Dopo la laurea nel 1950, i primi lavori di De Giorgi sono dedicati alla topologia, all'integrazione e al calcolo delle variazioni. Già in questi anni, De Giorgi si interessa agli "insiemi di Caccioppoli", sui quali costruirà in seguito la sua teoria delle superfici minime. In particolare, in un lavoro del 1952, dimostra la compattezza dell'insieme A dei sottoinsiemi di un insieme boreliano e limitato E, equilimitati in perimetro, e la semicontinuità in A di ogni funzione assolutamente continua.
Il primo risultato rilevante si ha nel 1955, relativamente a questioni di unicità per equazioni alle derivate parziali. Già l'anno precedente aveva costruito un esempio di non unicità per un problema misto per l'equazione di Laplace. Ora prende in esame il problema di Cauchy per l'equazione iperbolica:

$$\frac{\partial^8 w}{\partial t^8} = a(x,t)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + b(x,t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c(x,t)w$$

con le condizioni iniziali:

$$w(x,0) = \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = \ldots = \frac{\partial^7 w}{\partial t^7}(x,0) = 0$$

e costruisce tre funzioni infinitamente derivabili $a(x,t)$, $b(x,t)$ e $c(x,t)$ per le quali il problema in esame, oltre alla soluzione $w \equiv 0$, ha anche una soluzione non nulla. In altre parole, il problema di Cauchy per le equazioni iperboliche con coefficienti di classe C^∞ non ha soluzione unica[1].
Con questo risultato, De Giorgi si impone all'attenzione della comunità matematica internazionale. In particolare, data da qui l'attenzione e la stima

Ma il lavoro che affermò definitivamente De Giorgi tra i matematici di prima grandezza fu senza dubbio quello relativo alla regolarità dei minimi dei funzionali, pubblicato nel 1957. Questo problema[2] era stato incluso da Hilbert nella sua famosa conferenza al Congresso Internazionale di Parigi del 1900, e consisteva nel dimostrare la regolarità dei minimi di un funzionale:

$$F(u) = \int_\Omega f\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) dx$$

o, in breve:

$$F(u) = \int_\Omega f(Du)\, dx \tag{1}$$

L'equazione di Eulero del funzionale F è:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}(Du(x))\right) = 0 \tag{2}$$

Se la funzione $f(p)$ è convessa, o meglio se verifica le diseguaglianze:

$$\nu|\xi|^2 \le \sum_{i,h=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial p_i\, \partial p_h}\xi_i \xi_h \le M|\xi|^2 \quad \text{per ogni} \quad \xi \in \mathbf{R}^n \tag{3}$$

l'equazione (2) è di tipo ellittico. Nel 1904, S. Bernstein aveva dimostrato che se $f(p)$ è una funzione analitica, ogni soluzione di classe C^3 dell'equazione (2) è analitica e ne aveva dedotto l'analiticità dei minimi del funzionale F. Questo risultato era stato migliorato da vari autori, fino a dimostrare che ogni minimo di classe C^1 è una funzione analitica.
Per quanto riguarda invece l'esistenza dei minimi, con l'introduzione degli spazi di Sobolev si era giunti a una teoria soddisfacente in ipotesi piuttosto generali. Questi minimi (tranne nel caso di problemi bidimensionali) non erano però in generale funzioni di classe C^1 e pertanto ad essi non era applicabile il precedente risultato di regolarità.

Si aveva così una lacuna tra i risultati di esistenza, che davano minimi in classi di funzioni non regolari, e quelli di regolarità, che per partire richiedevano almeno la continuità delle derivate[3]. È in questo panorama che si inserisce il risultato di De Giorgi.
Con un metodo completamente nuovo e originale, egli dimostra che le soluzioni di un'equazione ellittica:

$$\sum_{i,h=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ih}(x)\frac{\partial w}{\partial x_h}\right) = 0 \tag{4}$$

in cui i coefficienti a_{ih} sono funzioni misurabili e limitate e verificano la condizione di ellitticità:

$$\nu|\xi|^2 \le \sum_{i,h=1}^{n} a_{ih}(x)\xi_i\xi_h \le M|\xi|^2$$
$$\text{per ogni } \xi \in \mathbf{R}^n,$$

sono funzioni continue (più precisamente hölderiane).
Se ora si deriva l'equazione (2) rispetto a x_s, si ottiene:

$$\sum_{i,h=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_h}(Du(x))\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_s}\right) = 0$$

e quindi la funzione

$$w = \frac{\partial u}{\partial x_s}$$

è soluzione di un'equazione del tipo (4), con:

$$a_{ih}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_h}(Du(x)).$$

A questa equazione di tipo ellittico si può applicare il teorema di De Giorgi, e concludere che w, cioè la derivata

$$\frac{\partial u}{\partial x_s},$$

è una funzione continua. Pertanto u è

una funzione di classe C^1 e quindi analitica.

Contemporaneamente a De Giorgi, lo stesso risultato era stato dimostrato da John Nash, che più tardi avrebbe avuto il premio Nobel per alcuni suoi studi giovanili sull'Economia matematica. Il metodo di Nash, totalmente differente da quello di De Giorgi, era molto più complesso e non ha avuto sviluppi. Non così quello di De Giorgi, che è stato il punto di partenza per innumerevoli ricerche, e il cui potenziale innovativo non si è ancora esaurito.

Il teorema di De Giorgi-Nash riguarda equazioni ellittiche del secondo ordine e per molto tempo non è stato chiaro se esso si potesse estendere a equazioni di ordine superiore e a sistemi ellittici arbitrari. A dieci anni di distanza, lo stesso De Giorgi mostrava con un esempio che ciò non era possibile e che esistevano sistemi ellittici del secondo ordine (a coefficienti discontinui) con soluzioni discontinue.

Nel frattempo De Giorgi, dopo aver vinto una cattedra di Analisi matematica nel 1958 ed essersi trasferito a Pisa l'anno successivo, aveva ripreso i suoi studi sugli insiemi di Caccioppoli. Quest'ultimo aveva pubblicato una serie di lavori tesi a stabilire le condizioni più generali per l'applicabilità della formula di Gauss-Green:

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial E} f v_i\, d\sigma$$

in cui v_i è la normale a ∂E, e aveva mostrato che una formula simile sussiste se E ha perimetro finito, cioè se è approssimabile con poliedri di perimetro equilimitato.

Nella nozione di perimetro De Giorgi vede la chiave per affrontare il problema delle superfici di area minima.

Si tratta di un problema di calcolo delle variazioni che era stato studiato diffusamente nell'Ottocento: data una curva γ semplice e chiusa, tra le superfici che hanno γ come bordo, trovarne una che abbia l'area più piccola possibile. Da un punto di vista fisico, questa superficie è quella della bolla di sapone che si ottiene immergendo γ in acqua saponata. Negli anni Trenta, J. Douglas e T. Rado avevano dimostrato l'esistenza di superfici minime per ogni curva γ, un risultato che era valso a Douglas la medaglia Fields, una specie di premio Nobel per la matematica. Nulla era però noto nel caso delle ipersuperfici, in cui si cercano superfici minime di dimensione $n-1$ in uno spazio di dimensione n; in particolare, non si era trovata una classe naturale di superfici, opportunamente generalizzate, in cui impostare il problema. De Giorgi si rende conto che una classe adatta è quella delle frontiere di insiemi di Cacciopoli, di cui inizia a studiare sistematicamente le proprietà[4].

Come abbiamo visto, già nel suo primo lavoro sugli insiemi di Caccioppoli aveva dimostrato la compattezza di insiemi di perimetro equilimitato e la semicontinuità di certe funzioni, tra cui la misura della superficie. Con questi risultati, non è difficile dimostrare l'esistenza di superfici minime generalizzate in $\mathbf{R}^n$.

Molto più complesso è il problema della regolarità. In una famosa Memoria del 1960, pubblicata privatamente in un numero minimo di copie, De Giorgi dimostrava la regolarità "quasi ovunque" delle ipersuperfici minime. Più precisamente, provava che le ipersuperfici minime potevano avere al più un insieme di punti singolari chiuso e di misura superficiale nulla. Se questi punti singolari esistessero o no restava un problema aperto, che lo stesso De Giorgi aveva collegato all'esistenza o meno di coni di area minima.

Il problema della regolarità prende una forma diversa per le superfici minime che si possono scrivere come grafici di una funzione $u(x)$. In questo caso l'area della superficie è data dall'integrale:

$$\int \sqrt{1+|Du|^2}\, dx$$

che è del tipo (1), con

$$f(p) = \sqrt{1+|p|^2}.$$

Si ha dunque l'equazione (4) con:

$$a_{ih}(x) = \frac{(1+|Du(x)|^2)\delta_{ih} - D_i u(x) D_h u(x)}{(1+|Du(x)|^2)^{3/2}}.$$

Il problema con questa equazione è che in generale non verifica le condizioni (3). Infatti si ha:

$$(1+|Du(x)|^2)^{-3/2}|\xi|^2 \leq a_{ih}\xi_i\xi_h \leq$$
$$\leq (1+|Du(x)|^2)^{-1/2}|\xi|^2.$$

Le (3) sono però verificate se il gradiente di u è limitato; pertanto, se ciò avviene, è possibile applicare il teorema di De Giorgi-Nash e concludere che la funzione $u(x)$, e quindi la superficie grafico, è regolare.

Il problema in questo caso consiste, dunque, nel dimostrare che i minimi del funzionale (5) hanno gradiente limitato. De Giorgi affronta tale questione nel 1968 e, in un articolo in collaborazione con E. Bombieri e M. Miranda, prova la limitatezza del gradiente e di conseguenza la regolarità dei grafici di area minima.

Per questi ultimi, un altro problema resisteva da più di cinquant'anni.

Nel 1915, S. Bernstein aveva dimostrato che i soli grafici minimi su tutto $\mathbf{R}^2$ erano i piani. Il problema dell'estensione di questo risultato a grafici minimi

Parigi, novembre 1995
Jean-Louis Lions consegna a De Giorgi il premio dell'Académie de France

su $\mathbf{R}^n$ non aveva avuto soluzione. Nel 1962 però W. Fleming aveva collegato il problema a quello dell'esistenza di coni minimi, mostrando come l'esistenza di un grafico minimo su $\mathbf{R}^n$, diverso da un iperpiano, comportava quella di un cono di area minima in $\mathbf{R}^{n+1}$.
Tre anni più tardi, De Giorgi migliorava questo risultato, facendo vedere che in questo caso doveva esistere un cono minimo in $\mathbf{R}^n$. Siccome si sapeva che in $\mathbf{R}^3$ non esistevano coni minimi, questo risultato estendeva il teorema di Bernstein a grafici su $\mathbf{R}^3$.
La questione dell'esistenza o meno di coni minimi singolari diventava così il punto cruciale della teoria, in quanto da essa dipendevano sia la regolarità delle superfici minime che la validità del teorema di Bernstein. Nel 1968 J. Simons dimostrava la non esistenza di coni minimi in $\mathbf{R}^n$ con $n \leq 7$ (e quindi contemporaneamente la regolarità delle superfici minime e la validità del teorema di Bernstein in dimensione minore di 8).
Nello stesso tempo, Simons indicava un cono in $\mathbf{R}^8$ che avrebbe potuto avere area minima.
La questione venne risolta definitivamente lo stesso anno da De Giorgi, in un lavoro in collaborazione con E. Bombieri e chi scrive: il cono di Simons era effettivamente minimo. Nello stesso articolo, veniva costruito un controesempio al teorema di Bernstein in dimensione 8. Questi risultati completavano il quadro della regolarità delle ipersuperfici minimali.
Sempre negli stessi anni, il metodo con il quale De Giorgi aveva dimostrato la regolarità quasi ovunque delle ipersuperfici minime veniva perfezionato e esteso da vari autori, tra cui H. Federer, W. Fleming, e in particolare da F. Almgren, che tra l'altro prendevano in esame superfici di codimensione arbitraria, anche non orientate.

Note

1. In un lavoro successivo dello stesso anno, vengono introdotte condizioni sui coefficienti, sufficienti per assicurare l'unicità della soluzione.
2. Si tratta del diciannovesimo problema che, insieme al ventesimo, era dedicato al Calcolo delle variazioni.
3. Tranne che nel caso dei problemi piani (n=2) per i quali C. B. Morrey aveva dimostrato la regolarità della soluzione.
4. Come sottoprodotto di queste ricerche, è da segnalare una brillante dimostrazione della proprietà isoperimetrica dell'ipersfera: tra tutti gli insiemi di misura fissata, l'ipersfera è quella che ha superficie di misura minima.