di Sergio Spagnolo

L'autore è professore di Analisi matematica presso l'Università di Pisa. Per oltre trent'anni è stato vicino a De Giorgi, come allievo, collaboratore e amico.

Il primo articolo di Ennio De Giorgi sulla G-convergenza, la progenitrice della Γ, è apparso nel 1973 sul *Bollettino dell'U.M.I.* ([10]), ma questa teoria da lui concepita era nata qualche anno prima.
Oltre che sulla sua straordinaria intelligenza e capacità di concentrazione, la ricerca matematica di Ennio si basava sul dialogo costante con le persone che gli stavano vicino. Si spiega così la sua profonda influenza, diretta o indiretta, su molte delle idee guida e delle tecniche innovative della matematica italiana degli ultimi decenni, e si comprende quanto sia difficile disgiungere la sua opera da quella dei suoi allievi e collaboratori. Mi scuso, quindi, se, per illustrare la genesi della Γ - convergenza, dovrò parlare in prima persona di alcuni miei lavori.

Negli anni '60 lo studio di De Giorgi al primo piano del Palazzo della Carovana, dove vari ricercatori attratti dalle teorie di Ennio si davano convegno, era un luogo privilegiato per la formazione e la circolazione delle idee.
Queste riunioni spontanee si protraevano fino a tarda sera con discussioni che dalla matematica sconfinavano alle questioni più varie, sempre improntate ad uno stile amichevole e informale. Tutti, indipendentemente dall'età o dalla posizione accademica, vi erano liberamente ammessi, anzi incoraggiati ad intervenire.
Così, nell'autunno del 1966, ebbi modo di parlare con De Giorgi di un teorema di J. Peetre che mi aveva colpito.
Si trattava di una caratterizzazione funzionale degli operatori differenziali come operatori *locali*: un operatore lineare A: $C^\infty(\mathbf{R}^n) \to C^\infty(\mathbf{R}^n)$ è del tipo

$$Au = \sum a_\alpha(x) D^\alpha u,$$

se e solo se $Au(x) \equiv 0$ in ogni aperto di $\mathbf{R}^n$ in cui $u(x) \equiv 0$.
Pensavo che questo teorema potesse aiutarmi a penetrare nella teoria delle equazioni alle derivate parziali, una regione che mi appariva vaga e sconfinata, agli antipodi dell'Analisi funzionale così chiara e distinta.
Condividendo il mio interesse, De Giorgi mi propose di indagare se con tecniche di questo tipo fosse possibile chiarire una "curiosità" che aveva da tempo: dato un aperto limitato $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, dire qual è il *comportamento limite*, per k tendente all'infinito, delle soluzioni $\{u_k(x)\}$ di una famiglia di problemi di Dirichlet equi-ellittici dipendenti dal parametro intero k:

$$(P_k) \qquad div(a_k(x)\nabla u_k) = f(x) \quad su \quad \Omega; \qquad u_k = 0 \quad su \quad \partial\Omega$$

con $a_k(x)$ matrici simmetriche di ordine n tali che

$$\lambda I \leq a_k(x) \leq \Lambda I \quad (0 < \lambda \leq \Lambda).$$

La successione $\{u_k(x)\}$ è limitata nello spazio di Hilbert $H^1_0(\Omega)$, quindi ha una naturale propensione a convergere in $L^2(\Omega)$.
Anche la successione dei coefficienti $\{a_k(x)\}$ è relativamente compatta, sia pure in una topologia più debole (la cosiddetta *topologia debole star* di

$L^\infty(\Omega)$). Può accadere tuttavia che, eseguendo il limite debole dei coefficienti, si giunga ad un problema $(\tilde{P})$ che non può essere considerato il vero limite dei (P_k) in quanto la sua soluzione $\tilde{u}$ è diversa dal limite delle $\{u_k\}$.

Questo fenomeno apparentemente strano si riscontra con chiarezza nel caso speciale delle equazioni ordinarie:

$$(*)\quad (a_k(t)u')' = f(t) \quad \text{su} \quad \{\alpha \le t \le \beta\},\qquad u(\alpha) = u(\beta) = 0$$

quando i coefficienti $a_k(t)$ siano funzioni a scalino che assumono alternativamente due diversi valori positivi, λ e Λ, su ognuno dei 2^k intervallini uguali in cui si può suddividere l'intervallo $[\alpha,\beta]$ (Ennio chiamava "greche" queste funzioni, come le decorazioni nei cappelli di certi generali).

Infatti, mentre da un lato le $\{a_k(t)\}$ convergono debolmente verso la *media aritmetica* $\tilde{a} = (\lambda + \Lambda)/2$ dei due valori, d'altro lato, risolvendo esplicitamente l'equazione (*), si scopre che per ogni $f(t)$ le soluzioni $\{u_k,(f,t)\}$ convergono uniformemente verso la soluzione $u(f,t)$ dell'equazione $\bar{a}u'' = f(t)$, dove $\bar{a} = 2\lambda\Lambda/(\lambda + \Lambda)$ è la *media armonica*. Si può dire che questo semplice esempio, in seguito tramandato come "l'esempio di De Giorgi" (cfr.[3]), stia alla base di tutta la teoria della G-convergenza.

Quale potrebbe essere l'eventuale *limite* (per $k \to \infty$) dei problemi (P_k) nel caso generale delle equazioni ellittiche in n variabili? Una caratterizzazione alla Peetre sarebbe potuta servire per provare il carattere differenziale dell'equazione limite, partendo da opportune informazioni sulle soluzioni del problema di Dirichlet a questa associata.

All'inizio la questione non era così chiara e ancor meno chiari erano, almeno per me, gli obiettivi da raggiungere. Perché Ennio De Giorgi si ponesse questo problema non lo saprei dire con esattezza, certamente (come ha osservato Mario Miranda) esso si inseriva in modo naturale nell'ambito delle sue recenti stime sulla regolarità hölderiana per le soluzioni di equazioni ellittiche. All'epoca io pensavo che egli intendesse chiarire alcuni aspetti oscuri della dimostrazione di Nash. L'omogeneizzazione fisica non era ancora apparsa all'orizzonte. Comunque mi appassionai presto al problema e con l'aiuto di Ennio mi misi subito al lavoro.

Il primo passo, relativamente facile, fu quello di adattare il teorema di Peetre alla classe $\mathcal{E}(\lambda, \Lambda, \Omega)$ degli operatori ellittici del tipo $A = div(a(x)\nabla)$ con $\lambda I \le a(x) \le \Lambda I$ su Ω (vedi [2]).

Pensando al Teorema di Trotter-Kato, mi rivolsi alle equazioni paraboliche: mi sembrava che passare da una successione convergente di semigruppi al generatore del semigruppo limite potesse risultare più semplice che non passare da una successione $\{A_k\}$ di operatori ellittici, con inversi A_k^{-1} debolmente convergenti verso un qualche B, all'operatore B^{-1} inverso di B.

In effetti, data una successione di problemi di Cauchy-Dirichlet

$$u_t - A_k u = 0,\ u(0) = \varphi,$$

con $A_k \in \mathcal{E}(\lambda, \Lambda, \Omega)$ non fu difficile accorgersi che, se per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ le soluzioni $u_k = T_k(t)\varphi$ convergono in $L^2(\Omega)$ verso qualche funzione $u \equiv T(t)\varphi$, questa è la soluzione di un problema di Cauchy *astratto* del tipo

$$u_t - Au = 0,\ u(0) = \varphi.$$

Il difficile era provare che il generatore A dell'equazione limite è di tipo *locale*, cioè che $A = div(a(x)\nabla)$ per qualche matrice di funzioni misurabili $a(x)$.

A questo riguardo la condizione di Dirichlet che u fosse nulla sul bordo di Ω, che aveva semplificato il quadro funzionale, rappresentava ora un grosso ostacolo. D'altra parte, anche limitandosi a dati iniziali $\varphi(x)$ a supporto compatto in Ω, la *velocità infinita di propagazione* (un tipico fenomeno delle equazioni paraboliche: il passaggio alle iperboliche avrebbe reso questa parte più facile) rendeva impossibile studiare l'evoluzione dei supporti delle soluzioni.

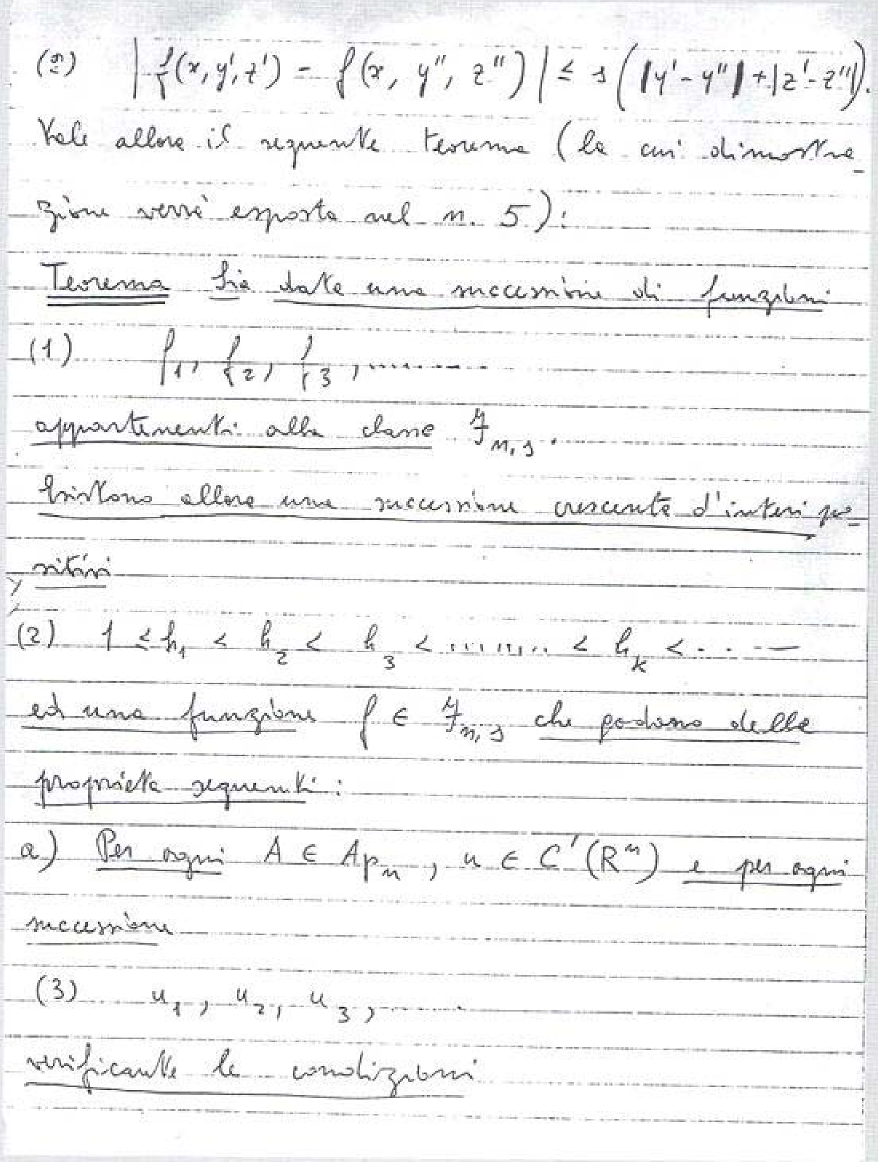
Alla fine, ricorrendo a *stime locali*, per $t \to 0$, della differenza $T_k(t)\varphi(x) - \varphi(x)$, uniformi al variare di k, nel 1967 (cfr. [3]) si ottenne la desiderata località del generatore A e quindi la compattezza della classe delle equazioni paraboliche $\{u_t - Au = 0\}$, con $A \in \mathcal{E}(\lambda, \Lambda, \Omega)$, rispetto alla L^2 - convergenza delle soluzioni.

Nel 1968 (cfr. [4]) questo risultato fu trasferito alla classe originaria $\mathcal{E}(\lambda, \Lambda, \Omega)$ degli operatori ellittici, dove la convergenza in L^2 delle soluzioni dei problemi di Dirichlet risultò essere, oltre che compatta, anche di *natura locale*, cioè indipendente dal particolare tipo di problema al contorno considerato. Dunque tale convergenza poteva essere vista, indirettamente, come una convergenza sui coefficienti. Lasciandomi un po' trascinare dalla mia passione per l'Analisi funzionale, volli dare un assetto operazionale, e anche un nome, alla convergenza che stava emergendo. Discussi la cosa insieme a Ennio e ci attestammo su G-convergenza, in quanto convergenza delle funzioni di Green. Ma per me quel nome voleva essere soprattutto un riconoscimento al maestro ed amico.

Dopo un ulteriore lavoro del 1969 con Antonio Marino (si tratta di [6]) dove fu provata la possibilità di approssimare in G-convergenza ogni operatore della classe $\mathcal{E}(\lambda, \Lambda, \Omega)$ con operatori *isotropi*, cioè in cui la matrice dei coefficienti è di tipo scalare, sospesi le ricerche su questa teoria che mi appariva in un certo senso compiuta. Credo che fino al 1973 gli unici altri lavori italiani collegabili in qualche modo alla G-convergenza siano stati quelli del 1967-69 di Umberto Mosco ([1], [5]). La convergenza di Mosco, di natura astratta e variazionale, è alla base di importanti ricerche di Analisi convessa. Nel caso particolare degli operatori lineari ellittici, essa corrisponde alla *convergenza forte* dei coefficienti (come ha chiarito Paolo Marcellini in [9]) e quindi non può mettere in luce la principale peculiarità della G-convergenza.

Qualche anno più tardi, nel 1972, quando ero all'Università di Parma, mi imbattei in alcune Note sui *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* ([7]) di Enrique Sanchez-Palencia, un giovane fisico matematico spagnolo che viveva a Parigi, con il quale mi misi poi in contatto. In esse veniva presentato in termini molto chiari un fenomeno fisico probabilmente antico, quello della *omogeneizzazione*, che si presenta in problemi di elettrostatica o conducibilità termica in materiali *eterogenei*, dove nell'ambito di una sostanza principale - come il ferro - si trovano numerosissime piccole impurità, cioè inclusioni di un altro materiale - come il carbone - disposte con regolarità, cioè in modo sostanzialmente *periodico*.

La complessità di questi problemi è tale da renderne impossibile la soluzione diretta; si preferisce allora affrontare un problema vicino: il *problema limite* al tendere all'infinito del numero delle inclusioni. Quest'ultimo, detto anche l'*omogeneizzato*, è per sua natura un problema a coefficienti costanti, che



(2) $|f(x,y',z') - f(x,y'',z'')| \le 1(|y'-y''|+|z'-z''|)$.

Vale allora il seguente teorema (la cui dimostrazione verrà esposta nel n. 5):

Teorema Sia data una successione di funzioni

(1) $f_1, f_2, f_3, \ldots$

appartenenti alla classe $\mathcal{F}_{n,1}$.

Esistono allora una successione crescente d'interi positivi

(2) $1 \le h_1 < h_2 < h_3 < \cdots < h_k < \cdots$

ed una funzione $f \in \mathcal{F}_{n,1}$ che godono delle proprietà seguenti:

a) Per ogni $A \in Ap_n$, $u \in C^1(R^n)$ e per ogni successione

(3) $u_1, u_2, u_3, \ldots$

verificante le condizioni

La prima definizione di Γ-convergenza in una minuta di Ennio De Giorgi del 1974 [11]

vanno determinati caso per caso.

La G-convergenza sembrava l'ambiente matematico ideale per descrivere questi fenomeni. Ne parlai a Pisa con De Giorgi, che sembrava essersi allontanato da questa problematica, e ci ponemmo un duplice obiettivo.

Anzitutto giustificare matematicamente il procedimento dell'omogeneizzazione fisica, dimostrando che ogni successione di operatori del tipo $A_k = div(\alpha(kx)\ \nabla)$ con $\alpha(y)$ matrice periodica, è G-convergente (senza dover passare a sottosuccessioni, come i precedenti risultati di compattezza imponevano) verso un qualche operatore, necessariamente a coefficienti costanti, $\overline{A} = div(\bar{a}\nabla)$.

Il secondo obiettivo, più ambizioso, era quello di "calcolare" i coefficienti $\bar{a}_{ij}$ dell'operatore omogeneizzato $\overline{A}$ in termini della matrice di partenza $\alpha(y)$.

(4) $u_k \in C'(R^n)$ per ogni k, $\lim\limits_{k\to\infty} \int_A |u - u_k| = 0$

risulta

(5) $\min \lim\limits_{k\to\infty} \int_A f_{h_k}(x, u_k(x), Du_k(x))\,dx \geq \int_A f(x, u(x), Du(x))\,dx$

b) Per ogni $A \in Ap_n$ ed ogni $w \in C'(R^n)$, esiste una successione

(6) $w_1, w_2, w_3, \ldots$

verificante le condizioni seguenti:

(7) $w_k - w \in C'_0(A)$ per ogni k, $\lim\limits_{k\to\infty} \max(|w_k - w|) = 0$

(8) $\lim\limits_{k\to\infty} \int_A f_{h_k}(x, w_k(x), Dw_k(x))\,dx = \int_A f(x, w(x), Dw(x))\,dx.$

n. 2 Accanto alla classe di funzioni $\mathcal{F}_{n,s}$ conviene introdurre una classe di funzionali $\mathcal{G}_{n,s}$ ed una strettamente collegata. A tale scopo cominciamo col considerare la classe Q degli intervalli aperti (di R^n) del tipo $\{(x_1 \ldots x_n) ; a_h < x_h < b_h, h = 1, \ldots, n\}$, ove

Per affrontare entrambe le questioni, Ennio propose di ricorrere a un metodo che gli era particolarmente caro, il *metodo variazionale*, considerare cioè, accanto ai problemi di Dirichlet sull'aperto Ω per gli operatori A_k, opportuni *problemi di minimo* per gli integrali dell'energia:

$$E_k(u,S) = \int_S (a_k(x)\nabla u, \nabla u)dx, \quad S \subseteq \Omega.$$

Nacque così il lavoro del 1973 sulla convergenza dell'energia (vedi [10]) che fa da ponte fra la G-convergenza, operazionale, e la Γ-convergenza, variazionale.

In esso si mostra che se $\{A_k\}$ G-converge ad A su Ω, in ogni $S \subseteq \Omega$ si ha la convergenza delle corrispondenti energie relative alle soluzioni dei problemi di Dirichlet, cioè se

$$A_k u_k = f \quad \text{su } \Omega \quad \text{e} \quad u_k = 0 \text{ su } \partial\Omega,$$

allora

$$E_k(u_k, S) \to E(u,S).$$

Come corollario si ottiene che ogni successione di operatori di tipo *omogeneizzante* è G-convergente verso un qualche operatore costante $\overline{A}$, i cui coefficienti possono essere ricavati risolvendo n problemi campione.

Dopo il 1973, la storia della G-convergenza, ormai quasi inscindibile dall'omogeneizzazione, si fa convulsa e difficile da seguire.

Nel 1975, in un lavoro dedicato a Picone per i suoi novant'anni (il cosiddetto "De Giorgi - Picone", [11]), De Giorgi, che aveva preso ad appassionarsi alla teoria, estende in un certo senso il precedente lavoro sui funzionali dell'energia al caso dei funzionali dell'area:

$$F_k(u,\Omega) = \int_\Omega f_k(x,u,Du)dx$$

con $f_k(x,y,\xi)$ a crescita lineare in (y,ξ). Gli operatori di Eulero associati agli F_k non sono lineari e, per studiare il comportamento asintotico dei corrispondenti problemi di minimo, Ennio introduce una nuova nozione di convergenza che non richiede di uscire dall'ambito variazionale. Si tratta della *convergenza variazionale*, o "Γ-convergenza", che sarà di lì a poco formalizzata in un lavoro con Tullio Franzoni ([12]).

Grosso modo, dire che una successione di funzionali $F_k : X \to [0,+\infty]$, definiti su uno spazio topologico X, è Γ-convergente verso il funzionale F significa che:

- *per ogni successione* $\{u_k\}$ *convergente ad* u *in* X, *si ha* $\liminf F_k(u_k) \geq F(u)$,
- *per ogni* $u \in X$ *esiste qualche* $\{u_k\}$ *convergente ad* u *per cui* $\lim F_k(u_k) = F(u)$,

il che comporta in particolare che gli eventuali punti (e valori) di minimo

degli F_k convergono verso punti (e valori) di minimo di F.
Per i funzionali del Calcolo delle Variazioni, il Γ-limite risulta, di fatto, indipendente dal particolare spazio topologico utilizzato, il che mostra l'intrinsecità di questo concetto (nel caso dei funzionali dell'area, lo spazio giusto è $X = L^1(\Omega)$).
Si tratta poi di stabilire, caso per caso, se una data famiglia di funzionali $\{F_k\}$ sia Γ-convergente o almeno relativamente compatta, se il Γ-limite F sia ancora dello stesso tipo degli F_k (ad esempio di tipo integrale) ecc. Si apre un vasto mondo di ricerca, ancora non del tutto esplorato.
Negli anni successivi, oltre a trattare importanti casi concreti, De Giorgi continua ad ampliare la nozione stessa di Γ-convergenza, sino a darle un carattere logico-funtoriale talmente generale da potervi includere pressoché ogni tipo di convergenza esistente. Nel frattempo, in Italia l'interesse per la G-convergenza va crescendo e, a partire dal 1973, molti giovani valenti ricercatori affluiscono a Pisa per seguire le lezioni di De Giorgi. Fra i primi, Paolo Marcellini, Carlo Sbordone, Luciano Carbone e Lucio Boccardo, che daranno contributi decisivi allo sviluppo della teoria.
Anche all'estero questa nuova teoria comincia ad imporsi, soprattutto a Parigi. Partendo da problemi di controlli ottimi, François Murat (che già nel 1971-72 in [8], indipendentemente dalla G-convergenza, aveva mostrato il mancato controllo sui coefficienti per certe equazioni ellittiche di tipo isotropo) e Luc Tartar elaborano un elegante metodo di dualità che permette di semplificare ed estendere notevolmente i primi risultati di G-convergenza. Alain Bensoussan, Jacques-Louis Lions e George Papanicolaou scrivono una serie di note che presto sfoceranno in un libro. Negli Stati Uniti, Ivo Babuska va sviluppando gli aspetti numerici dell'omogeneizzazione, mentre in Russia cominciano ad apparire i primi i lavori di N.S. Bakhvalov e di Olga A. Oleinik.

Al di là dei pochi lavori scritti ([10]-[14], più i testi di alcune conferenze), l'interesse di De Giorgi per la Γ - convergenza non è mai venuto meno con il passare degli anni. A questa, o a questioni ad essa connesse, dedicava il suo corso del martedì alla Normale, e non perdeva occasione per stimolare nuove ricerche, prodigo con tutti di incoraggiamenti e di idee.

Bibliografia

[1] U. Mosco, Approximation of the solutions of some variational inequalities, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 21 (1967) pp. 373-394

[2] S. Spagnolo, Una caratterizzazione degli operatori differenziali autoaggiunti del secondo ordine a coefficienti misurabili e limitati, *Rend. Sem. Mat. Padova* 39 (1967) pp. 56-64

[3] S. Spagnolo, Sul limite di soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 21 (1967) pp. 657-699

[4] S. Spagnolo, Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 22 (1968) pp. 571-597

[5] U. Mosco, Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, *Adv. Math.*, 3 (1969) pp. 510-585

[6] A. Marino, S. Spagnolo, Un tipo di approssimazione dell'operatore $\sum \partial_i (a_{ij}(x)\partial_j)$ con operatori $\sum \partial_j (\beta_j(x)\partial_j)$, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 23 (1969) pp. 657-673

[7] E. Sanchez-Palencia, Solutions périodiques par rapport aux variables d'espace et applications, *C.R.A.S. Paris*, 271 (1970) pp. 1129-1132; Equations aux dérivées partielles dans un type de milieux hétérogène, ibid. 272 (1971) pp. 1410-1413

[8] F. Murat, Un contre-example pour le problème de contrôle dans les coefficients, *C.R.A.S. Paris*, 273 (1971) pp. 708-711; Théorèmes de non-existence pour des problèmes de contrôle dans les coefficients, ibid. 274 (1972), pp. 395-398

[9] P. Marcellini, Su una convergenza di funzioni convesse, *Boll. U.M.I.*,. 8 (1973) pp. 137-58

[10] E. De Giorgi, S. Spagnolo, Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine, *Boll. U.M.I.*, 8 (1973) pp. 391-411

[11] E. De Giorgi, Sulla convergenza di alcune successioni di integrali di tipo dell'area, *Rend. Matem.*, 8 (1975) pp. 277-294

[12] E. De Giorgi, T. Franzoni, Su un tipo di convergenza variazionale, *Atti Acc. Naz. Lincei*, 58 (1975) pp. 842-850; *Rend. Sem. Mat. Brescia*, 3 (1979) pp. 63-101

[13] E. De Giorgi, Γ-convergenza e G-convergenza, *Boll. U.M.I.*, 14-A (1977) pp. 213-220

[14] E. De Giorgi, G. Letta, Une notion générale de convergence faible pour des functions croissantes d'ensemble, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 4 (1977) pp. 61-69