Orientamatica 2018/2019

Giochiamo: qual è il titolo di questo incontro?

Devis Abriani <devis.abriani@gmail.com>
Marco Broglia <bramo.logicar@gmail.com>

Milano, $1 + 8 + 8 + 1$ gennaio $2^8 + 3^6 + 4^5 + 7^0 + 9^1$

Indice

Indice

Le ranocchie Racchia e Gracchia

La ranocchia Racchia

La ranocchia Racchia, quando sale una scalinata, riesce a salire uno oppure due gradini alla volta. Così, dovendo salire una scala di tre gradini, potrebbe farlo in tre modi diversi.

Le ranocchie Racchia e Gracchia

La ranocchia Racchia

La ranocchia Racchia, quando sale una scalinata, riesce a salire uno oppure due gradini alla volta. Così, dovendo salire una scala di tre gradini, potrebbe farlo in tre modi diversi.

In quanti modi diversi può salire una scalinata di 18 gradini?

Le ranocchie Racchia e Gracchia

La ranocchia Racchia

La ranocchia Racchia, quando sale una scalinata, riesce a salire uno oppure due gradini alla volta. Così, dovendo salire una scala di tre gradini, potrebbe farlo in tre modi diversi.

In quanti modi diversi può salire una scalinata di 18 gradini?

La sorella Gracchia

La sorella di Racchia, la ranocchia Gracchia, è molto più agile: può salire uno, due oppure anche tre gradini alla volta.
Così, dovendo raggiungere la sorella sulla stessa scala di tre gradini, potrebbe farlo in quattro modi diversi.

Le ranocchie Racchia e Gracchia

La ranocchia Racchia

La ranocchia Racchia, quando sale una scalinata, riesce a salire uno oppure due gradini alla volta. Così, dovendo salire una scala di tre gradini, potrebbe farlo in tre modi diversi.

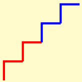
In quanti modi diversi può salire una scalinata di 18 gradini?

La sorella Gracchia

La sorella di Racchia, la ranocchia Gracchia, è molto più agile: può salire uno, due oppure anche tre gradini alla volta.
Così, dovendo raggiungere la sorella sulla stessa scala di tre gradini, potrebbe farlo in quattro modi diversi.

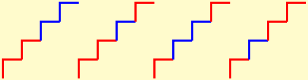
In quanti modi diversi può raggiungere la sorella sulla scalinata di 18 gradini?

Le ranocchie Racchia e Gracchia



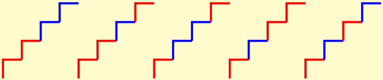
Racchia sale una scala di 4 gradini in ? modi diversi

Le ranocchie Racchia e Gracchia



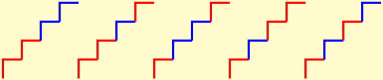
Racchia sale una scala di 4 gradini in ? modi diversi

Le ranocchie Racchia e Gracchia

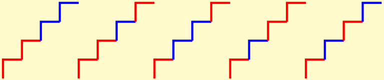


Racchia sale una scala di 4 gradini in 5 modi diversi

Le ranocchie Racchia e Gracchia

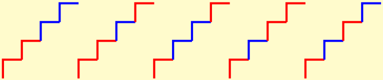


Racchia sale una scala di 4 gradini in 5 modi diversi

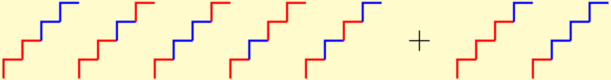


Gracchia sale una scala di 4 gradini in ? modi diversi

Le ranocchie Racchia e Gracchia



Racchia sale una scala di 4 gradini in 5 modi diversi



Gracchia sale una scala di 4 gradini in 7 modi diversi

Le ranocchie Racchia e Gracchia

Siano $\mathcal{R}_n$ e $\mathcal{G}_n$ gli insiemi di tutti i modi possibili che hanno Racchia e Gracchia per salire una scala di n gradini.

Le ranocchie Racchia e Gracchia

Siano $\mathcal{R}_n$ e $\mathcal{G}_n$ gli insiemi di tutti i modi possibili che hanno Racchia e Gracchia per salire una scala di n gradini.

$$\mathcal{R}_1 = \{1\}$$
$$\mathcal{R}_2 = \{2, 11\}$$
$$\mathcal{R}_3 = \{21, 12, 111\}$$
$$\mathcal{R}_4 = \{22, 211, 121, 112, 1111\}$$

Le ranocchie Racchia e Gracchia

Siano $\mathcal{R}_n$ e $\mathcal{G}_n$ gli insiemi di tutti i modi possibili che hanno Racchia e Gracchia per salire una scala di n gradini.

$$\mathcal{R}_1 = \{1\} \qquad \mathcal{G}_1 = \{1\}$$

$$\mathcal{R}_2 = \{2, 11\} \qquad \mathcal{G}_2 = \{2, 11\}$$

$$\mathcal{R}_3 = \{21, 12, 111\} \qquad \mathcal{G}_3 = \{21, 12, 111\} \cup \{3\}$$

$$\mathcal{R}_4 = \{22, 211, 121, 112, 1111\} \qquad \mathcal{G}_4 = \{22, 211, 121, 112, 1111\} \cup \{31, 13\}$$

Le ranocchie Racchia e Gracchia

Siano $\mathcal{R}_n$ e $\mathcal{G}_n$ gli insiemi di tutti i modi possibili che hanno Racchia e Gracchia per salire una scala di n gradini.

$$\mathcal{R}_1 = \{1\} \qquad \mathcal{G}_1 = \{1\}$$
$$\mathcal{R}_2 = \{2, 11\} \qquad \mathcal{G}_2 = \{2, 11\}$$
$$\mathcal{R}_3 = \{21, 12, 111\} \qquad \mathcal{G}_3 = \{21, 12, 111\} \cup \{3\}$$
$$\mathcal{R}_4 = \{22, 211, 121, 112, 1111\} \qquad \mathcal{G}_4 = \{22, 211, 121, 112, 1111\} \cup \{31, 13\}$$

Siano $R(n)$ e $G(n)$ il numero di modi diversi che hanno Racchia e Gracchia per salire una scala di n gradini.

Le ranocchie Racchia e Gracchia

Siano $\mathcal{R}_n$ e $\mathcal{G}_n$ gli insiemi di tutti i modi possibili che hanno Racchia e Gracchia per salire una scala di n gradini.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 &= \{1\} & \mathcal{G}_1 &= \{1\} \\
\mathcal{R}_2 &= \{2, 11\} & \mathcal{G}_2 &= \{2, 11\} \\
\mathcal{R}_3 &= \{21, 12, 111\} & \mathcal{G}_3 &= \{21, 12, 111\} \cup \{3\} \\
\mathcal{R}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111\} & \mathcal{G}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111\} \cup \{31, 13\}
\end{aligned}
$$

Siano $R(n)$ e $G(n)$ il numero di modi diversi che hanno Racchia e Gracchia per salire una scala di n gradini.

$$
\begin{aligned}
R(1) &= |\mathcal{R}_1| = 1 \\
R(2) &= |\mathcal{R}_2| = 2 \\
R(3) &= |\mathcal{R}_3| = 3 \\
R(4) &= |\mathcal{R}_4| = 5
\end{aligned}
$$

Le ranocchie Racchia e Gracchia

Siano $\mathcal{R}_n$ e $\mathcal{G}_n$ gli insiemi di tutti i modi possibili che hanno Racchia e Gracchia per salire una scala di n gradini.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 &= \{1\} & \mathcal{G}_1 &= \{1\} \\
\mathcal{R}_2 &= \{2, 11\} & \mathcal{G}_2 &= \{2, 11\} \\
\mathcal{R}_3 &= \{21, 12, 111\} & \mathcal{G}_3 &= \{21, 12, 111\} \cup \{3\} \\
\mathcal{R}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111\} & \mathcal{G}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111\} \cup \{31, 13\}
\end{aligned}$$

Siano $R(n)$ e $G(n)$ il numero di modi diversi che hanno Racchia e Gracchia per salire una scala di n gradini.

$$\begin{aligned}
R(1) &= |\mathcal{R}_1| = 1 & G(1) &= |\mathcal{G}_1| = 1 \\
R(2) &= |\mathcal{R}_2| = 2 & G(2) &= |\mathcal{G}_2| = 2 \\
R(3) &= |\mathcal{R}_3| = 3 & G(3) &= |\mathcal{G}_3| = 4 \\
R(4) &= |\mathcal{R}_4| = 5 & G(4) &= |\mathcal{G}_4| = 7
\end{aligned}$$

Le ranocchie Racchia e Gracchia

Suddividiamo $\mathcal{R}_4$ e $\mathcal{G}_4$

$$\mathcal{R}_4 = \{22, 211, 121, 112, 1111\} \qquad \mathcal{G}_4 = \{22, 211, 121, 112, 1111, 31, 13\}$$

Le ranocchie Racchia e Gracchia

Suddividiamo $\mathcal{R}_4$ e $\mathcal{G}_4$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111\} \\ &= 1 \circ \{21, 12, 111\} \cup 2 \circ \{2, 11\}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathcal{G}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111, 31, 13\} \\ &= 1 \circ \{21, 12, 111, 3\} \cup 2 \circ \{2, 11\} \cup 3 \circ \{1\}\end{aligned}$$

Le ranocchie Racchia e Gracchia

Suddividiamo $\mathcal{R}_4$ e $\mathcal{G}_4$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111\} \\ &= 1 \circ \{21, 12, 111\} \cup 2 \circ \{2, 11\} \\ &= 1 \circ \mathcal{R}_3 \cup 2 \circ \mathcal{R}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111, 31, 13\} \\ &= 1 \circ \{21, 12, 111, 3\} \cup 2 \circ \{2, 11\} \cup 3 \circ \{1\} \\ &= 1 \circ \mathcal{G}_3 \cup 2 \circ \mathcal{G}_2 \cup 3 \circ \mathcal{G}_1 \end{aligned}$$

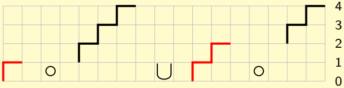
Le ranocchie Racchia e Gracchia

Suddividiamo $\mathcal{R}_4$ e $\mathcal{G}_4$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111\}\\ &= 1 \circ \{21, 12, 111\} \cup 2 \circ \{2, 11\}\\ &= 1 \circ \mathcal{R}_3 \cup 2 \circ \mathcal{R}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111, 31, 13\}\\ &= 1 \circ \{21, 12, 111, 3\} \cup 2 \circ \{2, 11\} \cup 3 \circ \{1\}\\ &= 1 \circ \mathcal{G}_3 \cup 2 \circ \mathcal{G}_2 \cup 3 \circ \mathcal{G}_1\end{aligned}$$

$\mathcal{R}_4$



Le ranocchie Racchia e Gracchia

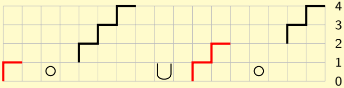
Suddividiamo $\mathcal{R}_4$ e $\mathcal{G}_4$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111\} \\ &= 1 \circ \{21, 12, 111\} \cup 2 \circ \{2, 11\} \\ &= 1 \circ \mathcal{R}_3 \cup 2 \circ \mathcal{R}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111, 31, 13\} \\ &= 1 \circ \{21, 12, 111, 3\} \cup 2 \circ \{2, 11\} \cup 3 \circ \{1\} \\ &= 1 \circ \mathcal{G}_3 \cup 2 \circ \mathcal{G}_2 \cup 3 \circ \mathcal{G}_1\end{aligned}$$

$\mathcal{R}_4$

$\mathcal{R}_4 =$

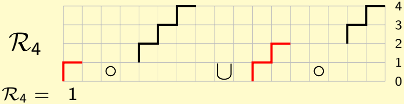


Le ranocchie Racchia e Gracchia

Suddividiamo $\mathcal{R}_4$ e $\mathcal{G}_4$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111\} \\ &= 1 \circ \{21, 12, 111\} \cup 2 \circ \{2, 11\} \\ &= 1 \circ \mathcal{R}_3 \cup 2 \circ \mathcal{R}_2\end{aligned}$$

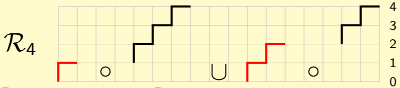
$$\begin{aligned}\mathcal{G}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111, 31, 13\} \\ &= 1 \circ \{21, 12, 111, 3\} \cup 2 \circ \{2, 11\} \cup 3 \circ \{1\} \\ &= 1 \circ \mathcal{G}_3 \cup 2 \circ \mathcal{G}_2 \cup 3 \circ \mathcal{G}_1\end{aligned}$$



Suddividiamo $\mathcal{R}_4$ e $\mathcal{G}_4$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111\} \\ &= 1 \circ \{21, 12, 111\} \cup 2 \circ \{2, 11\} \\ &= 1 \circ \mathcal{R}_3 \cup 2 \circ \mathcal{R}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111, 31, 13\} \\ &= 1 \circ \{21, 12, 111, 3\} \cup 2 \circ \{2, 11\} \cup 3 \circ \{1\} \\ &= 1 \circ \mathcal{G}_3 \cup 2 \circ \mathcal{G}_2 \cup 3 \circ \mathcal{G}_1\end{aligned}$$



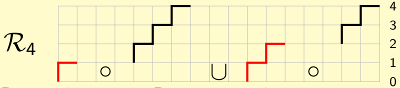
$\mathcal{R}_4 = \quad 1 \quad \circ \quad \mathcal{R}_3$

Le ranocchie Racchia e Gracchia

Suddividiamo $\mathcal{R}_4$ e $\mathcal{G}_4$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111\}\\ &= 1 \circ \{21, 12, 111\} \cup 2 \circ \{2, 11\}\\ &= 1 \circ \mathcal{R}_3 \cup 2 \circ \mathcal{R}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111, 31, 13\}\\ &= 1 \circ \{21, 12, 111, 3\} \cup 2 \circ \{2, 11\} \cup 3 \circ \{1\}\\ &= 1 \circ \mathcal{G}_3 \cup 2 \circ \mathcal{G}_2 \cup 3 \circ \mathcal{G}_1\end{aligned}$$

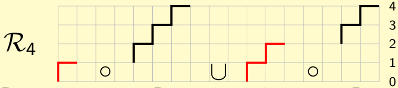


$\mathcal{R}_4 =$ 1 $\circ$ $\mathcal{R}_3$ $\cup$ 2

Le ranocchie Racchia e Gracchia

Suddividiamo $\mathcal{R}_4$ e $\mathcal{G}_4$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111\} \\
&= 1 \circ \{21, 12, 111\} \cup 2 \circ \{2, 11\} \\
&= 1 \circ \mathcal{R}_3 \cup 2 \circ \mathcal{R}_2
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\mathcal{G}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111, 31, 13\} \\
&= 1 \circ \{21, 12, 111, 3\} \cup 2 \circ \{2, 11\} \cup 3 \circ \{1\} \\
&= 1 \circ \mathcal{G}_3 \cup 2 \circ \mathcal{G}_2 \cup 3 \circ \mathcal{G}_1
\end{aligned}$$

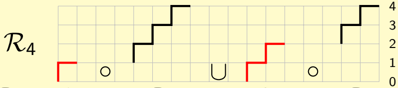


$$\mathcal{R}_4 = 1 \quad \circ \quad \mathcal{R}_3 \quad \cup \quad 2 \quad \circ \quad \mathcal{R}_2$$

Suddividiamo $\mathcal{R}_4$ e $\mathcal{G}_4$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111\}\\ &= 1 \circ \{21, 12, 111\} \cup 2 \circ \{2, 11\}\\ &= 1 \circ \mathcal{R}_3 \cup 2 \circ \mathcal{R}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_4 &= \{22, 211, 121, 112, 1111, 31, 13\}\\ &= 1 \circ \{21, 12, 111, 3\} \cup 2 \circ \{2, 11\} \cup 3 \circ \{1\}\\ &= 1 \circ \mathcal{G}_3 \cup 2 \circ \mathcal{G}_2 \cup 3 \circ \mathcal{G}_1\end{aligned}$$

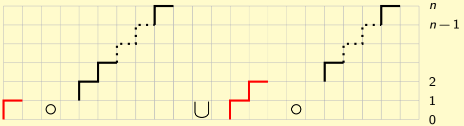


$$\mathcal{R}_4 = \; 1 \quad \circ \quad \mathcal{R}_3 \quad \cup \quad 2 \quad \circ \quad \mathcal{R}_2$$

$$R(4) = R(3) + R(2)$$

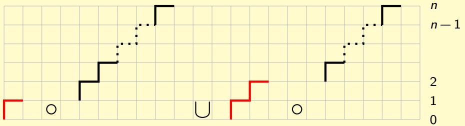
Le ranocchie Racchia e Gracchia

$\mathcal{R}_n$



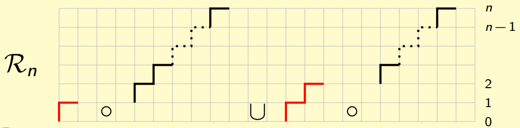
Le ranocchie Racchia e Gracchia

$\mathcal{R}_n$



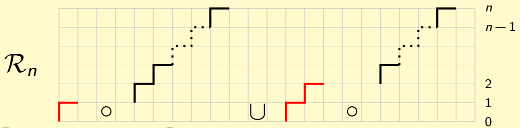
$\mathcal{R}_n =$

Le ranocchie Racchia e Gracchia



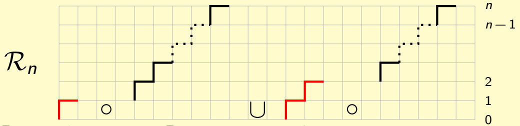
$\mathcal{R}_n = \ 1$

Le ranocchie Racchia e Gracchia



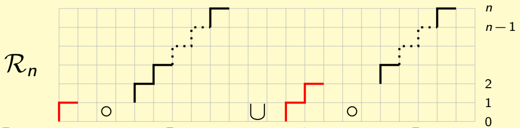
$\mathcal{R}_n = 1 \quad \circ \quad \mathcal{R}_{n-1}$

Le ranocchie Racchia e Gracchia



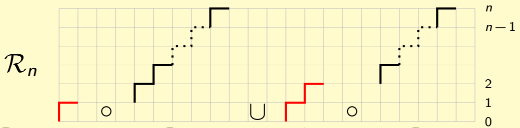
$\mathcal{R}_n = 1 \circ \mathcal{R}_{n-1} \cup 2$

Le ranocchie Racchia e Gracchia



$$\mathcal{R}_n = 1 \circ \mathcal{R}_{n-1} \cup 2 \circ \mathcal{R}_{n-2}$$

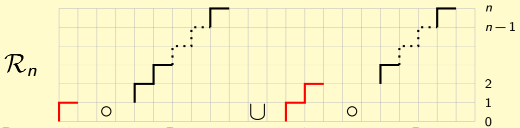
Le ranocchie Racchia e Gracchia



$$\mathcal{R}_n = 1 \circ \mathcal{R}_{n-1} \cup 2 \circ \mathcal{R}_{n-2}$$

$$R(n) = R(n-1) + R(n-2)$$

Le ranocchie Racchia e Gracchia



$$\mathcal{R}_n = 1 \circ \mathcal{R}_{n-1} \cup 2 \circ \mathcal{R}_{n-2}$$

$$R(n) = R(n-1) + R(n-2)$$

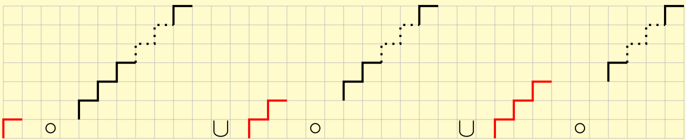
La ranocchia Racchia e Fibonacci

Il numero di modi diversi che ha la ranocchia Racchia per salire una scala di n gradini è uguale all'$(n+1)$-esimo termine della successione di Fibonacci

$$R(n) = F_{n+1}$$

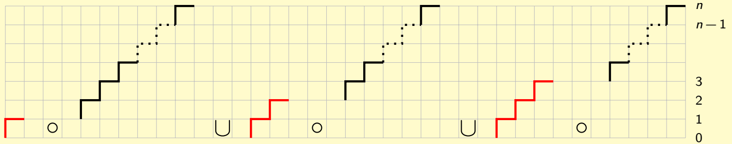
Le ranocchie Racchia e Gracchia

$\mathcal{G}_n$



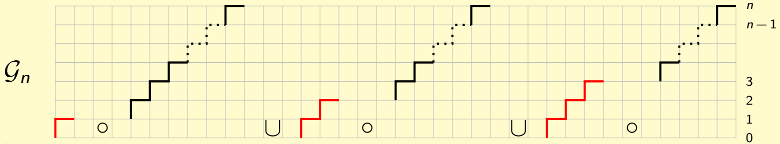
Le ranocchie Racchia e Gracchia

$\mathcal{G}_n$



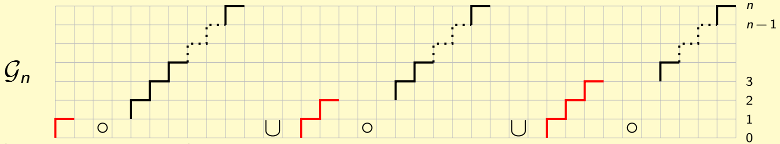
$\mathcal{G}_n =$

Le ranocchie Racchia e Gracchia



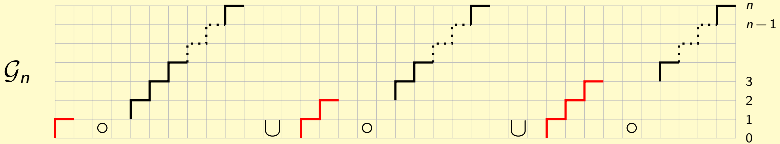
$\mathcal{G}_n = \quad 1$

Le ranocchie Racchia e Gracchia



$\mathcal{G}_n = \quad 1 \quad \circ \quad \mathcal{G}_{n-1}$

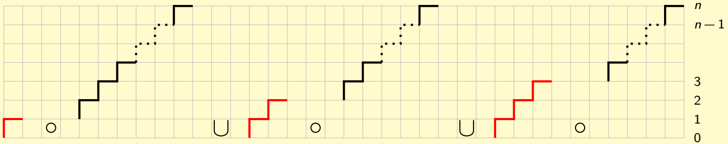
Le ranocchie Racchia e Gracchia



$\mathcal{G}_n = \quad 1 \quad \circ \quad \mathcal{G}_{n-1} \quad \cup \quad 2$

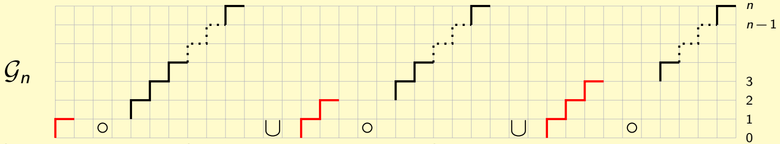
Le ranocchie Racchia e Gracchia

$\mathcal{G}_n$



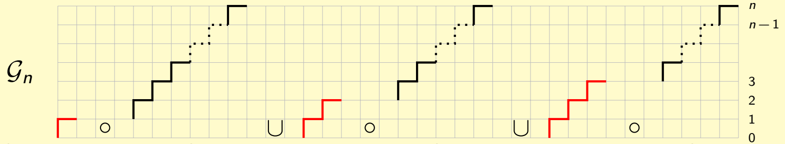
$$\mathcal{G}_n = 1 \circ \mathcal{G}_{n-1} \cup 2 \circ \mathcal{G}_{n-2}$$

Le ranocchie Racchia e Gracchia



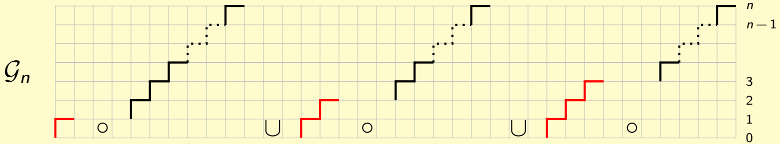
$$\mathcal{G}_n = 1 \circ \mathcal{G}_{n-1} \cup 2 \circ \mathcal{G}_{n-2} \cup 3$$

Le ranocchie Racchia e Gracchia



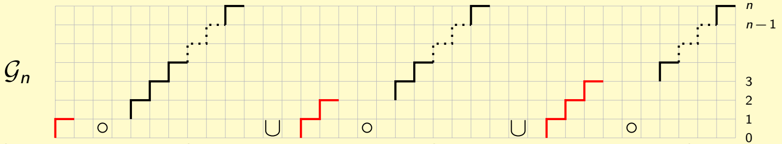
$$\mathcal{G}_n = 1 \circ \mathcal{G}_{n-1} \cup 2 \circ \mathcal{G}_{n-2} \cup 3 \circ \mathcal{G}_{n-3}$$

Le ranocchie Racchia e Gracchia



$$\mathcal{G}_n = 1 \circ \mathcal{G}_{n-1} \cup 2 \circ \mathcal{G}_{n-2} \cup 3 \circ \mathcal{G}_{n-3}$$

$$G(n) = G(n-1) + G(n-2) + G(n-3)$$



$$\mathcal{G}_n = 1 \circ \mathcal{G}_{n-1} \cup 2 \circ \mathcal{G}_{n-2} \cup 3 \circ \mathcal{G}_{n-3}$$

$$G(n) = G(n-1) + G(n-2) + G(n-3)$$

La ranocchia Gracchia e Tribonacci

Il numero di modi diversi che ha la ranocchia Gracchia per salire una scala di n gradini è uguale all'$(n+2)$-esimo termine della successione di Tribonacci

$$G(n) = T_{n+2}$$

La successione di Fibonacci

La successione di Fibonacci (definizione)

$$F_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & n > 1 \end{cases}$$

La successione di Fibonacci

La successione di Fibonacci (definizione)

$$F_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & n > 1 \end{cases}$$

I primi 20 termini della successione (OEIS A000045)

F_n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	0
	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	1

La successione di Fibonacci

La successione di Fibonacci (definizione)

$$F_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & n > 1 \end{cases}$$

I primi 20 termini della successione (OEIS A000045)

F_n

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	0
55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	1

La ranocchia Racchia (soluzione)

La ranocchia Racchia può salire una scalinata di 18 gradini in

$$R(18) = F_{19} = 4181 \text{ modi diversi}$$

La successione di Fibonacci

- relazione di ricorrenza lineare omogenea a coefficienti costanti

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

La successione di Fibonacci

- relazione di ricorrenza lineare omogenea a coefficienti costanti

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

- soluzione tramite polinomio caratteristico

$$p(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k$$

La successione di Fibonacci

- relazione di ricorrenza lineare omogenea a coefficienti costanti

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

- soluzione tramite polinomio caratteristico

$$p(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k$$

- se le radici $x_1, x_2, \ldots, x_k$ di $p(x)$ sono distinte, la soluzione è del tipo

$$a_n = b_1 x_1^n + b_2 x_2^n + \cdots + b_k x_k^n$$

La successione di Fibonacci

- relazione di ricorrenza lineare omogenea a coefficienti costanti

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

- soluzione tramite polinomio caratteristico

$$p(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k$$

- se le radici $x_1, x_2, \ldots, x_k$ di $p(x)$ sono distinte, la soluzione è del tipo

$$a_n = b_1 x_1^n + b_2 x_2^n + \cdots + b_k x_k^n$$

Nel caso della successione di Fibonacci

La successione di Fibonacci

- relazione di ricorrenza lineare omogenea a coefficienti costanti

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

- soluzione tramite polinomio caratteristico

$$p(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k$$

- se le radici $x_1, x_2, \ldots, x_k$ di $p(x)$ sono distinte, la soluzione è del tipo

$$a_n = b_1 x_1^n + b_2 x_2^n + \cdots + b_k x_k^n$$

Nel caso della successione di Fibonacci

- $k = 2, \quad c_1 = c_2 = 1$

La successione di Fibonacci

- relazione di ricorrenza lineare omogenea a coefficienti costanti

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

- soluzione tramite polinomio caratteristico

$$p(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k$$

- se le radici $x_1, x_2, \ldots, x_k$ di $p(x)$ sono distinte, la soluzione è del tipo

$$a_n = b_1 x_1^n + b_2 x_2^n + \cdots + b_k x_k^n$$

Nel caso della successione di Fibonacci

- $k = 2, \quad c_1 = c_2 = 1$
- il polinomio caratteristico è $p(x) = x^2 - x - 1$

La successione di Fibonacci

- relazione di ricorrenza lineare omogenea a coefficienti costanti

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

- soluzione tramite polinomio caratteristico

$$p(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k$$

- se le radici $x_1, x_2, \ldots, x_k$ di $p(x)$ sono distinte, la soluzione è del tipo

$$a_n = b_1 x_1^n + b_2 x_2^n + \cdots + b_k x_k^n$$

Nel caso della successione di Fibonacci

- $k = 2, \quad c_1 = c_2 = 1$
- il polinomio caratteristico è $p(x) = x^2 - x - 1$
- le sue radici sono $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

La successione di Fibonacci

- relazione di ricorrenza lineare omogenea a coefficienti costanti

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

- soluzione tramite polinomio caratteristico

$$p(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k$$

- se le radici $x_1, x_2, \ldots, x_k$ di $p(x)$ sono distinte, la soluzione è del tipo

$$a_n = b_1 x_1^n + b_2 x_2^n + \cdots + b_k x_k^n$$

Nel caso della successione di Fibonacci

- $k = 2, \quad c_1 = c_2 = 1$
- il polinomio caratteristico è $p(x) = x^2 - x - 1$
- le sue radici sono $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- la soluzione è del tipo $a_n = b_1 x_1^n + b_2 x_2^n \implies F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

La successione di Fibonacci

Definiamo il *rapporto aureo* φ

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

La successione di Fibonacci

Definiamo il *rapporto aureo* φ

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si ha

$$\varphi^2$$

La successione di Fibonacci

Definiamo il *rapporto aureo* φ

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si ha

$$\varphi^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4}$$

La successione di Fibonacci

Definiamo il *rapporto aureo* φ

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si ha

$$\varphi^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

La successione di Fibonacci

Definiamo il *rapporto aureo* φ

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si ha

$$\varphi^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \frac{\sqrt{5}+1+2}{2}$$

La successione di Fibonacci

Definiamo il *rapporto aureo* φ

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si ha

$$\varphi^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \frac{\sqrt{5}+1+2}{2} = \varphi + 1$$

La successione di Fibonacci

Definiamo il *rapporto aureo* φ

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si ha

$$\varphi^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \frac{\sqrt{5}+1+2}{2} = \varphi + 1$$

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi}$$

Definiamo il *rapporto aureo* φ

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si ha

$$\varphi^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \frac{\sqrt{5}+1+2}{2} = \varphi + 1$$

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

La successione di Fibonacci

Definiamo il *rapporto aureo* φ

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si ha

$$\varphi^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \frac{\sqrt{5}+1+2}{2} = \varphi + 1$$

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2\,(1-\sqrt{5})}{-4}$$

La successione di Fibonacci

Definiamo il *rapporto aureo* φ

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si ha

$$\varphi^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \frac{\sqrt{5}+1+2}{2} = \varphi + 1$$

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2\,(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Definiamo il *rapporto aureo* φ

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si ha

$$\varphi^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \frac{\sqrt{5}+1+2}{2} = \varphi + 1$$

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2\,(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1-2}{2}$$

La successione di Fibonacci

Definiamo il *rapporto aureo* φ

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si ha

$$\varphi^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \frac{\sqrt{5}+1+2}{2} = \varphi + 1$$

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2\,(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1-2}{2} = \varphi - 1$$

La successione di Fibonacci

Definiamo il *rapporto aureo* φ

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si ha

$$\varphi^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \frac{\sqrt{5}+1+2}{2} = \varphi + 1$$

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2\,(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1-2}{2} = \varphi - 1$$

Possiamo riscrivere la soluzione della relazione di ricorrenza di Fibonacci

La successione di Fibonacci

Definiamo il *rapporto aureo* φ

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si ha

$$\varphi^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \frac{\sqrt{5}+1+2}{2} = \varphi + 1$$

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2\,(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1-2}{2} = \varphi - 1$$

Possiamo riscrivere la soluzione della relazione di ricorrenza di Fibonacci

$$F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

La successione di Fibonacci

Definiamo il *rapporto aureo* φ

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si ha

$$\varphi^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \frac{\sqrt{5}+1+2}{2} = \varphi + 1$$

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2\,(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1-2}{2} = \varphi - 1$$

Possiamo riscrivere la soluzione della relazione di ricorrenza di Fibonacci

$$F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \implies F_n = A\,\varphi^n + B\,(1-\varphi)^n$$

La successione di Fibonacci

Utilizzando i valori $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A\,\varphi - B\,\varphi^{-1} = 1 \end{cases}$$

La successione di Fibonacci

Utilizzando i valori $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A\,\varphi - B\,\varphi^{-1} = 1 \end{cases}$$

che si risolve facilmente sostituendo $B = -A$

La successione di Fibonacci

Utilizzando i valori $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A\,\varphi - B\,\varphi^{-1} = 1 \end{cases}$$

che si risolve facilmente sostituendo $B = -A$

$A\,(\varphi + \varphi^{-1}) = 1$

La successione di Fibonacci

Utilizzando i valori $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A\,\varphi - B\,\varphi^{-1} = 1 \end{cases}$$

che si risolve facilmente sostituendo $B = -A$

$$A\,(\varphi + \varphi^{-1}) = 1 \implies A\,(2\varphi - 1) = 1$$

La successione di Fibonacci

Utilizzando i valori $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A\,\varphi - B\,\varphi^{-1} = 1 \end{cases}$$

che si risolve facilmente sostituendo $B = -A$

$$A\,(\varphi + \varphi^{-1}) = 1 \implies A\,(2\varphi - 1) = 1 \implies \sqrt{5}\,A = 1$$

La successione di Fibonacci

Utilizzando i valori $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A\,\varphi - B\,\varphi^{-1} = 1 \end{cases}$$

che si risolve facilmente sostituendo $B = -A$

$$A\,(\varphi + \varphi^{-1}) = 1 \implies A\,(2\varphi - 1) = 1 \implies \sqrt{5}\,A = 1 \implies A = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

La successione di Fibonacci

Utilizzando i valori $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A\,\varphi - B\,\varphi^{-1} = 1 \end{cases}$$

che si risolve facilmente sostituendo $B = -A$

$$A\,(\varphi + \varphi^{-1}) = 1 \implies A\,(2\varphi - 1) = 1 \implies \sqrt{5}\,A = 1 \implies A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

La successione di Fibonacci

Utilizzando i valori $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A\,\varphi - B\,\varphi^{-1} = 1 \end{cases}$$

che si risolve facilmente sostituendo $B = -A$

$$A\,(\varphi + \varphi^{-1}) = 1 \implies A\,(2\varphi - 1) = 1 \implies \sqrt{5}\,A = 1 \implies A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Forma chiusa di F_n

$$F_n = \frac{\varphi^n + \varphi^{-n}}{\sqrt{5}}$$

La successione di Fibonacci

Alcune delle principali proprietà della successione di Fibonacci

- $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi$

La successione di Fibonacci

Alcune delle principali proprietà della successione di Fibonacci

- $\lim_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi$
- due numeri di Fibonacci consecutivi, F_n e F_{n+1}, non hanno fattori comuni (sono coprimi)

La successione di Fibonacci

Alcune delle principali proprietà della successione di Fibonacci

- $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi$
- due numeri di Fibonacci consecutivi, F_n e F_{n+1}, non hanno fattori comuni (sono coprimi)
- proprietà di divisibilità: se $k \mid n$ allora $F_k \mid F_n$

La successione di Fibonacci

Alcune delle principali proprietà della successione di Fibonacci

- $\lim_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi$
- due numeri di Fibonacci consecutivi, F_n e F_{n+1}, non hanno fattori comuni (sono coprimi)
- proprietà di divisibilità: se $k \mid n$ allora $F_k \mid F_n$
- $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$

La successione di Fibonacci

Alcune delle principali proprietà della successione di Fibonacci

- $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi$
- due numeri di Fibonacci consecutivi, F_n e F_{n+1}, non hanno fattori comuni (sono coprimi)
- proprietà di divisibilità: se $k \mid n$ allora $F_k \mid F_n$
- $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$
- $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$

La successione di Fibonacci

Alcune delle principali proprietà della successione di Fibonacci

- $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi$
- due numeri di Fibonacci consecutivi, F_n e F_{n+1}, non hanno fattori comuni (sono coprimi)
- proprietà di divisibilità: se $k \mid n$ allora $F_k \mid F_n$
- $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$
- $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$
- F_n è il numero di sequenze binarie di lunghezza $n-1$ che non hanno 0 consecutivi

La successione di Fibonacci

Alcune delle principali proprietà della successione di Fibonacci

- $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi$
- due numeri di Fibonacci consecutivi, F_n e F_{n+1}, non hanno fattori comuni (sono coprimi)
- proprietà di divisibilità: se $k \mid n$ allora $F_k \mid F_n$
- $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$
- $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$
- F_n è il numero di sequenze binarie di lunghezza $n-1$ che non hanno 0 consecutivi
- F_n è il numero di sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ che non contengono interi consecutivi

La successione di Fibonacci

Alcune delle principali proprietà della successione di Fibonacci

- $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi$
- due numeri di Fibonacci consecutivi, F_n e F_{n+1}, non hanno fattori comuni (sono coprimi)
- proprietà di divisibilità: se $k \mid n$ allora $F_k \mid F_n$
- $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$
- $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$
- F_n è il numero di sequenze binarie di lunghezza $n-1$ che non hanno 0 consecutivi
- F_n è il numero di sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ che non contengono interi consecutivi
- F_n è il numero di tassellazioni di un rettangolo $2 \times n$ con rettangoli 2×1 (domino)

La successione di Fibonacci

Alcune delle principali proprietà della successione di Fibonacci

- $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi$
- due numeri di Fibonacci consecutivi, F_n e F_{n+1}, non hanno fattori comuni (sono coprimi)
- proprietà di divisibilità: se $k \mid n$ allora $F_k \mid F_n$
- $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$
- $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$
- F_n è il numero di sequenze binarie di lunghezza $n-1$ che non hanno 0 consecutivi
- F_n è il numero di sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ che non contengono interi consecutivi
- F_n è il numero di tassellazioni di un rettangolo $2 \times n$ con rettangoli 2×1 (domino)
- ad oggi si conoscono 51 numeri di Fibonacci primi, l'ultimo è stato scoperto nel 2018 ed è $F_{3340367}$ (698096 cifre); non si sa se sono finiti o infiniti

La successione di Tribonacci (definizione)

$$T_n = \begin{cases} 0 & n = 0, 1 \\ 1 & n = 2 \\ T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} & n > 2 \end{cases}$$

La successione di Tribonacci

La successione di Tribonacci (definizione)

$$T_n = \begin{cases} 0 & n = 0, 1 \\ 1 & n = 2 \\ T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} & n > 2 \end{cases}$$

I primi 20 termini della successione (OEIS A000073)

T_n

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	1	1	2	4	7	13	24	44
1	81	149	274	504	927	1705	3136	5768	10609	19513

La successione di Tribonacci

La successione di Tribonacci (definizione)

$$T_n = \begin{cases} 0 & n = 0, 1 \\ 1 & n = 2 \\ T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} & n > 2 \end{cases}$$

I primi 20 termini della successione (OEIS A000073)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
T_n	0	0	1	1	2	4	7	13	24	44	0
	81	149	274	504	927	1705	3136	5768	10609	19513	1

La ranocchia Gracchia (soluzione)

La ranocchia Racchia può salire una scalinata di 18 gradini in

$$G(18) = T_{20} = 35890 \text{ modi diversi}$$

La successione di Tribonacci

Forma chiusa di T_n

$$T(n) = \left[3\,\frac{(586+102\sqrt{33})^{1/3}\,\{\frac{1}{3}\,(19+3\sqrt{33})^{1/3}+\frac{1}{3}\,(19-3\sqrt{33})^{1/3}+\frac{1}{3}\}^{n}}{(586+102\sqrt{33})^{2/3}-2\,(586+102\sqrt{33})^{1/3}+4} \right]$$

Indice

Caccia ai fantasmi

N cacciatori sono a caccia di N fantasmi. Ogni cacciatore è dotato di un laser in grado di eliminare un fantasma con l'emissione di un raggio che si propaga in linea retta. I percorsi seguiti dai raggi laser, emessi contemporaneamente, non possono mai intersecarsi.

Finale nazionale di Giochi Matematici (Milano, 10 maggio 2014)

Caccia ai fantasmi

N cacciatori sono a caccia di N fantasmi. Ogni cacciatore è dotato di un laser in grado di eliminare un fantasma con l'emissione di un raggio che si propaga in linea retta. I percorsi seguiti dai raggi laser, emessi contemporaneamente, non possono mai intersecarsi.

Cacciatori e fantasmi sono collocati in $2N$ punti equidistanti su una circonferenza. Per $N = 1, 2, 3, 4, 5$ il numero di strategie vincenti per eliminare tutti i fantasmi è rispettivamente $1, 2, 5, 14, 42$.

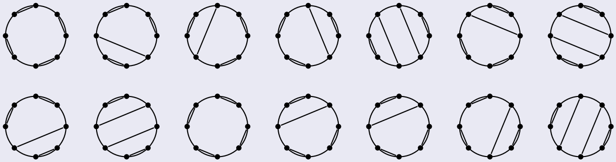
Finale nazionale di Giochi Matematici (Milano, 10 maggio 2014)

Caccia ai fantasmi

N cacciatori sono a caccia di N fantasmi. Ogni cacciatore è dotato di un laser in grado di eliminare un fantasma con l'emissione di un raggio che si propaga in linea retta. I percorsi seguiti dai raggi laser, emessi contemporaneamente, non possono mai intersecarsi.

Cacciatori e fantasmi sono collocati in $2N$ punti equidistanti su una circonferenza. Per $N = 1, 2, 3, 4, 5$ il numero di strategie vincenti per eliminare tutti i fantasmi è rispettivamente $1, 2, 5, 14, 42$.

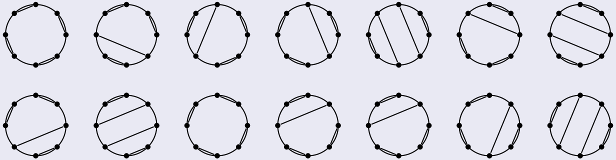
Seguono le 14 strategie per $N = 4$:



Finale nazionale di Giochi Matematici (Milano, 10 maggio 2014)

Caccia ai fantasmi

N cacciatori sono a caccia di N fantasmi. Ogni cacciatore è dotato di un laser in grado di eliminare un fantasma con l'emissione di un raggio che si propaga in linea retta. I percorsi seguiti dai raggi laser, emessi contemporaneamente, non possono mai intersecarsi.
Cacciatori e fantasmi sono collocati in $2N$ punti equidistanti su una circonferenza.
Per $N = 1, 2, 3, 4, 5$ il numero di strategie vincenti per eliminare tutti i fantasmi è rispettivamente $1, 2, 5, 14, 42$.
Seguono le 14 strategie per $N = 4$:

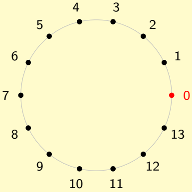


Quante sono le strategie vincenti per $N = 7$?

Finale nazionale di Giochi Matematici (Milano, 10 maggio 2014)

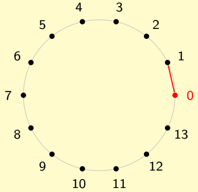
Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?



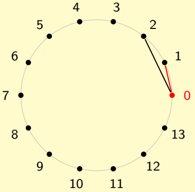
Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?



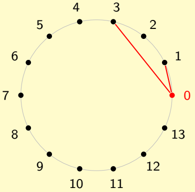
Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?



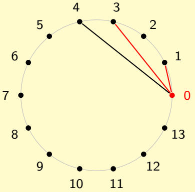
Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?



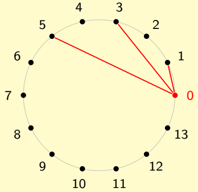
Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?



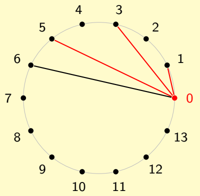
Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?



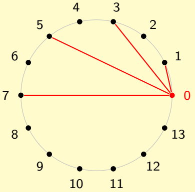
Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?



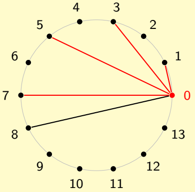
Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?



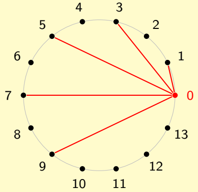
Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?



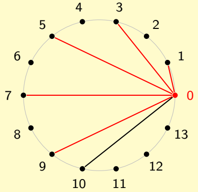
Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?



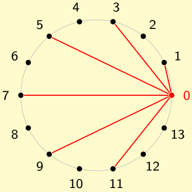
Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?



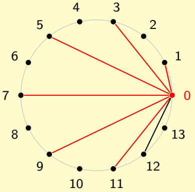
Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?



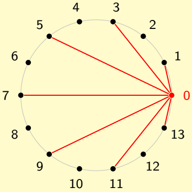
Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?



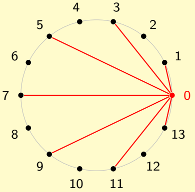
Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?



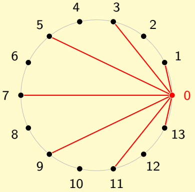
Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?

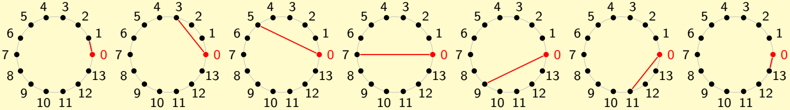


Sia $G(n)$ il numero di strategie vincenti con n cacciatori e n fantasmi ($2n$ punti).

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?

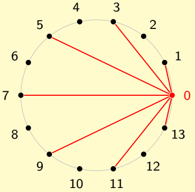


Sia $G(n)$ il numero di strategie vincenti con n cacciatori e n fantasmi ($2n$ punti).

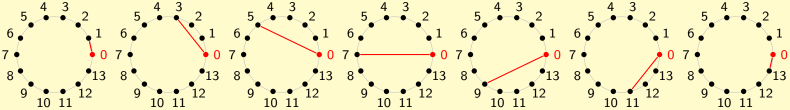


Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?



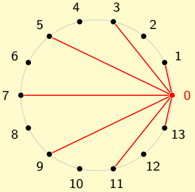
Sia $G(n)$ il numero di strategie vincenti con n cacciatori e n fantasmi ($2n$ punti).



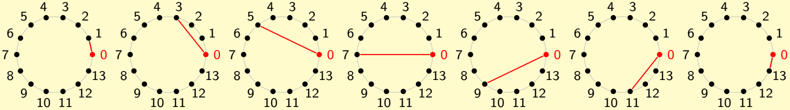
$G(6)$

Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?

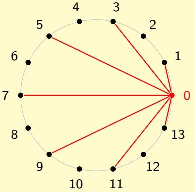


Sia $G(n)$ il numero di strategie vincenti con n cacciatori e n fantasmi ($2n$ punti).

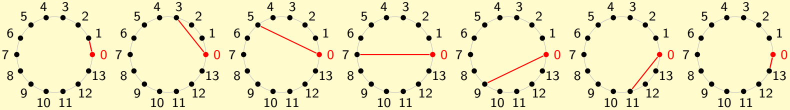


$G(6)$ $\quad$ $G(1)G(5)$

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?



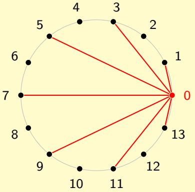
Sia $G(n)$ il numero di strategie vincenti con n cacciatori e n fantasmi ($2n$ punti).



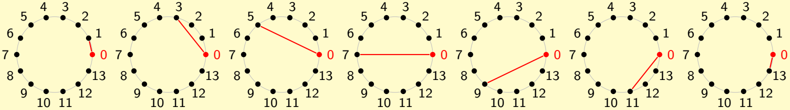
$G(6)$ $G(1)G(5)$ $G(2)G(4)$

Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?



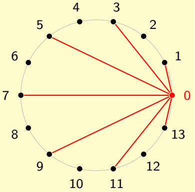
Sia $G(n)$ il numero di strategie vincenti con n cacciatori e n fantasmi ($2n$ punti).



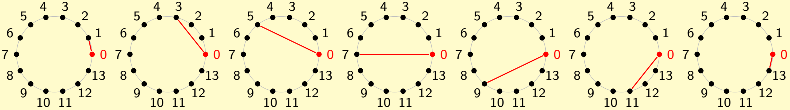
$G(6)$ $G(1)G(5)$ $G(2)G(4)$ $G(3)G(3)$

Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?



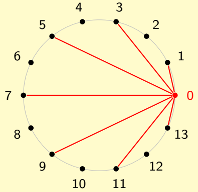
Sia $G(n)$ il numero di strategie vincenti con n cacciatori e n fantasmi ($2n$ punti).



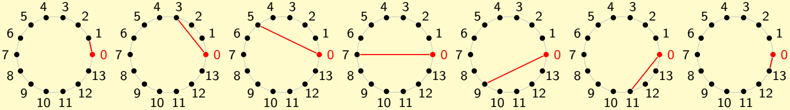
$G(6)$ $G(1)G(5)$ $G(2)G(4)$ $G(3)G(3)$ $G(4)G(2)$

Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?



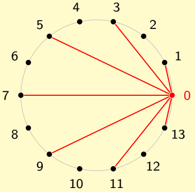
Sia $G(n)$ il numero di strategie vincenti con n cacciatori e n fantasmi ($2n$ punti).



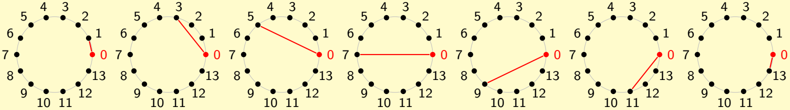
$G(6)$ $\quad G(1)G(5)$ $\quad G(2)G(4)$ $\quad G(3)G(3)$ $\quad G(4)G(2)$ $\quad G(5)G(1)$

Caccia ai fantasmi

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?

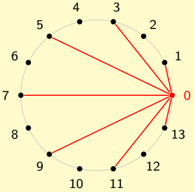


Sia $G(n)$ il numero di strategie vincenti con n cacciatori e n fantasmi ($2n$ punti).

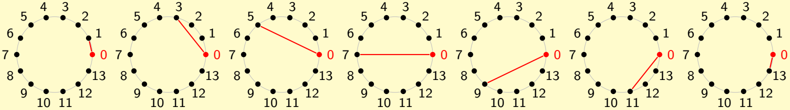


$G(6)$ $\quad$ $G(1)G(5)$ $\quad$ $G(2)G(4)$ $\quad$ $G(3)G(3)$ $\quad$ $G(4)G(2)$ $\quad$ $G(5)G(1)$ $\quad$ $G(6)$

Orientiamo il cerchio. Quali sono le possibili corde passanti per il punto 0?



Sia $G(n)$ il numero di strategie vincenti con n cacciatori e n fantasmi ($2n$ punti).



$$G(7) = G(6) + G(1)G(5) + G(2)G(4) + G(3)G(3) + G(4)G(2) + G(5)G(1) + G(6)$$

Caccia ai fantasmi

Cacciatori, fantasmi e Catalan

Il numero di strategie vincenti che n cacciatori hanno a disposizione per eliminare n fantasmi è uguale all'n-esimo numero di Catalan

$$G(n) = C_n$$

I numeri di Catalan

I numeri di Catalan (definizione)

$$C_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C_k \, C_{n-k-1} & n > 1 \end{cases}$$

I numeri di Catalan

I numeri di Catalan (definizione)

$$
\begin{aligned}
C_n &= \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C_k \, C_{n-k-1} & n > 1 \end{cases} \\
&= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}
\end{aligned}
$$

I numeri di Catalan

I numeri di Catalan (definizione)

$$
\begin{aligned}
C_n &= \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C_k \, C_{n-k-1} & n > 1 \end{cases} \\
&= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \\
&= \frac{(2n)!}{n! \, (n+1)!}
\end{aligned}
$$

I numeri di Catalan

I primi 20 termini (OEIS A000108)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	0
	16796	58786	208012	742900	2674440	9694845	35357670	129644790	477638700	1767263190	1

I numeri di Catalan

I primi 20 termini (OEIS A000108)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	0
	16796	58786	208012	742900	2674440	9694845	35357670	129644790	477638700	1767263190	1

Caccia ai fantasmi (soluzione)

I 7 cacciatori, per eliminare i 7 fantasmi, hanno a disposizione

$$G(7) = C_7 = 429 \text{ strategie vincenti}$$

I numeri di Catalan

Alcune delle principali proprietà dei numeri di Catalan

- $\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{C_{n-1}} = 4$

I numeri di Catalan

Alcune delle principali proprietà dei numeri di Catalan

- $\lim_{n \to \infty} \frac{C_n}{C_{n-1}} = 4$
- $C_n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n^3}}$

I numeri di Catalan

Alcune delle principali proprietà dei numeri di Catalan

- $\lim_{n \to \infty} \frac{C_n}{C_{n-1}} = 4$
- $C_n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n^3}}$
- C_n è il numero di triangolarizzazioni di un poligono convesso di $n + 2$ lati

I numeri di Catalan

Alcune delle principali proprietà dei numeri di Catalan

- $\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{C_{n-1}} = 4$
- $C_n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n^3}}$
- C_n è il numero di triangolarizzazioni di un poligono convesso di $n+2$ lati
- C_n è il numero di espressioni sintatticamente corrette contenenti n coppie di parentesi

I numeri di Catalan

Alcune delle principali proprietà dei numeri di Catalan

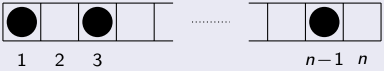
- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{C_n}{C_{n-1}} = 4$
- $C_n \sim \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n^3}}$
- C_n è il numero di triangolarizzazioni di un poligono convesso di $n+2$ lati
- C_n è il numero di espressioni sintatticamente corrette contenenti n coppie di parentesi
- C_n è il numero di modi in cui è possibile inserire n coppie di parentesi in un prodotto di $n+1$ fattori

Indice

I tre gettoni

I tre gettoni

Devis ha a disposizione tre gettoni identici. Vuole disporli su una fila di caselle allineate e numerate da 1 a n ($5 \leq n \leq 2019$), uno per casella, in modo che non ci siano mai due gettoni in due caselle adiacenti.

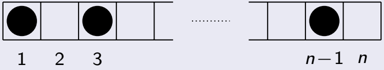


Finale internazionale di Giochi Matematici (Parigi, 25 agosto 2016)

I tre gettoni

I tre gettoni

Devis ha a disposizione tre gettoni identici. Vuole disporli su una fila di caselle allineate e numerate da 1 a n ($5 \leq n \leq 2019$), uno per casella, in modo che non ci siano mai due gettoni in due caselle adiacenti.



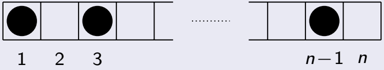
In una fila di 7 caselle questo si può fare in 10 modi diversi.

Finale internazionale di Giochi Matematici (Parigi, 25 agosto 2016)

I tre gettoni

I tre gettoni

Devis ha a disposizione tre gettoni identici. Vuole disporli su una fila di caselle allineate e numerate da 1 a n $(5 \leq n \leq 2019)$, uno per casella, in modo che non ci siano mai due gettoni in due caselle adiacenti.



In una fila di 7 caselle questo si può fare in 10 modi diversi.

Quante caselle devono esserci affinché il numero di modi in cui Devis può disporre i gettoni sia multiplo di 2019?

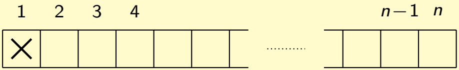
Finale internazionale di Giochi Matematici (Parigi, 25 agosto 2016)

I tre gettoni

Sia $G(n)$ la formula generale per una griglia $1 \times n$ con $n \geq 5$.

I tre gettoni

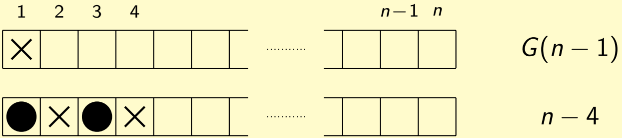
Sia $G(n)$ la formula generale per una griglia $1 \times n$ con $n \geq 5$.



$G(n-1)$

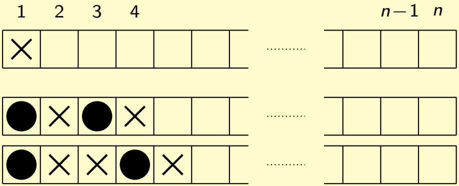
I tre gettoni

Sia $G(n)$ la formula generale per una griglia $1 \times n$ con $n \geq 5$.



I tre gettoni

Sia $G(n)$ la formula generale per una griglia $1 \times n$ con $n \geq 5$.



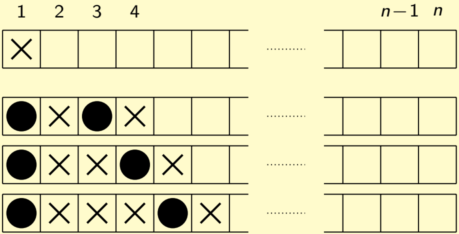
$G(n-1)$

$n-4$

$n-5$

I tre gettoni

Sia $G(n)$ la formula generale per una griglia $1 \times n$ con $n \geq 5$.



$G(n-1)$

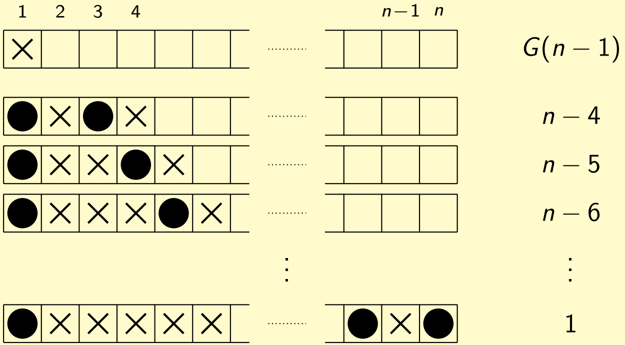
$n-4$

$n-5$

$n-6$

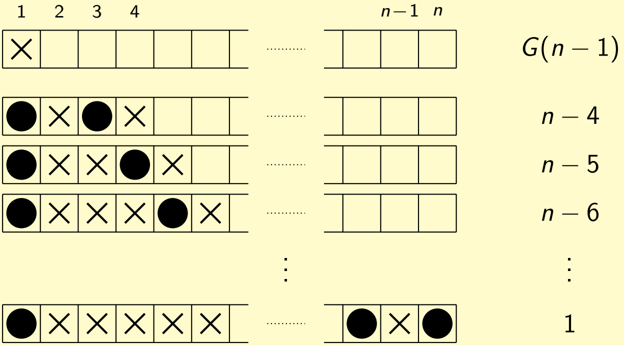
I tre gettoni

Sia $G(n)$ la formula generale per una griglia $1 \times n$ con $n \geq 5$.



I tre gettoni

Sia $G(n)$ la formula generale per una griglia $1 \times n$ con $n \geq 5$.



$$G(n) = G(n-1) + \frac{(n-4)(n-3)}{2}$$

I tre gettoni

La soluzione della relazione di ricorrenza è

I tre gettoni

La soluzione della relazione di ricorrenza è

$$G(n) = \sum_{k=5}^{n} \frac{(k-4)(k-3)}{2}$$

I tre gettoni

La soluzione della relazione di ricorrenza è

$$G(n) = \sum_{k=5}^{n} \frac{(k-4)(k-3)}{2} = \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6}$$

I tre gettoni

La soluzione della relazione di ricorrenza è

$$G(n) = \sum_{k=5}^{n} \frac{(k-4)(k-3)}{2} = \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6}$$

Verifica per sostituzione

$$\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6}$$

I tre gettoni

La soluzione della relazione di ricorrenza è

$$G(n) = \sum_{k=5}^{n} \frac{(k-4)(k-3)}{2} = \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6}$$

Verifica per sostituzione

$$\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6} = \frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{6}$$

I tre gettoni

La soluzione della relazione di ricorrenza è

$$G(n) = \sum_{k=5}^{n} \frac{(k-4)(k-3)}{2} = \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6}$$

Verifica per sostituzione

$$\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6} = \frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{6} + \frac{(n-4)(n-3)}{2}$$

I tre gettoni

La soluzione della relazione di ricorrenza è

$$G(n) = \sum_{k=5}^{n} \frac{(k-4)(k-3)}{2} = \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6}$$

Verifica per sostituzione

$$\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6} = \frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{6} + \frac{(n-4)(n-3)}{2}$$

$$n-2$$

I tre gettoni

La soluzione della relazione di ricorrenza è

$$G(n) = \sum_{k=5}^{n} \frac{(k-4)(k-3)}{2} = \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6}$$

Verifica per sostituzione

$$\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6} = \frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{6} + \frac{(n-4)(n-3)}{2}$$

$$n-2 = n-5$$

I tre gettoni

La soluzione della relazione di ricorrenza è

$$G(n) = \sum_{k=5}^{n} \frac{(k-4)(k-3)}{2} = \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6}$$

Verifica per sostituzione

$$\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6} = \frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{6} + \frac{(n-4)(n-3)}{2}$$
$$n-2 = n-5+3$$

I tre gettoni

$2019 \mid G(n)$

I tre gettoni

$$2019 \mid G(n) \implies \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6} = 3 \cdot 673 \cdot k$$

I tre gettoni

$$2019 \mid G(n) \implies \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6} = 3 \cdot 673 \cdot k$$
$$\implies (n-4)(n-3)(n-2) = 2 \cdot 3^2 \cdot 673 \cdot k$$

I tre gettoni

$$2019 \mid G(n) \implies \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6} = 3 \cdot 673 \cdot k$$
$$\implies (n-4)(n-3)(n-2) = 2 \cdot 3^2 \cdot 673 \cdot k$$

- $673 \mid n-4$

I tre gettoni

$$2019 \mid G(n) \implies \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6} = 3 \cdot 673 \cdot k$$
$$\implies (n-4)(n-3)(n-2) = 2 \cdot 3^2 \cdot 673 \cdot k$$

- $673 \mid n-4$

- $673 \mid n-3$

I tre gettoni

$$2019 \mid G(n) \implies \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6} = 3 \cdot 673 \cdot k$$
$$\implies (n-4)(n-3)(n-2) = 2 \cdot 3^2 \cdot 673 \cdot k$$

- $673 \mid n-4$

- $673 \mid n-3$

- $673 \mid n-2$

I tre gettoni

$$2019 \mid G(n) \implies \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6} = 3 \cdot 673 \cdot k$$
$$\implies (n-4)(n-3)(n-2) = 2 \cdot 3^2 \cdot 673 \cdot k$$

- $673 \mid n-4$
  - $n = 677 \implies 673 \cdot 674 \cdot 675 = 2 \cdot 9 \cdot 673 \cdot k$ ✓
- $673 \mid n-3$
- $673 \mid n-2$

I tre gettoni

$$2019 \mid G(n) \implies \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6} = 3 \cdot 673 \cdot k$$
$$\implies (n-4)(n-3)(n-2) = 2 \cdot 3^2 \cdot 673 \cdot k$$

- $673 \mid n-4$
  - $n = 677 \implies 673 \cdot 674 \cdot 675 = 2 \cdot 9 \cdot 673 \cdot k$ ✓
  - $n = 2 \cdot 673 + 4 = 1350 \implies 9 \mid n \implies 9 \nmid (n-4)(n-3)(n-2)$ ✗
- $673 \mid n-3$
- $673 \mid n-2$

I tre gettoni

$$2019 \mid G(n) \implies \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6} = 3 \cdot 673 \cdot k$$
$$\implies (n-4)(n-3)(n-2) = 2 \cdot 3^2 \cdot 673 \cdot k$$

- $673 \mid n-4$
  - $n = 677 \implies 673 \cdot 674 \cdot 675 = 2 \cdot 9 \cdot 673 \cdot k$ ✓
  - $n = 2 \cdot 673 + 4 = 1350 \implies 9 \mid n \implies 9 \nmid (n-4)(n-3)(n-2)$ ✗
  - $n = 3 \cdot 673 + 4 = 2023 > 2019$ ✗
- $673 \mid n-3$
- $673 \mid n-2$

I tre gettoni

$$2019 \mid G(n) \implies \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6} = 3 \cdot 673 \cdot k$$
$$\implies (n-4)(n-3)(n-2) = 2 \cdot 3^2 \cdot 673 \cdot k$$

- $673 \mid n-4$
  - $n = 677 \implies 673 \cdot 674 \cdot 675 = 2 \cdot 9 \cdot 673 \cdot k$ ✓
  - $n = 2 \cdot 673 + 4 = 1350 \implies 9 \mid n \implies 9 \nmid (n-4)(n-3)(n-2)$ ✗
  - $n = 3 \cdot 673 + 4 = 2023 > 2019$ ✗
- $673 \mid n-3$
  - $n = 676 \implies 9 \nmid 672 \cdot 673 \cdot 674$ ✗
- $673 \mid n-2$

I tre gettoni

$$2019 \mid G(n) \implies \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6} = 3 \cdot 673 \cdot k$$
$$\implies (n-4)(n-3)(n-2) = 2 \cdot 3^2 \cdot 673 \cdot k$$

- $673 \mid n-4$
  - $n = 677 \implies 673 \cdot 674 \cdot 675 = 2 \cdot 9 \cdot 673 \cdot k$ ✓
  - $n = 2 \cdot 673 + 4 = 1350 \implies 9 \mid n \implies 9 \nmid (n-4)(n-3)(n-2)$ ✗
  - $n = 3 \cdot 673 + 4 = 2023 > 2019$ ✗
- $673 \mid n-3$
  - $n = 676 \implies 9 \nmid 672 \cdot 673 \cdot 674$ ✗
  - $n = 2 \cdot 673 + 3 = 1349 \implies 9 \nmid 1345 \cdot 1346 \cdot 1347$ ✗
- $673 \mid n-2$

I tre gettoni

$$2019 \mid G(n) \implies \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6} = 3 \cdot 673 \cdot k$$
$$\implies (n-4)(n-3)(n-2) = 2 \cdot 3^2 \cdot 673 \cdot k$$

- $673 \mid n-4$
  - $n = 677 \implies 673 \cdot 674 \cdot 675 = 2 \cdot 9 \cdot 673 \cdot k$ ✓
  - $n = 2 \cdot 673 + 4 = 1350 \implies 9 \mid n \implies 9 \nmid (n-4)(n-3)(n-2)$ ✗
  - $n = 3 \cdot 673 + 4 = 2023 > 2019$ ✗
- $673 \mid n-3$
  - $n = 676 \implies 9 \nmid 672 \cdot 673 \cdot 674$ ✗
  - $n = 2 \cdot 673 + 3 = 1349 \implies 9 \nmid 1345 \cdot 1346 \cdot 1347$ ✗
- $673 \mid n-2$
  - $n = 675 \implies 9 \mid n \implies 9 \nmid (n-4)(n-3)(n-2)$ ✗

I tre gettoni

$$2019 \mid G(n) \implies \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6} = 3 \cdot 673 \cdot k$$
$$\implies (n-4)(n-3)(n-2) = 2 \cdot 3^2 \cdot 673 \cdot k$$

- $673 \mid n-4$
  - $n = 677 \implies 673 \cdot 674 \cdot 675 = 2 \cdot 9 \cdot 673 \cdot k$ ✓
  - $n = 2 \cdot 673 + 4 = 1350 \implies 9 \mid n \implies 9 \nmid (n-4)(n-3)(n-2)$ ✗
  - $n = 3 \cdot 673 + 4 = 2023 > 2019$ ✗
- $673 \mid n-3$
  - $n = 676 \implies 9 \nmid 672 \cdot 673 \cdot 674$ ✗
  - $n = 2 \cdot 673 + 3 = 1349 \implies 9 \nmid 1345 \cdot 1346 \cdot 1347$ ✗
- $673 \mid n-2$
  - $n = 675 \implies 9 \mid n \implies 9 \nmid (n-4)(n-3)(n-2)$ ✗
  - $n = 2 \cdot 673 + 2 = 1348 \implies 9 \nmid 1344 \cdot 1345 \cdot 1346$ ✗

I tre gettoni

$$2019 \mid G(n) \implies \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{6} = 3 \cdot 673 \cdot k$$
$$\implies (n-4)(n-3)(n-2) = 2 \cdot 3^2 \cdot 673 \cdot k$$

- $673 \mid n-4$
  - $n = 677 \implies 673 \cdot 674 \cdot 675 = 2 \cdot 9 \cdot 673 \cdot k$ ✓
  - $n = 2 \cdot 673 + 4 = 1350 \implies 9 \mid n \implies 9 \nmid (n-4)(n-3)(n-2)$ ✗
  - $n = 3 \cdot 673 + 4 = 2023 > 2019$ ✗
- $673 \mid n-3$
  - $n = 676 \implies 9 \nmid 672 \cdot 673 \cdot 674$ ✗
  - $n = 2 \cdot 673 + 3 = 1349 \implies 9 \nmid 1345 \cdot 1346 \cdot 1347$ ✗
- $673 \mid n-2$
  - $n = 675 \implies 9 \mid n \implies 9 \nmid (n-4)(n-3)(n-2)$ ✗
  - $n = 2 \cdot 673 + 2 = 1348 \implies 9 \nmid 1344 \cdot 1345 \cdot 1346$ ✗

I tre gettoni (soluzione)

$n = 677 \qquad G(677) = 51\,030\,225$

Indice

Vero o falso?

Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false?

vero o falso

1. $1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}$
2. all'interno di un gruppo di n persone, è impossibile che ognuno conosca un numero diverso di persone
3. è più frequente che Natale cada di domenica che di sabato
4. è più probabile che una sorella abbia un fratello che una sorella
5. il 30 febbraio 1712 in Svezia fu una giornata piuttosto fredda
6. in 400 anni ci sono 97 anni bisestili
7. in quest'aula, la probabilità che ci siano due persone che festeggiano il compleanno lo stesso giorno è maggiore del 50%
8. le due lancette di un orologio si sovrappongono meno di 24 volte al giorno
9. non esistono due quadrati di numeri interi, uno il doppio dell'altro
10. esattamente uno di questi enunciati è falso

La somma infinita

La somma infinita

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots = ?$$

La somma infinita

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots = ?$$

definizioni

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

La somma infinita

La somma infinita

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots = ?$$

definizioni

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$
$$S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots$$

La somma infinita

La somma infinita

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots = \,?$$

definizioni

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ S_2 &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots \\ S &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots \end{aligned}$$

La somma infinita

Calcoliamo S_1

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

La somma infinita

Calcoliamo S_1

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots)$$

La somma infinita

Calcoliamo S_1

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots) = 1 - S_1$$

La somma infinita

Calcoliamo S_1

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - S_1$$

e dunque

$$2S_1 = 1$$

La somma infinita

Calcoliamo S_1

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - S_1$$

e dunque

$$2S_1 = 1 \implies S_1 = \frac{1}{2}$$

La somma infinita

Calcoliamo S_1

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - S_1$$

e dunque

$$2S_1 = 1 \implies S_1 = \frac{1}{2}$$

Per calcolare S_2, sommiamo

$$S_2 : \qquad 1 \ - \ 2 \ + \ 3 \ - \ 4 \ + \ 5 \ - \cdots \qquad +$$

La somma infinita

Calcoliamo S_1

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - S_1$$

e dunque

$$2S_1 = 1 \implies S_1 = \frac{1}{2}$$

Per calcolare S_2, sommiamo

$$\begin{array}{lccccccccccccc} S_2 : & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & 5 & - & \cdots & & + \\ S_2 : & & & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & \cdots & & = \\ \hline \end{array}$$

La somma infinita

Calcoliamo S_1

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - S_1$$

e dunque

$$2S_1 = 1 \implies S_1 = \frac{1}{2}$$

Per calcolare S_2, sommiamo

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
S_2: & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & 5 & - & \cdots & & & + \\
S_2: & & & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & \cdots & & & = \\
\hline
2S_2: & 1 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & + & 1 & - & \cdots & & &
\end{array}$$

La somma infinita

Calcoliamo S_1

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - S_1$$

e dunque

$$2S_1 = 1 \implies S_1 = \frac{1}{2}$$

Per calcolare S_2, sommiamo

$$\begin{array}{rccccccccccccc}
S_2: & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & 5 & - & \cdots & & + \\
S_2: & & & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & \cdots & & = \\
\hline
2S_2: & 1 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & + & 1 & - & \cdots & &
\end{array}$$

ottenendo

$$2S_2 = S_1$$

La somma infinita

Calcoliamo S_1

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - S_1$$

e dunque

$$2S_1 = 1 \implies S_1 = \frac{1}{2}$$

Per calcolare S_2, sommiamo

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
S_2: & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & 5 & - & \cdots & + \\
S_2: & & & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & \cdots & = \\
\hline
2S_2: & 1 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & + & 1 & - & \cdots &
\end{array}$$

ottenendo

$$2S_2 = S_1 \implies 2S_2 = \frac{1}{2}$$

La somma infinita

Calcoliamo S_1

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - S_1$$

e dunque

$$2S_1 = 1 \implies S_1 = \frac{1}{2}$$

Per calcolare S_2, sommiamo

$$\begin{array}{rccccccccccccc}
S_2: & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & 5 & - & \cdots & & + \\
S_2: & & & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & \cdots & & = \\
\hline
2S_2: & 1 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & + & 1 & - & \cdots & &
\end{array}$$

ottenendo

$$2S_2 = S_1 \implies 2S_2 = \frac{1}{2} \implies S_2 = \frac{1}{4}$$

La somma infinita

Per calcolare S, sottraiamo

$$S: \quad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots \quad -$$

La somma infinita

Per calcolare S, sottraiamo

$$\begin{array}{rcccccccccccccl} S: & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & + & \cdots & - \\ S_2: & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & 5 & - & 6 & + & \cdots & = \\ \hline \end{array}$$

La somma infinita

Per calcolare S, sottraiamo

$$
\begin{array}{rcccccccccccccl}
S: & & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & + \cdots & - \\
S_2: & & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & 5 & - & 6 & + \cdots & = \\
\hline
S - S_2: & & & & 4 & & & + & 8 & & & + & 12 & \cdots &
\end{array}
$$

La somma infinita

Per calcolare S, sottraiamo

$$\begin{array}{rccccccccccccccc} S: & & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & + \cdots & & - \\ S_2: & & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & 5 & - & 6 & + \cdots & & = \\ \hline S - S_2: & & & & 4 & & & + & 8 & & & + & 12 & \cdots & & \end{array}$$

ottenendo

$$S - S_2 = 4\,S$$

La somma infinita

Per calcolare S, sottraiamo

$$\begin{array}{rccccccccccccc} S: & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & + \cdots & - \\ S_2: & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & 5 & - & 6 & + \cdots & = \\ \hline S - S_2: & & & 4 & & & + & 8 & & & + & 12 & \cdots & \end{array}$$

ottenendo

$$S - S_2 = 4\,S \implies S - \frac{1}{4} = 4S$$

La somma infinita

Per calcolare S, sottraiamo

$$\begin{array}{rccccccccccccccc}
S: & & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & + \cdots & & - \\
S_2: & & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & 5 & - & 6 & + \cdots & & = \\
\hline
S - S_2: & & & & 4 & & & + & 8 & & & + & 12 & \cdots & &
\end{array}$$

ottenendo

$$S - S_2 = 4\,S \implies S - \frac{1}{4} = 4S \implies 3S = -\frac{1}{4}$$

La somma infinita

Per calcolare S, sottraiamo

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} S: & & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & + \cdots & - \\ S_2: & & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & 5 & - & 6 & + \cdots & = \\ \hline S - S_2: & & & & 4 & & & + & 8 & & & + & 12 & \cdots & \end{array}$$

ottenendo

$$S - S_2 = 4\,S \implies S - \frac{1}{4} = 4S \implies 3S = -\frac{1}{4}$$

la somma infinita ... mente sorprendente

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

Amici e non

- gruppo di n persone: $1, 2, \ldots, n$

Amici e non

- gruppo di n persone: $1, 2, \ldots, n$
- ognuna può conoscerne:

Amici e non

- gruppo di n persone: $1, 2, \ldots, n$
- ognuna può conoscerne:
  - 0: non conosce nessuno

Amici e non

- gruppo di n persone: $1, 2, \ldots, n$
- ognuna può conoscerne:
  - 0: non conosce nessuno
  - 1: conosce solo una persona

Amici e non

- gruppo di n persone: $1, 2, \ldots, n$
- ognuna può conoscerne:
    - 0: non conosce nessuno
    - 1: conosce solo una persona
    - 2: conosce due persone

Amici e non

- gruppo di n persone: $1, 2, \ldots, n$
- ognuna può conoscerne:
  - 0: non conosce nessuno
  - 1: conosce solo una persona
  - 2: conosce due persone
  - ...

Amici e non

- gruppo di n persone: $1, 2, \ldots, n$
- ognuna può conoscerne:
  - 0: non conosce nessuno
  - 1: conosce solo una persona
  - 2: conosce due persone
  - ...
  - $n - 2$: conosce tutti eccetto uno

Amici e non

- gruppo di n persone: $1, 2, \dots, n$
- ognuna può conoscerne:
  - 0: non conosce nessuno
  - 1: conosce solo una persona
  - 2: conosce due persone
  - ...
  - $n-2$: conosce tutti eccetto uno
  - $n-1$: conosce tutti

Amici e non

- gruppo di n persone: $1, 2, \ldots, n$
- ognuna può conoscerne:
  - 0: non conosce nessuno
  - 1: conosce solo una persona
  - 2: conosce due persone
  - $\ldots$
  - $n-2$: conosce tutti eccetto uno
  - $n-1$: conosce tutti
- n valori possibili: $0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1$

Amici e non

- gruppo di n persone: $1, 2, \ldots, n$
- ognuna può conoscerne:
  - 0: non conosce nessuno
  - 1: conosce solo una persona
  - 2: conosce due persone
  - $\ldots$
  - $n-2$: conosce tutti eccetto uno
  - $n-1$: conosce tutti
- n valori possibili: $0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1$
- è possibile associare ad ogni persona un valore di conoscenza diverso?

Gli anni bisestili e il Natale

anni bisestili

Sono bisestili gli anni divisibili per 4

Gli anni bisestili e il Natale

anni bisestili

Sono bisestili gli anni divisibili per 4, eccetto i secolari non divisibili per 400.

Gli anni bisestili e il Natale

anni bisestili

Sono bisestili gli anni divisibili per 4, eccetto i secolari non divisibili per 400.

- quest'anno (2019) non è bisestile:

Gli anni bisestili e il Natale

anni bisestili

Sono bisestili gli anni divisibili per 4, eccetto i secolari non divisibili per 400.

- quest'anno (2019) non è bisestile: $4 \nmid 2019$

Gli anni bisestili e il Natale

anni bisestili

Sono bisestili gli anni divisibili per 4, eccetto i secolari non divisibili per 400.

- quest'anno (2019) non è bisestile: $4 \nmid 2019$
- l'anno prossimo (2020) sarà bisestile:

Gli anni bisestili e il Natale

anni bisestili

Sono bisestili gli anni divisibili per 4, eccetto i secolari non divisibili per 400.

- quest'anno (2019) non è bisestile: $4 \nmid 2019$
- l'anno prossimo (2020) sarà bisestile: $4 \mid 2020$

Gli anni bisestili e il Natale

anni bisestili

Sono bisestili gli anni divisibili per 4, eccetto i secolari non divisibili per 400.

- quest'anno (2019) non è bisestile: $4 \nmid 2019$
- l'anno prossimo (2020) sarà bisestile: $4 \mid 2020$
- l'anno 2100 non sarà bisestile:

Gli anni bisestili e il Natale

anni bisestili

Sono bisestili gli anni divisibili per 4, eccetto i secolari non divisibili per 400.

- quest'anno (2019) non è bisestile: $4 \nmid 2019$
- l'anno prossimo (2020) sarà bisestile: $4 \mid 2020$
- l'anno 2100 non sarà bisestile: $4 \mid 2100$,

Gli anni bisestili e il Natale

anni bisestili

Sono bisestili gli anni divisibili per 4, eccetto i secolari non divisibili per 400.

- quest'anno (2019) non è bisestile: $4 \nmid 2019$
- l'anno prossimo (2020) sarà bisestile: $4 \mid 2020$
- l'anno 2100 non sarà bisestile: $4 \mid 2100$, 2100 è un anno secolare e $400 \nmid 2100$

Gli anni bisestili e il Natale

anni bisestili

Sono bisestili gli anni divisibili per 4, eccetto i secolari non divisibili per 400.

- quest'anno (2019) non è bisestile: $4 \nmid 2019$
- l'anno prossimo (2020) sarà bisestile: $4 \mid 2020$
- l'anno 2100 non sarà bisestile: $4 \mid 2100$, 2100 è un anno secolare e $400 \nmid 2100$
- l'anno 2000 è stato bisestile:

Gli anni bisestili e il Natale

anni bisestili

Sono bisestili gli anni divisibili per 4, eccetto i secolari non divisibili per 400.

- quest'anno (2019) non è bisestile: $4 \nmid 2019$
- l'anno prossimo (2020) sarà bisestile: $4 \mid 2020$
- l'anno 2100 non sarà bisestile: $4 \mid 2100$, 2100 è un anno secolare e $400 \nmid 2100$
- l'anno 2000 è stato bisestile: $4 \mid 2000$,

Gli anni bisestili e il Natale

anni bisestili

Sono bisestili gli anni divisibili per 4, eccetto i secolari non divisibili per 400.

- quest'anno (2019) non è bisestile: $4 \nmid 2019$
- l'anno prossimo (2020) sarà bisestile: $4 \mid 2020$
- l'anno 2100 non sarà bisestile: $4 \mid 2100$, 2100 è un anno secolare e $400 \nmid 2100$
- l'anno 2000 è stato bisestile: $4 \mid 2000$, 2000 è un anno secolare e $400 \mid 2000$

Gli anni bisestili e il Natale

anni bisestili

Sono bisestili gli anni divisibili per 4, eccetto i secolari non divisibili per 400.

- quest'anno (2019) non è bisestile: $4 \nmid 2019$
- l'anno prossimo (2020) sarà bisestile: $4 \mid 2020$
- l'anno 2100 non sarà bisestile: $4 \mid 2100$, 2100 è un anno secolare e $400 \nmid 2100$
- l'anno 2000 è stato bisestile: $4 \mid 2000$, 2000 è un anno secolare e $400 \mid 2000$
- ogni 400 anni ci sono quattro anni secolari:

Gli anni bisestili e il Natale

anni bisestili

Sono bisestili gli anni divisibili per 4, eccetto i secolari non divisibili per 400.

- quest'anno (2019) non è bisestile: $4 \nmid 2019$
- l'anno prossimo (2020) sarà bisestile: $4 \mid 2020$
- l'anno 2100 non sarà bisestile: $4 \mid 2100$, 2100 è un anno secolare e $400 \nmid 2100$
- l'anno 2000 è stato bisestile: $4 \mid 2000$, 2000 è un anno secolare e $400 \mid 2000$
- ogni 400 anni ci sono quattro anni secolari: uno è divisibile per 400,

Gli anni bisestili e il Natale

anni bisestili

Sono bisestili gli anni divisibili per 4, eccetto i secolari non divisibili per 400.

- quest'anno (2019) non è bisestile: $4 \nmid 2019$
- l'anno prossimo (2020) sarà bisestile: $4 \mid 2020$
- l'anno 2100 non sarà bisestile: $4 \mid 2100$, 2100 è un anno secolare e $400 \nmid 2100$
- l'anno 2000 è stato bisestile: $4 \mid 2000$, 2000 è un anno secolare e $400 \mid 2000$
- ogni 400 anni ci sono quattro anni secolari: uno è divisibile per 400, gli altri tre non lo sono

Gli anni bisestili e il Natale

anni bisestili

Sono bisestili gli anni divisibili per 4, eccetto i secolari non divisibili per 400.

- quest'anno (2019) non è bisestile: $4 \nmid 2019$
- l'anno prossimo (2020) sarà bisestile: $4 \mid 2020$
- l'anno 2100 non sarà bisestile: $4 \mid 2100$, 2100 è un anno secolare e $400 \nmid 2100$
- l'anno 2000 è stato bisestile: $4 \mid 2000$, 2000 è un anno secolare e $400 \mid 2000$
- ogni 400 anni ci sono quattro anni secolari: uno è divisibile per 400, gli altri tre non lo sono

anni bisestili

Ogni 400 anni, ci sono 97 anni bisestili e 303 non bisestili.

Gli anni bisestili e il Natale

- in 400 anni ci sono $400 \times 365 + 97 = 146\,097$ giorni

Gli anni bisestili e il Natale

- in 400 anni ci sono $400 \times 365 + 97 = 146\,097$ giorni
- $146\,097$ è divisibile per 7

Gli anni bisestili e il Natale

- in 400 anni ci sono $400 \times 365 + 97 = 146\,097$ giorni
- $146\,097$ è divisibile per 7 $\implies$ in 400 anni ci sono $146\,097/7 = 20\,871$ settimane

Gli anni bisestili e il Natale

- in 400 anni ci sono $400 \times 365 + 97 = 146\,097$ giorni
- $146\,097$ è divisibile per 7 $\implies$ in 400 anni ci sono $146\,097/7 = 20\,871$ settimane
- il calendario di un determinato anno è uguale a quello di 400 anni prima e a quello di 400 anni dopo

Gli anni bisestili e il Natale

- in 400 anni ci sono $400 \times 365 + 97 = 146\,097$ giorni
- $146\,097$ è divisibile per 7 $\implies$ in 400 anni ci sono $146\,097/7 = 20\,871$ settimane
- il calendario di un determinato anno è uguale a quello di 400 anni prima e a quello di 400 anni dopo
- 400 non è divisibile per 7

Gli anni bisestili e il Natale

- in 400 anni ci sono $400 \times 365 + 97 = 146\,097$ giorni
- $146\,097$ è divisibile per 7 $\Longrightarrow$ in 400 anni ci sono $146\,097/7 = 20\,871$ settimane
- il calendario di un determinato anno è uguale a quello di 400 anni prima e a quello di 400 anni dopo
- 400 non è divisibile per 7
- fissato un giorno, ad esempio il Natale

Gli anni bisestili e il Natale

- in 400 anni ci sono $400 \times 365 + 97 = 146\,097$ giorni
- $146\,097$ è divisibile per 7 $\implies$ in 400 anni ci sono $146\,097/7 = 20\,871$ settimane
- il calendario di un determinato anno è uguale a quello di 400 anni prima e a quello di 400 anni dopo
- 400 non è divisibile per 7
- fissato un giorno, ad esempio il Natale
  - il numero di volte che occorrerà di domenica

Gli anni bisestili e il Natale

- in 400 anni ci sono $400 \times 365 + 97 = 146\,097$ giorni
- $146\,097$ è divisibile per 7 $\implies$ in 400 anni ci sono $146\,097/7 = 20\,871$ settimane
- il calendario di un determinato anno è uguale a quello di 400 anni prima e a quello di 400 anni dopo
- 400 non è divisibile per 7
- fissato un giorno, ad esempio il Natale
  - il numero di volte che occorrerà di domenica
  - sommato al numero di volte che occorrerà di lunedì

Gli anni bisestili e il Natale

- in 400 anni ci sono $400 \times 365 + 97 = 146\,097$ giorni
- $146\,097$ è divisibile per 7 $\implies$ in 400 anni ci sono $146\,097/7 = 20\,871$ settimane
- il calendario di un determinato anno è uguale a quello di 400 anni prima e a quello di 400 anni dopo
- 400 non è divisibile per 7
- fissato un giorno, ad esempio il Natale
  - il numero di volte che occorrerà di domenica
  - sommato al numero di volte che occorrerà di lunedì
  - ...

Gli anni bisestili e il Natale

- in 400 anni ci sono $400 \times 365 + 97 = 146\,097$ giorni
- $146\,097$ è divisibile per 7 $\implies$ in 400 anni ci sono $146\,097/7 = 20\,871$ settimane
- il calendario di un determinato anno è uguale a quello di 400 anni prima e a quello di 400 anni dopo
- 400 non è divisibile per 7
- fissato un giorno, ad esempio il Natale
  - il numero di volte che occorrerà di domenica
  - sommato al numero di volte che occorrerà di lunedì
  - ...
  - sommato al numero di volte che occorrerà di sabato

Gli anni bisestili e il Natale

- in 400 anni ci sono $400 \times 365 + 97 = 146\,097$ giorni
- $146\,097$ è divisibile per 7 $\implies$ in 400 anni ci sono $146\,097/7 = 20\,871$ settimane
- il calendario di un determinato anno è uguale a quello di 400 anni prima e a quello di 400 anni dopo
- 400 non è divisibile per 7
- fissato un giorno, ad esempio il Natale
  - il numero di volte che occorrerà di domenica
  - sommato al numero di volte che occorrerà di lunedì
  - ...
  - sommato al numero di volte che occorrerà di sabato
  - dovrà essere uguale a 400

Gli anni bisestili e il Natale

- in 400 anni ci sono $400 \times 365 + 97 = 146\,097$ giorni
- $146\,097$ è divisibile per 7 $\implies$ in 400 anni ci sono $146\,097/7 = 20\,871$ settimane
- il calendario di un determinato anno è uguale a quello di 400 anni prima e a quello di 400 anni dopo
- 400 non è divisibile per 7
- fissato un giorno, ad esempio il Natale
  - il numero di volte che occorrerà di domenica
  - sommato al numero di volte che occorrerà di lunedì
  - ...
  - sommato al numero di volte che occorrerà di sabato
  - dovrà essere uguale a 400

	dom	lun	mar	mer	gio	ven	sab
Natale	58	56	58	57	57	58	56

I figli di Marco

un fratellino

Marco ha due figli. Francesca è la più grande.

Qual è la probabilità che Francesca abbia un fratello?

I figli di Marco

un fratellino

Marco ha due figli. Francesca è la più grande.
Qual è la probabilità che Francesca abbia un fratello?

una sorellona

Marco ha due figli. Francesca è la più piccola.
Qual è la probabilità che Francesca abbia una sorella?

I figli di Marco

un fratellino

Marco ha due figli. Francesca è la più grande.
Qual è la probabilità che Francesca abbia un fratello?

una sorellona

Marco ha due figli. Francesca è la più piccola.
Qual è la probabilità che Francesca abbia una sorella?

un fratello

Marco ha due figli. Una è Francesca.
Qual è la probabilità che Francesca abbia un fratello?

30 febbraio 1712

Per recuperare gli 11 giorni di differenza (10 più uno per il 1700) tra il calendario giuliano e quello gregoriano, il re di Svezia, Carlo XII, decise di eliminare tutti gli anni bisestili dal 1700 al 1740. Dopo aver eliminato il primo, il 1700, si dimenticò di farlo nel 1704 e nel 1708 perchè in altre faccende affaccendato (guerra con l'impero russo). Decise dunque di tornare al calendario giuliano aggiungendo il giorno eliminato nel 1700 alla fine di febbraio dell'anno 1712.

almanacco svedese del 30 febbraio 1712

il paradosso del compleanno

In un'aula con n persone, qual è la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Sia $P(n)$ la probabilità cercata. Non considerando anni bisestili

Il paradosso del compleanno

il paradosso del compleanno

In un'aula con n persone, qual è la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Sia $P(n)$ la probabilità cercata. Non considerando anni bisestili

- se $n = 2$,

Il paradosso del compleanno

il paradosso del compleanno

In un'aula con n persone, qual è la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Sia $P(n)$ la probabilità cercata. Non considerando anni bisestili

- se $n = 2$, $P(2) = 1 - \frac{364}{365}$

Il paradosso del compleanno

il paradosso del compleanno

In un'aula con n persone, qual è la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Sia $P(n)$ la probabilità cercata. Non considerando anni bisestili

- se $n = 2$, $P(2) = 1 - \frac{364}{365} \approx 0.274\%$

Il paradosso del compleanno

il paradosso del compleanno

In un'aula con n persone, qual è la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Sia $P(n)$ la probabilità cercata. Non considerando anni bisestili

- se $n = 2$, $P(2) = 1 - \frac{364}{365} \approx 0.274\%$
- se $n = 3$, $P(3) = 1 - \frac{364}{365}$

Il paradosso del compleanno

il paradosso del compleanno

In un'aula con n persone, qual è la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Sia $P(n)$ la probabilità cercata. Non considerando anni bisestili

- se $n = 2$, $P(2) = 1 - \frac{364}{365} \approx 0.274\%$
- se $n = 3$, $P(3) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365}$

Il paradosso del compleanno

il paradosso del compleanno

In un'aula con n persone, qual è la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Sia $P(n)$ la probabilità cercata. Non considerando anni bisestili

- se $n = 2$, $P(2) = 1 - \frac{364}{365} \approx 0.274\%$
- se $n = 3$, $P(3) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \approx 0.820\%$

Il paradosso del compleanno

il paradosso del compleanno

In un'aula con n persone, qual è la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Sia $P(n)$ la probabilità cercata. Non considerando anni bisestili

- se $n = 2$, $P(2) = 1 - \frac{364}{365} \approx 0.274\%$
- se $n = 3$, $P(3) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \approx 0.820\%$
- se $n = 4$, $P(4) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365}$

Il paradosso del compleanno

il paradosso del compleanno

In un'aula con n persone, qual è la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Sia $P(n)$ la probabilità cercata. Non considerando anni bisestili

- se $n = 2$, $P(2) = 1 - \frac{364}{365} \approx 0.274\%$
- se $n = 3$, $P(3) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \approx 0.820\%$
- se $n = 4$, $P(4) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365}$

Il paradosso del compleanno

il paradosso del compleanno

In un'aula con n persone, qual è la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Sia $P(n)$ la probabilità cercata. Non considerando anni bisestili

- se $n = 2$, $P(2) = 1 - \frac{364}{365} \approx 0.274\%$
- se $n = 3$, $P(3) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \approx 0.820\%$
- se $n = 4$, $P(4) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \approx 1.636\%$

Il paradosso del compleanno

il paradosso del compleanno

In un'aula con n persone, qual è la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Sia $P(n)$ la probabilità cercata. Non considerando anni bisestili

- se $n = 2$, $P(2) = 1 - \frac{364}{365} \approx 0.274\%$
- se $n = 3$, $P(3) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \approx 0.820\%$
- se $n = 4$, $P(4) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \approx 1.636\%$
- se $n = 10$, $P(10) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{356}{365}$

Il paradosso del compleanno

il paradosso del compleanno

In un'aula con n persone, qual è la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Sia $P(n)$ la probabilità cercata. Non considerando anni bisestili

- se $n = 2$, $P(2) = 1 - \frac{364}{365} \approx 0.274\%$
- se $n = 3$, $P(3) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \approx 0.820\%$
- se $n = 4$, $P(4) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \approx 1.636\%$
- se $n = 10$, $P(10) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{356}{365} \approx 11.695\%$

Il paradosso del compleanno

il paradosso del compleanno

In un'aula con n persone, qual è la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Sia $P(n)$ la probabilità cercata. Non considerando anni bisestili

- se $n = 2$, $P(2) = 1 - \frac{364}{365} \approx 0.274\%$
- se $n = 3$, $P(3) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \approx 0.820\%$
- se $n = 4$, $P(4) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \approx 1.636\%$
- se $n = 10$, $P(10) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{356}{365} \approx 11.695\%$
- se $n = 20$, $P(20) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{346}{365}$

Il paradosso del compleanno

il paradosso del compleanno

In un'aula con n persone, qual è la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Sia $P(n)$ la probabilità cercata. Non considerando anni bisestili

- se $n = 2$, $P(2) = 1 - \frac{364}{365} \approx 0.274\%$
- se $n = 3$, $P(3) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \approx 0.820\%$
- se $n = 4$, $P(4) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \approx 1.636\%$
- se $n = 10$, $P(10) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{356}{365} \approx 11.695\%$
- se $n = 20$, $P(20) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{346}{365} \approx 41.144\%$

Il paradosso del compleanno

il paradosso del compleanno

In un'aula con n persone, qual è la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Sia $P(n)$ la probabilità cercata. Non considerando anni bisestili

- se $n = 2$, $P(2) = 1 - \frac{364}{365} \approx 0.274\%$
- se $n = 3$, $P(3) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \approx 0.820\%$
- se $n = 4$, $P(4) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \approx 1.636\%$
- se $n = 10$, $P(10) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{356}{365} \approx 11.695\%$
- se $n = 20$, $P(20) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{346}{365} \approx 41.144\%$
- $P(21) \approx 44.369\%$,

Il paradosso del compleanno

il paradosso del compleanno

In un'aula con n persone, qual è la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Sia $P(n)$ la probabilità cercata. Non considerando anni bisestili

- se $n = 2$, $P(2) = 1 - \frac{364}{365} \approx 0.274\%$
- se $n = 3$, $P(3) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \approx 0.820\%$
- se $n = 4$, $P(4) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \approx 1.636\%$
- se $n = 10$, $P(10) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{356}{365} \approx 11.695\%$
- se $n = 20$, $P(20) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{346}{365} \approx 41.144\%$
- $P(21) \approx 44.369\%$, $P(22) \approx 47.570\%$,

Il paradosso del compleanno

il paradosso del compleanno

In un'aula con n persone, qual è la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Sia $P(n)$ la probabilità cercata. Non considerando anni bisestili

- se $n = 2$, $P(2) = 1 - \frac{364}{365} \approx 0.274\%$
- se $n = 3$, $P(3) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \approx 0.820\%$
- se $n = 4$, $P(4) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \approx 1.636\%$
- se $n = 10$, $P(10) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{356}{365} \approx 11.695\%$
- se $n = 20$, $P(20) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{346}{365} \approx 41.144\%$
- $P(21) \approx 44.369\%$, $P(22) \approx 47.570\%$, $P(23) \approx 50.730\%$

Il paradosso del compleanno

il paradosso del compleanno

In un'aula con n persone, qual è la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Sia $P(n)$ la probabilità cercata. Non considerando anni bisestili

- se $n = 2$, $P(2) = 1 - \frac{364}{365} \approx 0.274\%$
- se $n = 3$, $P(3) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \approx 0.820\%$
- se $n = 4$, $P(4) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \approx 1.636\%$
- se $n = 10$, $P(10) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{356}{365} \approx 11.695\%$
- se $n = 20$, $P(20) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{346}{365} \approx 41.144\%$
- $P(21) \approx 44.369\%$, $P(22) \approx 47.570\%$, $P(23) \approx 50.730\%$

il paradosso del compleanno

In un'aula con 23 persone, la probabilità che ci siano due persone che festeggiano il compleanno lo stesso giorno è maggiore del 50%.

Il paradosso del compleanno

$P(n)$

In un'aula con n persone, la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno è

$$P(n) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \frac{366 - k}{365}$$

Il paradosso del compleanno

$P(n)$

In un'aula con n persone, la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno è

$$P(n) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \frac{366-k}{365} = 1 - \frac{365!}{365^n\,(365-n)!}$$

Il paradosso del compleanno

$P(n)$

In un'aula con n persone, la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno è

$$P(n) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \frac{366-k}{365} = 1 - \frac{365!}{365^n\,(365-n)!}$$

- in caso di anno bisestile: $P'(22) \approx 47.475\%$, $P'(23) \approx 50.632\%$

Il paradosso del compleanno

$P(n)$

In un'aula con n persone, la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno è

$$P(n) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \frac{366-k}{365} = 1 - \frac{365!}{365^n\,(365-n)!}$$

- in caso di anno bisestile: $P'(22) \approx 47.475\%$, $P'(23) \approx 50.632\%$
- se $n = 182$, la probabilià che le 182 persone festeggino il compleanno in un giorno diverso è circa 1 ogni

Il paradosso del compleanno

$P(n)$

In un'aula con n persone, la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno è

$$P(n) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \frac{366-k}{365} = 1 - \frac{365!}{365^n\,(365-n)!}$$

- in caso di anno bisestile: $P'(22) \approx 47.475\%$, $P'(23) \approx 50.632\%$
- se $n = 182$, la probabilià che le 182 persone festeggino il compleanno in un giorno diverso è circa 1 ogni 1 048 886 887 446 171 425 165 341 (25 cifre)

Il paradosso del compleanno

$P(n)$

In un'aula con n persone, la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno è

$$P(n) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \frac{366 - k}{365} = 1 - \frac{365!}{365^n \, (365 - n)!}$$

- in caso di anno bisestile: $P'(22) \approx 47.475\%$, $P'(23) \approx 50.632\%$
- se $n = 182$, la probabilià che le 182 persone festeggino il compleanno in un giorno diverso è circa 1 ogni 1 048 886 887 446 171 425 165 341 (25 cifre)
- se $n = 365$, la probabilià che le 365 persone festeggino il compleanno in un giorno diverso è circa 1 ogni

Il paradosso del compleanno

$P(n)$

In un'aula con n persone, la probabilità che due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno è

$$P(n) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \frac{366-k}{365} = 1 - \frac{365!}{365^n\,(365-n)!}$$

- in caso di anno bisestile: $P'(22) \approx 47.475\%$, $P'(23) \approx 50.632\%$
- se $n = 182$, la probabilià che le 182 persone festeggino il compleanno in un giorno diverso è circa 1 ogni 1 048 886 887 446 171 425 165 341 (25 cifre)
- se $n = 365$, la probabilià che le 365 persone festeggino il compleanno in un giorno diverso è circa 1 ogni 6 873 063 784 130 023 579 571 162 399 389 670 695 470 026 187 440 621 129 385 440 135 876 987 801 201 698 998 646 765 244 074 057 921 355 404 575 765 384 446 761 194 723 223 001 514 594 625 977 948 311 909 571 (157 cifre)

Le lancette dell'orologio

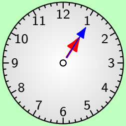
le lancette dell'orologio

Quante volte la lancetta delle ore e quella dei minuti si sovrappongono in 24 ore?

le lancette dell'orologio

Quante volte la lancetta delle ore e quella dei minuti si sovrappongono in 24 ore?

1

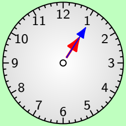


01:05:27

le lancette dell'orologio

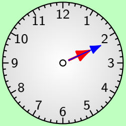
Quante volte la lancetta delle ore e quella dei minuti si sovrappongono in 24 ore?

1



01:05:27

2

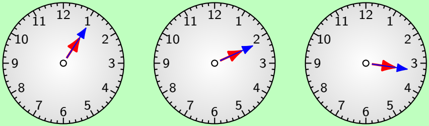


02:10:55

le lancette dell'orologio

Quante volte la lancetta delle ore e quella dei minuti si sovrappongono in 24 ore?

1 2 3

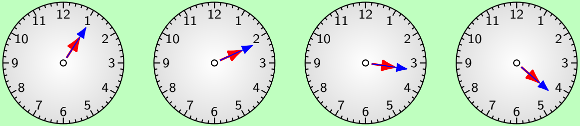


01:05:27 02:10:55 03:16:22

le lancette dell'orologio

Quante volte la lancetta delle ore e quella dei minuti si sovrappongono in 24 ore?

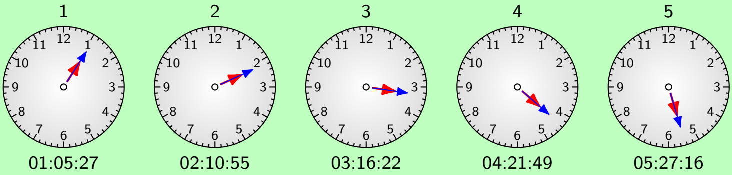
1 2 3 4



01:05:27 02:10:55 03:16:22 04:21:49

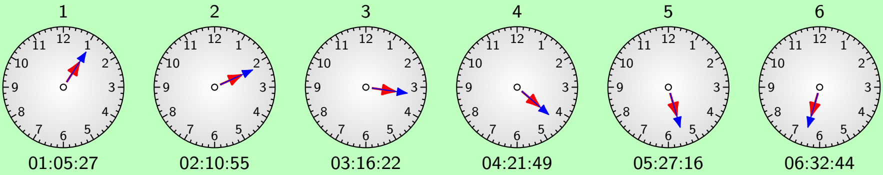
le lancette dell'orologio

Quante volte la lancetta delle ore e quella dei minuti si sovrappongono in 24 ore?



le lancette dell'orologio

Quante volte la lancetta delle ore e quella dei minuti si sovrappongono in 24 ore?

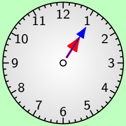


Le lancette dell’orologio

le lancette dell’orologio

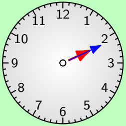
Quante volte la lancetta delle ore e quella dei minuti si sovrappongono in 24 ore?

1



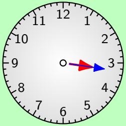
01:05:27

2



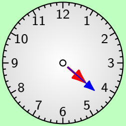
02:10:55

3



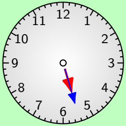
03:16:22

4



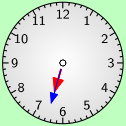
04:21:49

5

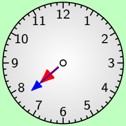


05:27:16

6



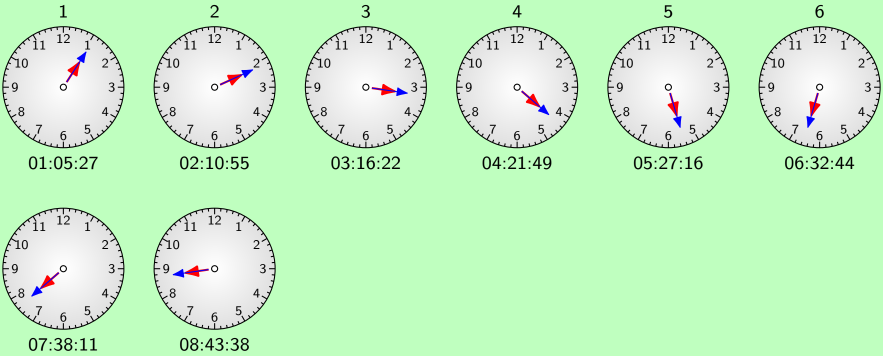
06:32:44



07:38:11

le lancette dell'orologio

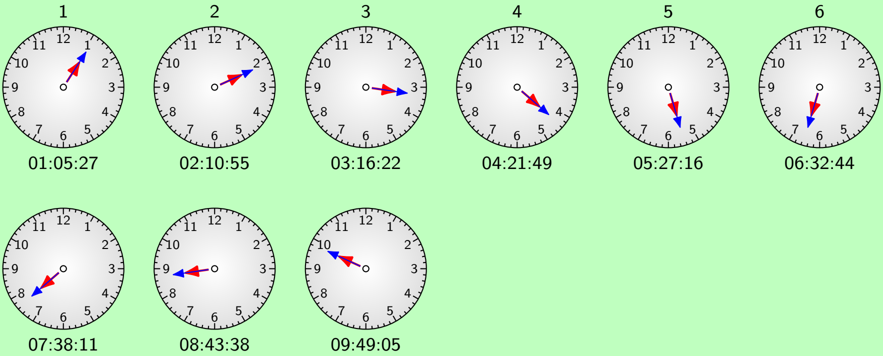
Quante volte la lancetta delle ore e quella dei minuti si sovrappongono in 24 ore?



Le lancette dell’orologio

le lancette dell’orologio

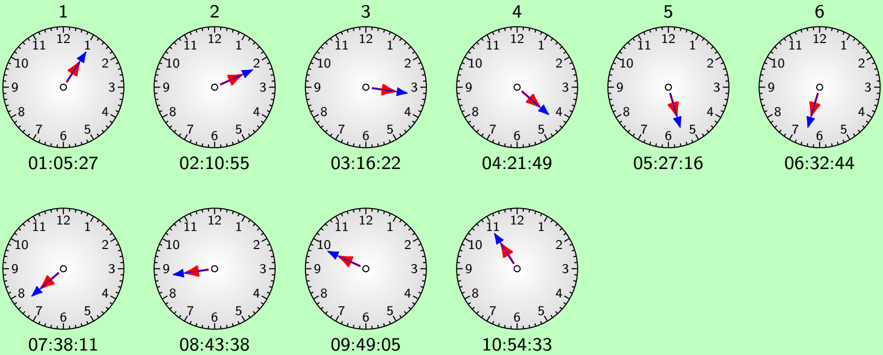
Quante volte la lancetta delle ore e quella dei minuti si sovrappongono in 24 ore?



Le lancette dell'orologio

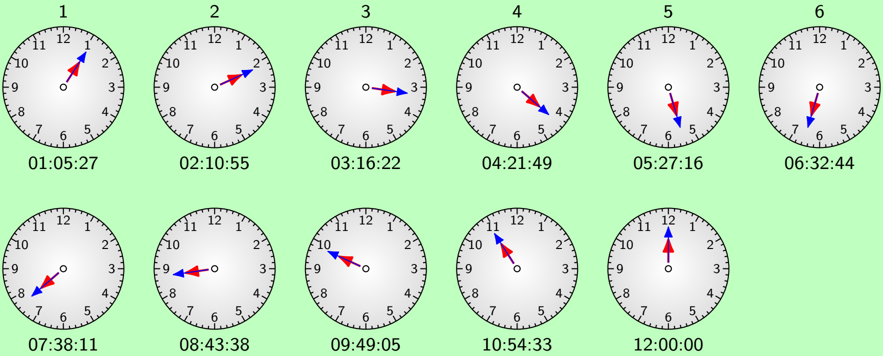
le lancette dell'orologio

Quante volte la lancetta delle ore e quella dei minuti si sovrappongono in 24 ore?



le lancette dell'orologio

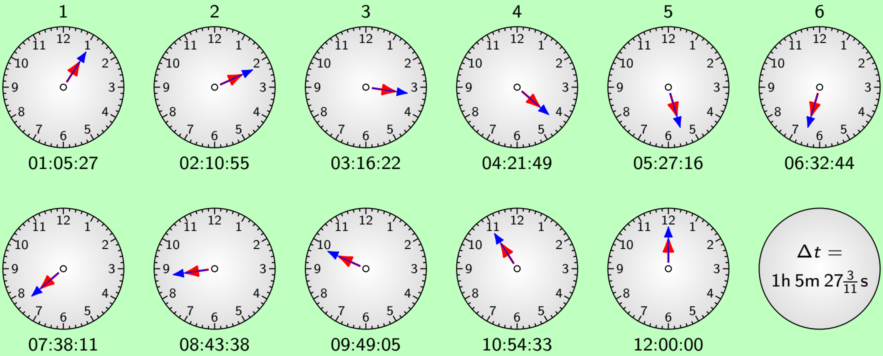
Quante volte la lancetta delle ore e quella dei minuti si sovrappongono in 24 ore?



Le lancette dell’orologio

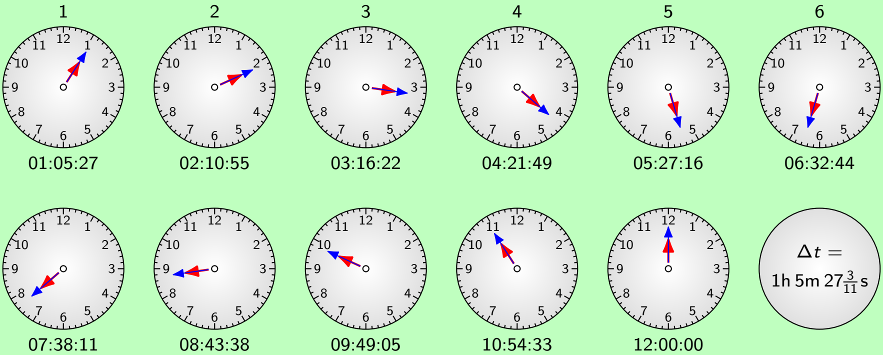
le lancette dell’orologio

Quante volte la lancetta delle ore e quella dei minuti si sovrappongono in 24 ore?



le lancette dell'orologio

Quante volte la lancetta delle ore e quella dei minuti si sovrappongono in 24 ore?



le lancette dell'orologio

Ogni 12 ore la lancetta delle ore e quella dei minuti si sovrappongono 11 volte.

La duplicazione del quadrato

Se il quadrato di un intero a è il doppio del quadrato di un altro intero b, allora

$$a^2 = 2b^2$$

La duplicazione del quadrato

Se il quadrato di un intero a è il doppio del quadrato di un altro intero b, allora

$$a^2 = 2b^2 \implies \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$$

La duplicazione del quadrato

Se il quadrato di un intero a è il doppio del quadrato di un altro intero b, allora

$$a^2 = 2b^2 \implies \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \implies \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

La duplicazione del quadrato

Se il quadrato di un intero a è il doppio del quadrato di un altro intero b, allora

$$a^2 = 2b^2 \implies \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \implies \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

Supponiamo che $\frac{a}{b}$ sia ridotta ai minimi termini (a e b coprimi). Allora

$$a^2 = 2b^2$$

La duplicazione del quadrato

Se il quadrato di un intero a è il doppio del quadrato di un altro intero b, allora

$$a^2 = 2b^2 \implies \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \implies \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

Supponiamo che $\frac{a}{b}$ sia ridotta ai minimi termini (a e b coprimi). Allora

$$a^2 = 2b^2 \implies a \text{ pari} \quad (a = 2a')$$

La duplicazione del quadrato

Se il quadrato di un intero a è il doppio del quadrato di un altro intero b, allora

$$a^2 = 2b^2 \implies \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \implies \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

Supponiamo che $\frac{a}{b}$ sia ridotta ai minimi termini (a e b coprimi). Allora

$$\begin{aligned} a^2 = 2b^2 &\implies a \text{ pari} \quad (a = 2a') \\ &\implies 4{a'}^2 = 2b^2 \end{aligned}$$

La duplicazione del quadrato

Se il quadrato di un intero a è il doppio del quadrato di un altro intero b, allora

$$a^2 = 2b^2 \implies \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \implies \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

Supponiamo che $\frac{a}{b}$ sia ridotta ai minimi termini (a e b coprimi). Allora

$$\begin{aligned} a^2 = 2b^2 &\implies a \text{ pari} \quad (a = 2a') \\ &\implies 4{a'}^2 = 2b^2 \\ &\implies 2{a'}^2 = b^2 \end{aligned}$$

La duplicazione del quadrato

Se il quadrato di un intero a è il doppio del quadrato di un altro intero b, allora

$$a^2 = 2b^2 \implies \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \implies \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

Supponiamo che $\frac{a}{b}$ sia ridotta ai minimi termini (a e b coprimi). Allora

$$\begin{aligned} a^2 = 2b^2 &\implies a \text{ pari} \quad (a = 2a') \\ &\implies 4{a'}^2 = 2b^2 \\ &\implies 2{a'}^2 = b^2 \\ &\implies b \text{ pari} \quad (b = 2b') \end{aligned}$$

La duplicazione del quadrato

Se il quadrato di un intero a è il doppio del quadrato di un altro intero b, allora

$$a^2 = 2b^2 \implies \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \implies \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

Supponiamo che $\frac{a}{b}$ sia ridotta ai minimi termini (a e b coprimi). Allora

$$\begin{aligned} a^2 = 2b^2 &\implies a \text{ pari} \quad (a = 2a') \\ &\implies 4a'^2 = 2b^2 \\ &\implies 2a'^2 = b^2 \\ &\implies b \text{ pari} \quad (b = 2b') \\ &\implies 2a'^2 = 4b'^2 \end{aligned}$$

La duplicazione del quadrato

Se il quadrato di un intero a è il doppio del quadrato di un altro intero b, allora

$$a^2 = 2b^2 \implies \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \implies \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

Supponiamo che $\frac{a}{b}$ sia ridotta ai minimi termini (a e b coprimi). Allora

$$\begin{aligned} a^2 = 2b^2 &\implies a \text{ pari} \quad (a = 2a') \\ &\implies 4{a'}^2 = 2b^2 \\ &\implies 2{a'}^2 = b^2 \\ &\implies b \text{ pari} \quad (b = 2b') \\ &\implies 2{a'}^2 = 4{b'}^2 \\ &\implies {a'}^2 = 2{b'}^2 \end{aligned}$$

La duplicazione del quadrato

Se il quadrato di un intero a è il doppio del quadrato di un altro intero b, allora

$$a^2 = 2b^2 \implies \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \implies \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

Supponiamo che $\frac{a}{b}$ sia ridotta ai minimi termini (a e b coprimi). Allora

$$\begin{aligned} a^2 = 2b^2 &\implies a \text{ pari} \quad (a = 2a') \\ &\implies 4a'^2 = 2b^2 \\ &\implies 2a'^2 = b^2 \\ &\implies b \text{ pari} \quad (b = 2b') \\ &\implies 2a'^2 = 4b'^2 \\ &\implies a'^2 = 2b'^2 \\ &\implies \text{impossibile} \end{aligned}$$