuovi risultati che si sarebbero potuti dedurre da quelli appena dimostrati. Se uno non fosse stato al corrente delle sue abitudini, avrebbe potuto trarre la conclusione che egli apprezzasse poco il lavoro fatto. In realtà non era così, e De Giorgi aveva lo stesso atteggiamento anche nei confronti del proprio lavoro: quando aveva ottenuto un risultato, questo continuava ad interessarlo solo se poteva essere usato come punto di partenza per studiare problemi nuovi rimasti ancora insoluti.

Vorrei concludere sottolineando l'enorme influenza avuta da De Giorgi nella formazione di varie generazioni di allievi, che hanno appreso dal suo insegnamento e dal suo esempio un modo particolare di "fare matematica", che prende le mosse da problemi-modello significativi, suggeriti spesso (ma non sempre) da questioni applicative e dotati in ogni caso di stimolanti difficoltà matematiche, e li risolve inquadrandoli in un più ampio contesto teorico, che non faccia mai perdere di vista il problema concreto e sia però in grado di spiegarne in maniera soddisfacente gli aspetti matematici.