Per Euclide non esiste una via regia

Cinzia Bonotto
Dipartimento di Matematica
Università di Padova
e-mail: bonotto@math.unipd.it

"*Pura o Applicata? La matematica tra teoria e problemi*"
Padova, 13 aprile 2013

Sugli Elementi

Noi onoriamo l'antica Grecia come la culla della civiltà occidentale. Là, per la prima volta, è stato creato un sistema logico, meraviglia del pensiero, i cui enunciati si deducono così chiaramente dagli altri che ciascuna delle proposizioni dimostrate non solleva il minimo dubbio: si tratta della geometria di Euclide. Quest'opera ammirevole della ragione ha dato al cervello umano la più grande fiducia nei suoi sforzi ulteriori. Colui che nella sua prima giovinezza non ha provato entusiasmo davanti a quest'opera non è nato per fare lo scienziato teorico.

(Albert Einstein, ***Come io vedo il mondo***, **1954, p. 46)**

La scuola di Atene (Raffaello, 1509/1510)

EUCLIDE

Notizie su Euclide

“*Gli storici hanno seguito lo sviluppo di questa scienza fino a questo punto*. *Non molto più giovane di questi* [Ermotico di Colofone e Filippo di Medma, matematici dell’Accademia platonica, ndr] *è Euclide, che raccolse gli “Elementi”, ordinò molti risultati di Eudosso, ne perfezionò molti di Teeteto,ed ancora condusse a dimostrazioni inconfutabili cioè che i suoi predecessori avevano dimostrato poco rigorosamente. Visse costui al tempo del primo Tolomeo; anche Archimede infatti, che seguì il primo Tolomeo, cita Euclide; e a dire il vero si racconta anche che Tolomeo chiese una volta a quest’ultimo se non ci fosse una strada per apprendere la geometria più breve degli “Elementi”; ed egli rispose che non ci sono vie regie per la geometria* (μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπον ἐπὶ γεωμετρίαν). *Euclide è dunque più giovane dei discepoli di Platone, ma più anziano di Erastotene e di Archimede. Costoro infatti sono fra loro contemporanei, come afferma in qualche luogo Eratostene.* ”

(Proclo, *Commento al I libro degli Elementi di Euclide*, p. 68).

Scuola di Alessandria

La testimonianza di Proclo ci induce a collocarne l'attività principale

- all'inizio del III secolo a.C.

-in posizione istituzionale direttamente collegata a Tolomeo I,

-il che fa supporre che Tolomeo lo abbia chiamato ad operare nella Biblioteca di Alessandria e nell'annesso Museo.

In particolare la scuola Matematica di Alessandria avrebbe avuto inizio proprio con Euclide per durare, pur subendo considerevoli trasformazioni, fino all'inizio del V secolo d.C. con Teone e sua figlia Ipazia.

Rapporti tra scienza e filosofia

Assieme alla *De Sphaera* di Autolico di Pitane (360 a.C. - 290 a.C.) le opere di Euclide sono i più antichi trattati matematici greci pervenutici.

Si collocano in un periodo in cui le scienze si distaccano dalla filosofia e questa tende a sua volta ad abbandonare i grandi sistemi per seguire vie più pragmatiche ed empiriste (Migliorato & Gentile, 2005).

"In questo periodo ellenistico la scienza si scioglie dalla filosofia (che sembra ormai dominata esclusivamente da interessi morali) e tocca ad una florida maturità: alla quale tuttavia succede assai presto, se anche lentamente, la decadenza" (Enriques, 1925, 1, p. 15).

Sul museo e la Biblioteca di Alessandria

"*Il museo di Alessandria rappresenta il trionfo della cultura specializzata: la cosiddetta cultura ellenistica. Il campo del sapere viene suddiviso in reparti ben circoscritti. Non si creano più sistemi filosofici generali né vaste sintesi, ma si svolgono rigorose ricerche su problemi particolari, affrontandoli uno per volta. L'antica figura del filosofo è sostituita da quella del dotto; e tutto il tipo di insegnamento tende proprio a formare degli studiosi sempre più ricchi di seria e sicura dottrina. Questa tendenza verso il particolare spiega l'interesse per l'indagine scientifica e, ancor più, il metodo della specializzazione adottato dalla scienza ellenistica. Mentre i grandi filosofi trattavano, con pari disinvoltura e competenza, di fisica e di matematica, come faceva, per esempio, Platone, o di logica e scienze naturali, come Aristotele e Teofrasto, gli scienziati dell'età ellenistica non si intendono di filosofia, e, a loro volta, i filosofi trascurano l'indagine scientifica, per restringersi alle proprie competenze specifiche*" (Geymonat, 1973, p. 284).

Oltre gli Elementi

Euclide e gli *Elementi* vengono spesso identificati; in realtà Euclide sembra avere scritto una dozzina di trattati che spaziano su vari argomenti

- Ottica

- Astronomia

- Musica

- Meccanica

- Sezioni coniche

- di cui circa la metà sono andati perduti.

Opere di Euclide andate perdute

- Trattato sulle coniche (Κωνικά)

(citata in pochi passi di Apollonio, Archimede e Pappo)

- Luoghi superficiali (Πόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ)

(citata in Pappo e da Proclo)

- False conclusioni (Ψευδάρια)

(citata in Proclo e Michele Efesio)

- Porismi (Πορίσματα), in gran numero andate perdute

Opere di Euclide pervenute

- *Gli Elementi* (Στοιχεῖα)

- *I dati* (Δεδομένα),
(opera sussidiaria ai primi 6 libri degli Elementi)

- *La Divisione delle figure* (Περὶ διαιρέσεων),
[opera di cui si possiede solo la versione araba, non quella greca, in cui si trova ad esempio il problema di determinare una parallela alla base di un triangolo di modo che le due parti abbiano la stessa area (prop.1), e l'analogo per un trapezio (prop.4)]

- *I Fenomeni* (Φαινόμενα)
(opera simile alla *Sfera* di Autolico, e quindi un'opera di geometria sferica ad uso degli astronomi)

- *L'Ottica* (Οπτικά),

- *La Catottrica* (Κατοπτρικά)
(da alcuni storici ritenuta però forse opera di Teone di Alessandria)

-3 libri di Porismi (Πορίσματα)
conservatici in un riassunto di Pappo, e che Commandino fece conoscere nel 1589 in una versione latina.

Opere di Euclide pervenute

Euclide scrisse inoltre

- di meccanica,

come sappiamo attraverso alcuni frammenti conservatici dagli Arabi,

- di musica

e precisamente le opere

Sezione del Canone (Κατατομὴ κανόνος)

Introduzione armonica (Εἰσαγωγὴ ἁρμονική)

Sull' Ottica

Gli antichi avevano diviso o studio dei fenomeni ottici in tre parti:

1. L'ottica o la geometria della visione diretta.
2. La catottrica, o la geometria dei raggi riflessi.
3. La diottrica, o la geometria dei raggi rifratti.

L'ottica non va intesa nel significato moderno di teoria della luce, ma come **teoria della visione**, ovvero come un modello matematico della percezione visiva.

L'*Ottica* di Euclide ci è pervenuta in due redazioni, diverse dal punto di vista linguistico ma non contenutistico.

In quest'opera Euclide espone una teoria "emissiva" della visione (il cui concetto fondamentale è quello di **raggio visivo**) secondo la quale l'occhio emette raggi che attraversano lo spazio fino a raggiungere gli oggetti.

Sugli Elementi

È importante notare che, come ci informa Proclo, già prima di Euclide con il nome "Elementi" (Στοιχεῖα) erano stati indicati altri trattati di geometria elementare, in particolare quello scritto da Ippocrate di Chio (470-410 a. C.), di cui non ci è rimasto nulla, se non citazioni che riportano i suoi risultati sulla quadratura delle lunule.

Gli *Elementi* non avrebbero uno scopo didattico-educativo, ruolo che invece assunsero in età imperiale e specialmente basso imperiale (Acerbi, 2007)

ma vanno letti

- come un testo che si inseriva con organicità e completezza, e con una spiccata caratteristica di sistematicità, in un genere ben definito,

- come un libro di riferimento per la ricerca più avanzata, quale quella contenuta ne *I Dati* oppure, più tardi, nelle *Coniche* di Apollonio.

Sugli Elementi

L'opera è quindi un manuale introduttivo che abbraccia la matematica elementare del tempo, ossia

- l'aritmetica
- la geometria sintetica
- l'algebra (non nel senso moderno, ma di algebra geometrica)

Frammento di papiro datato I-II sec. d.C., considerato il più antico degli *Elementi*

Questo frammento contiene la proposizione 4 del II libro degli *Elementi,* a cui fa subito seguito la figura relativa alla proposizione seguente, in cui, come avremo modo di vedere, si dimostra che

$(a+b)(a-b)+b^2=a^2$ cioè $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Cosa manca?

L'arte del calcolo non vi è inclusa perché pare non facesse parte dell'educazione superiore.

E neppure lo studio delle coniche o di altre curve piane, perché costituiva una branca più avanzata della matematica.

Proclo descrive gli *Elementi* come qualcosa che, rispetto al resto della matematica, aveva lo stesso tipo di rapporto che le lettere dell'alfabeto hanno rispetto al linguaggio.

Euclide non aveva inoltre alcuna pretesa di essere originale, motivo per cui attinse a piene mani dalle opere dei suoi predecessori.

Gran parte del contenuto è quindi l'eredità dei due secoli precedenti.

L'assiomatizzazione, come succederà anche in seguito, si realizza solo dopo che si è accumulato un ricco corpo di conoscenze.

Sugli Elementi

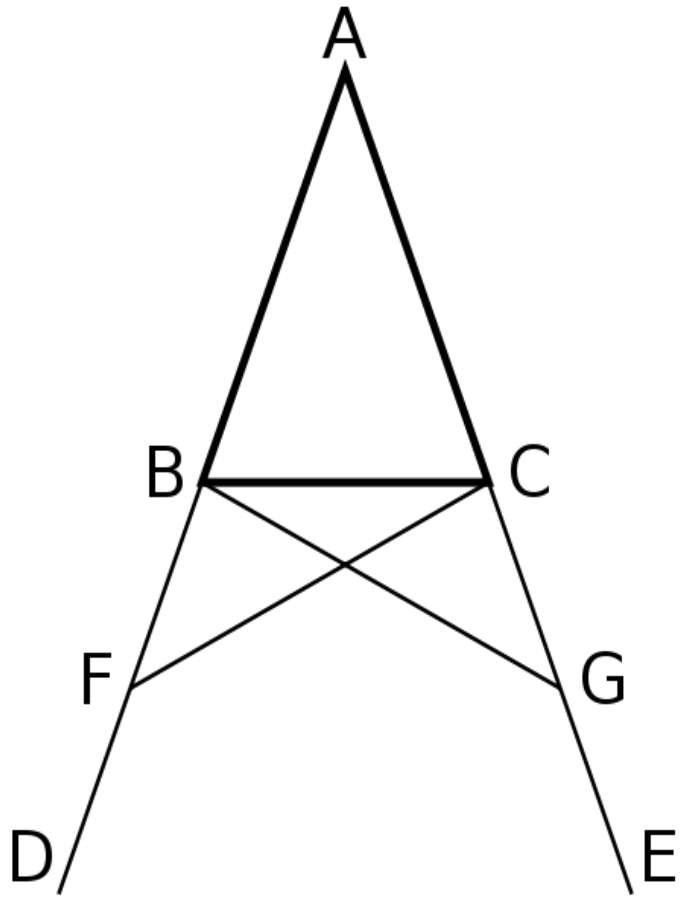
Si ritiene però che la disposizione della materia sia opera sua così come alcune dimostrazioni.

Prova ne sia che Aristotele, di poco anteriore ad Euclide, riporta, per illustrare passaggi logici, diverse dimostrazioni geometriche, ed alcune differiscono da quelle date da Euclide.

Un esempio importante è il famoso *Pons Asinorum*, o teorema di Talete sui triangoli isosceli (Proposizione 5, I libro degli Elementi di Euclide), di cui Aristotele negli *Analitici Primi* fornisce una dimostrazione in cui il triangolo è inscritto in un cerchio e vengono usati gli angoli misti, angoli che Euclide usa in rarissimi casi.

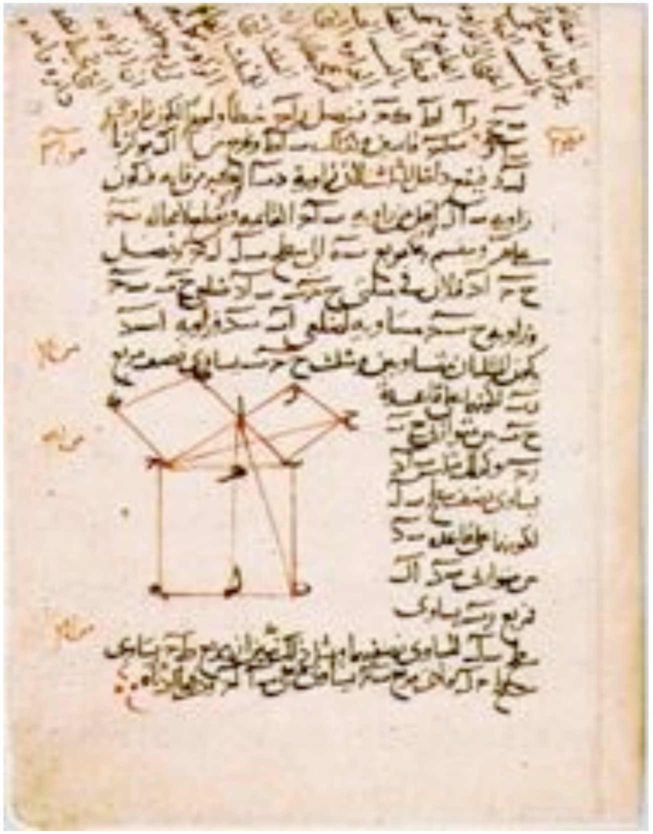
Dimostrazione di Euclide

Proposizione 5. *Nei triangoli isosceli gli angoli alla base sono uguali fra loro, e venendo prolungati i lati uguali gli angoli sotto la base saranno [pure] uguali fra loro.*



Come ci sono pervenuti gli Elementi

Questo testo è stato tramandato grazie alla prima ricostruzione che ne fece Teone di Alessandria (IV secolo d. C.) e a delle traduzioni arabe.



Come ci sono pervenuti gli Elementi

Molti hanno messo mano a questo testo così come ci è stato tramandato (all'inizio solo copie manoscritte, e quindi copiate e ricopiate più volte, spesso aggiungendo varianti).

A volte i cambiamenti furono apposti deliberatamente come nel caso proprio di Teone di Alessandria, il quale volle rendere il linguaggio più chiaro, interpolò alcuni passi di dimostrazioni, aggiunse dimostrazioni alternative ed inserì infine dei teoremi secondari nuovi.

Come ci sono pervenuti gli Elementi

Intorno al 1120, una copia del testo arabo (o una copia di una copia) fu tradotta in latino da Adelardo di Bath.

Nel 1270, la traduzione di Adelardo fu riveduta, anche alla luce di altre fonti arabe (a loro volta derivate da altre versioni greche del manoscritto di Teone) da Campano da Novara. Questa versione (o una copia di una copia) venne stampata a Venezia nel 1482.

Nel 1543 viene pubblicata, ad opera di Tartaglia, la prima edizione in volgare degli *Elementi*; Commandino ne pubblica nel 1572 una versione in latino e nel 1575 una in volgare (rimediando ad alcuni equivoci presenti nelle versioni precedenti).

Successivamente furono rinvenute altre copie greche della versione di Teone, ma soprattutto una versione greca degli Elementi anteriore a quella di Teone presente in un codice vaticano.

Su questi fonti fu fatta la ricostruzione dell'originale da parte del filologo danese Heiberg intorno al 1880 e su questa la traduzione di Heath del 1908, preziosissima per l'introduzione ed i commenti.

Sugli Elementi

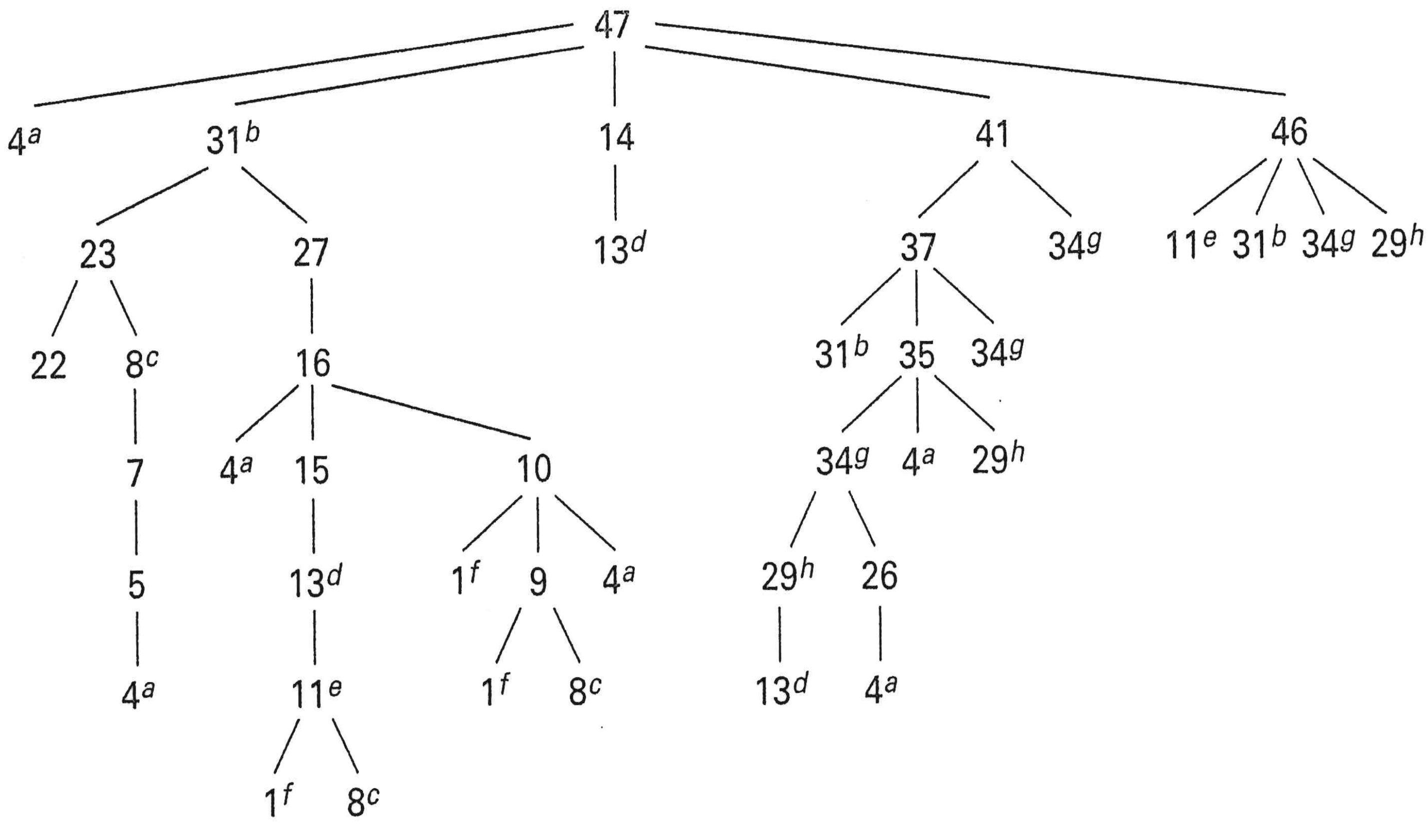
Gli *Elementi* sono costituiti da una successione di proposizioni ordinata deduttivamente “in avanti”:

le proposizioni successive sono conseguenza di quelle precedenti o, meglio, quelle precedenti sono spesso tasselli che servono a dimostrare le successive.

Prova ne sia il Teorema di Pitagora, focus assieme al suo inverso (proposizioni 47 e 48), del I libro degli Elementi.

Il primo libro degli *Elementi* si può infatti leggere all’indietro come lo sviluppo dei risultati necessari a permettere la dimostrazione del teorema di Pitagora e del suo inverso (metà delle proposizioni precedenti vengono infatti utilizzate nella sua dimostrazione).

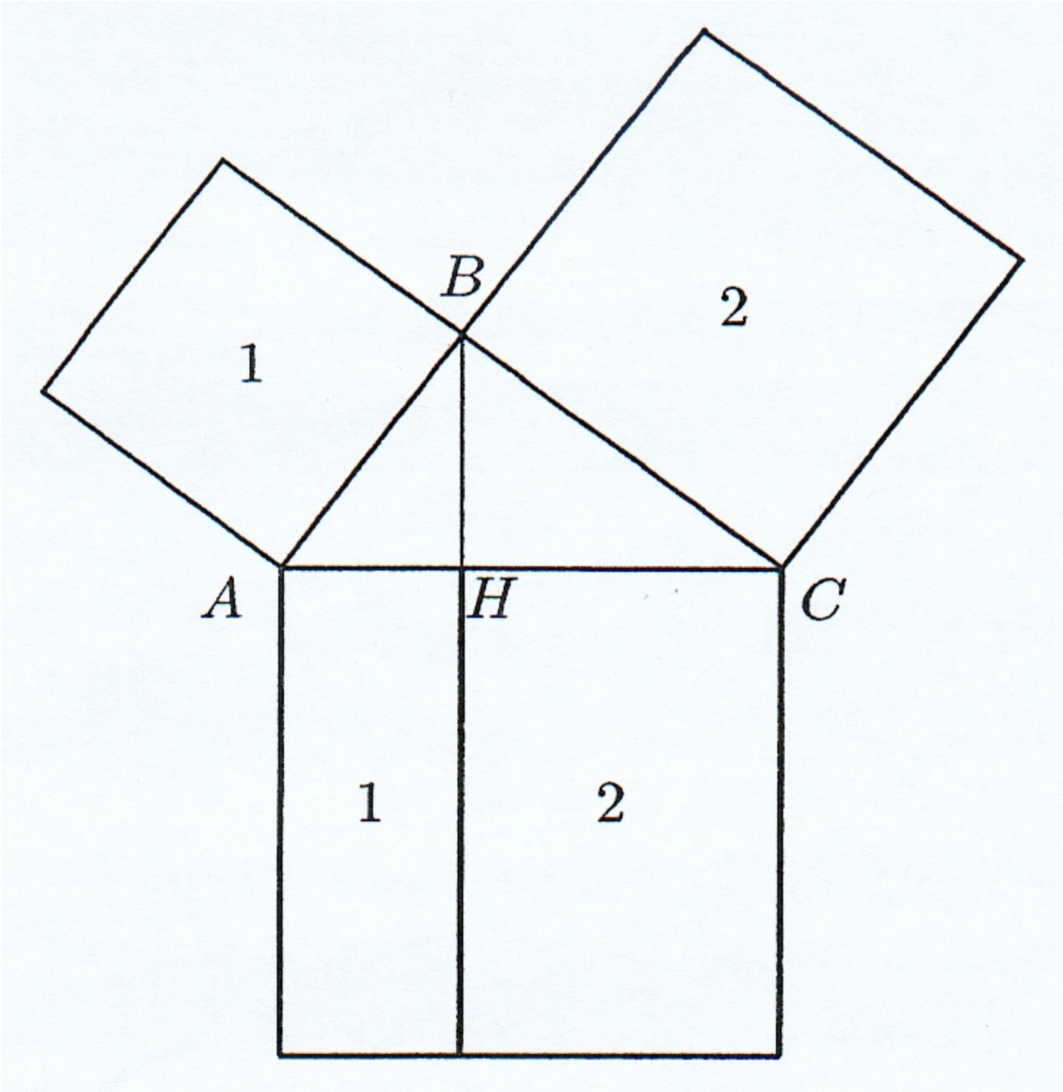
Focus del primo libro



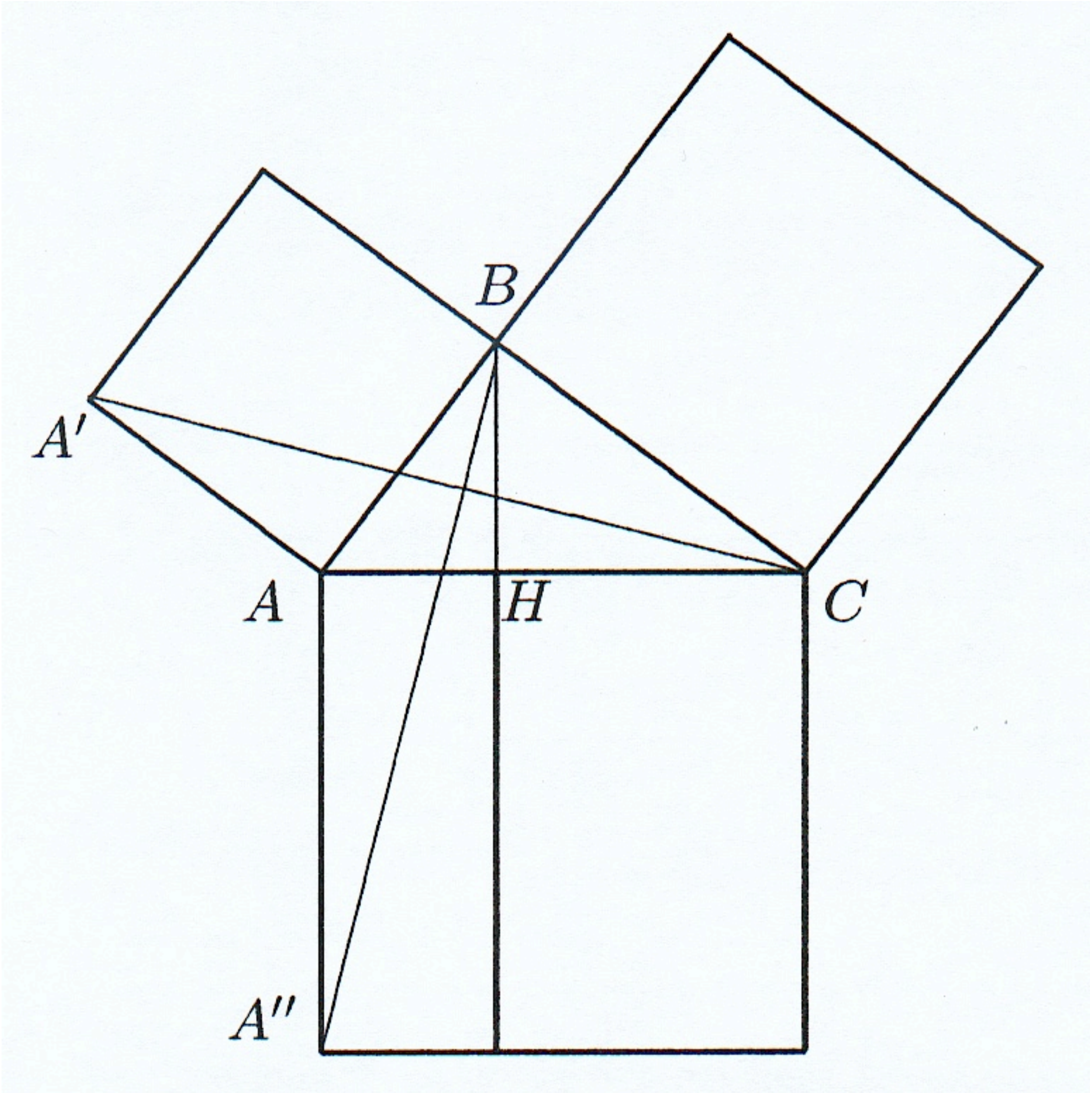
(schema presente in Odifreddi, 2003).

La presentazione dei risultati è **sintetica** [dal semplice al complesso], processo inverso di quello **analitico** [dal complesso al semplice], che ha portato alla loro scoperta

Teorema di Pitagora



Teorema di Pitagora



Inizio degli *Elementi*

Il primo libro degli *Elementi* di Euclide inizia con

23 ὅροι - definizioni o "termini"

5 αἰτήματα – postulati o "richieste"

5!? κοιναὶ ἔννοιαι – assiomi o "nozioni comuni"

Le proposizioni che seguono sono dimostrate sulla base dei postulati e delle nozioni comuni, delle definizioni date e di eventuali proposizioni precedenti già dimostrate.

Sulla necessità della dimostrazione

ARISTOTELE , *Analitici Posteriori I, 13*

Τὸ δ'ὅτι διαφέρει και	Il sapere **che differisce**
τὸ διότι ἐπίστασθαι	dal sapere **perché**

Proclo nel suo *Commento al I libro degli Elementi di Euclide* riferisce che gli Epicurei irridevano il teorema **(**"*In ogni triangolo la somma di due lati è maggiore del lato rimanente*", Proposizione XX del I libro) perché è evidente, anche ad un asino, in quanto se si fosse posto del foraggio in un vertice del triangolo e l'asino ad un altro vertice, l'animale, avido di cibo, avrebbe percorso un solo lato e non due.

Proclo stesso replica a questa osservazione dicendo che "*la mera percezione della verità di un teorema è cosa differente da una dimostrazione scientifica di esso e dalla conoscenza del motivo per cui è vero*".

La matematica tra teoremi e problemi

Le proposizioni in Euclide si dividono in due categorie:

- **problemi** in cui si richiede di costruire un oggetto geometrico con determinate proprietà, ed il loro enunciato è seguito dalla descrizione della costruzione necessaria, e poi dalla dimostrazione che la figura così costruita soddisfa le proprietà richieste;

- **teoremi** in cui si richiede di dimostrare una proprietà inerente una certa configurazione di enti geometrici.

E i porismi?

Il termine porisma ha un duplice significato

– negli *Elementi* indica un teorema accessorio, un corollario, ottenuto come conseguenza di altri (il primo esempio negli *Elementi* si trova dopo la prop. 15 del I libro, sull'uguaglianza degli angoli al vertice),

– nei *Porismi* sembrerebbe indicare una proposizione intermedia tra teorema e problema, la cui natura non è possibile dedurre con sicurezza in base agli scarsi documenti che ci sono pervenuti intorno ad essa (solo citazioni in Pappo, Proclo e Diofanto).

Sui porismi

Pappo afferma che autori usarono i Porismi per imbastire dimostrazioni di mera esistenza (del tipo “qualcosa è dato”), senza *produrre* l’oggetto cercato (e qui *produrre* vorrebbe dire *costruire*).

Un porisma non è quindi un problema perché in un problema è richiesta una costruzione, ne’ un teorema perché in un teorema si richiede di dimostrare che un predicato geometrico si applica a certi oggetti, ed “essere dato” non è un predicato di questo genere (Acerbi, 2007).

In un porisma la configurazione geometrica è assegnata nel senso ampio che alcuni suoi elementi sono dati, altri sono semplicemente sottoposti a vincoli espressi in termini degli elementi dati.

Sui porismi

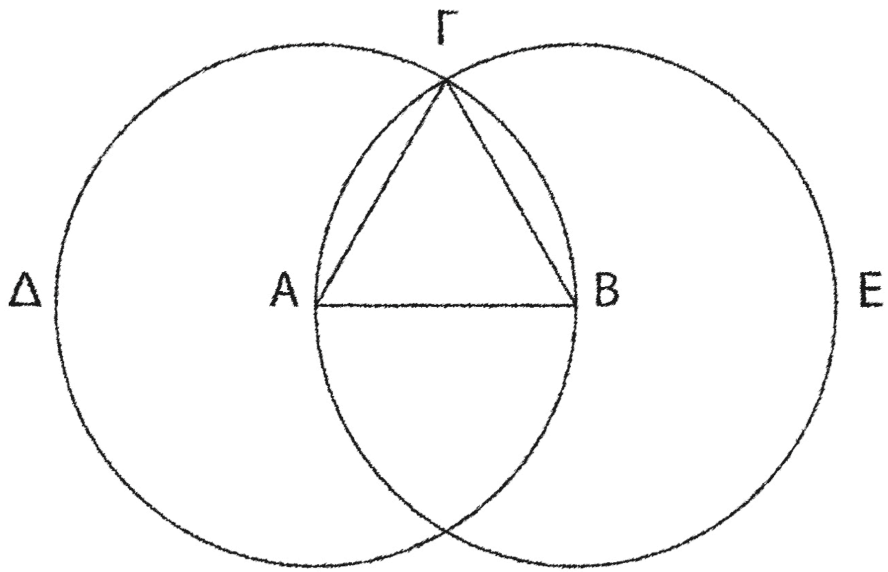
Un porisma è quindi una configurazione geometrica con un certo numero di gradi di libertà.

Alcuni autori sostengono che essendo il porisma una proposizione in cui si determina una relazione tra quantità note e quantità variabili o indeterminate, questo concetto è quello che nell'antichità si avvicinava di più al concetto di funzione.

E la perdita dei Porismi (Πορίσματα) è considerata particolarmente grave perché poteva dare l'idea di quanto Euclide si fosse avvicinato alla geometria analitica.

Esempio di problema in Euclide

Proposizione 1, I libro: *Applicare* (=costruire, n.d.r.) *su di una retta terminata* (=segmento, n.d.r.) *un triangolo equilatero.*

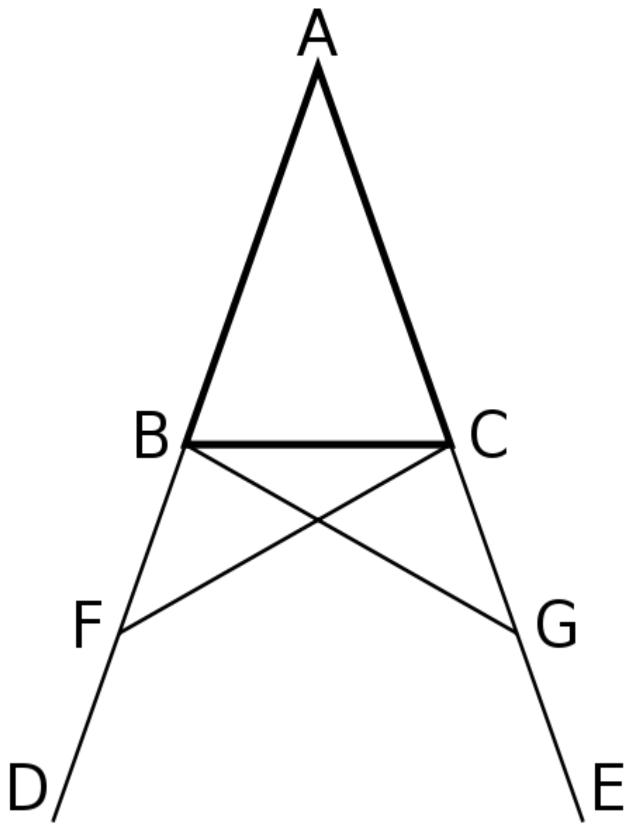


la cui dimostrazione termina con

οπερ εδει ποιησαι (=come dovevasi fare)

Esempio di teorema in Euclide

Prop 5, I. *Nei triangoli isosceli gli angoli alla base sono uguali fra loro, e venendo prolungati i lati uguali gli angoli sotto la base saranno [pure] uguali fra loro.*



la cui dimostrazione termina con
οπερ εδει δεῖξαι (=come dovevasi dimostrare, in latino **quod erat demonstrandum,** da cui l'espressione **qed).**

La matematica tra teoremi e problemi

"A sua volta poi [dopo aver discusso della distinzione tra ipotesi, postulati ed assiomi, ndr] *ciò che deriva dai principi si divide in* ***problemi*** *e* ***teoremi****,*

questi comprendendo le generazioni delle figure e le sezioni e le sottrazioni o somme ed in generale le modificazioni, che possono applicarsi ad esse,

quelli dimostrando le proprietà inerenti a ciascuna [figura].

Come infatti le scienze legate alla produzione materiale partecipano della teoria, proprio allo stesso modo le scienze teoretiche si fanno propri i problemi in analogia con la produzione materiale."

(Proclo, *Commento al I libro degli Elementi di Euclide*, pp. 75-78).

Carattere costruttivo della matematica greca

"*Questa ripartizione fu fonte di un acceso dibattito già in ambito accademico ed almeno fino a Posidonio: un partito riteneva che tutte le proposizioni fossero* ***teoremi****, l'altro che fossero* ***problemi****. Analoga a questa disputa solo in apparenza puramente nominalistica, fu quella tra chi intendeva classificare tutti i principi come "assiomi", e i partigiani delle "richieste" degli Elementi. Tra queste ultime spiccano le prime tre* (i primi tre postulati, ndr), *che assumono come non ulteriormente analizzabile l'esecuzione di tre costruzioni particolarmente elementari*" (Acerbi, 2007, pp. 218-219).

1. Sia stato richiesto di di condurre una linea retta da ogni punto ad ogni punto.

2. E di prolungare senza soluzione di continuità una retta limitata in linea retta.

3. E che con ogni centro e intervallo sia tracciato un cerchio.

Costruttivismo in Euclide

Queste peculiari richieste ed il gran numero di problemi tra le proposizioni attestate in tutto il *corpus* greco giustificano l'accento posto dagli storici sul carattere costruttivo della matematica greca.

Con quali mezzi si possono operare le costruzioni di cui si parla nei primi tre postulati degli *Elementi* di Euclide?

"*Leggendo Euclide, è chiaro che la geometria non è una teoria dello spazio, come la hanno intesa platonici e neoplatonici, bensì una teoria del disegno riga e compasso. Ciò che sembra una evoluzione concettuale può essere in realtà l'accettazione implicita di una filosofia più antica. Per comprendere questo aspetto della geometria euclidea è fondamentale recuperare il suo costruttivismo*" (L. Russo, 2013).

Focus del secondo libro degli Elementi

Se il focus del primo libro degli *Elementi* di Euclide è il Teorema di Pitagora, quello del secondo libro è …
…la quadratura di un poligono qualunque (Prop. 14 del II libro) di cui un passo chiave è la Prop. 5 del II libro, raffigurata nel papiro, che insegna a trasformare un rettangolo nella differenza di due quadrati

Focus del secondo libro

Quadrare un poligono qualunque vuol dire per Euclide trasformarlo con riga e compasso in un quadrato.

Passi chiave: la trasformazione del poligono

- in una serie di triangoli

- in una serie di parallelogrammi, con angolo arbitrario (Proposizione 42 del I libro)

- in un unico parallelogramma (protagonista la Proposizione 43 del I libro, nota come *Teorema dello gnomone*) e quindi, se l'angolo è retto, in un rettangolo

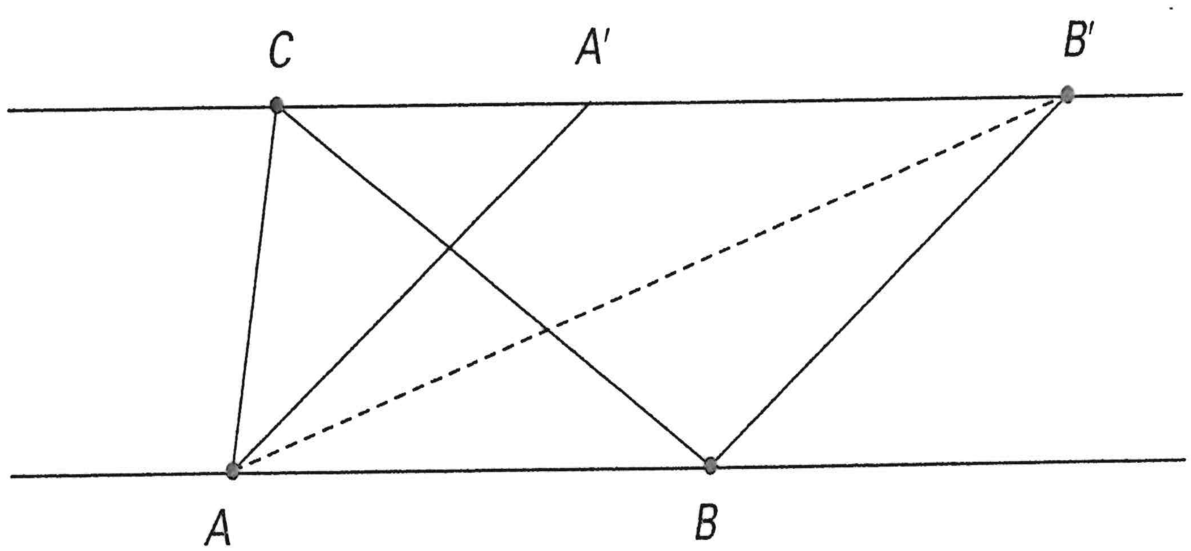
- nella differenza di due quadrati (Proposizione 5 del II libro)

ed infine

- in un quadrato (via Teorema di Pitagora)

Proposizione 41 del I libro

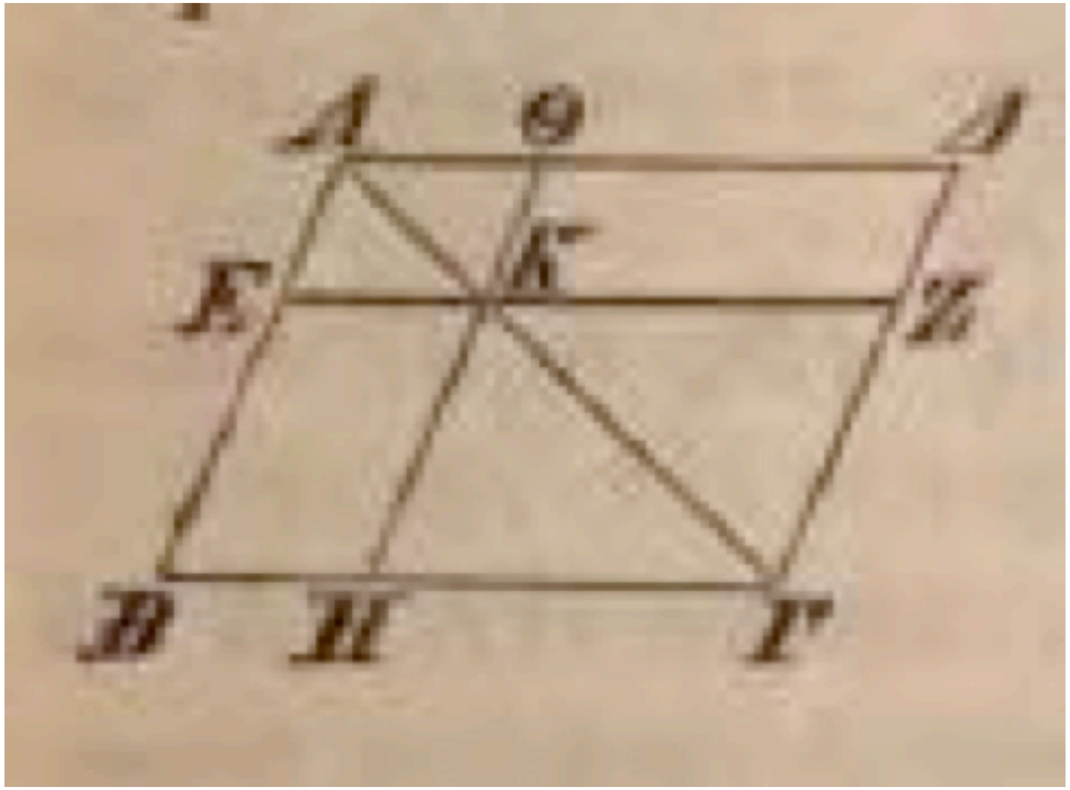
Se un parallelogramma ha la stessa base ed è compreso fra le stesse parallele da cui è compreso un triangolo, il parallelogramma è il doppio del triangolo



Da cui segue la trasformazione di un triangolo in un parallelogramma 'uguale' (in senso euclideo), basta prendere un parallelogramma, compreso fra le stesse parallele, che abbia la base uguale alla metà della base del triangolo (Prop. 42 del I libro).

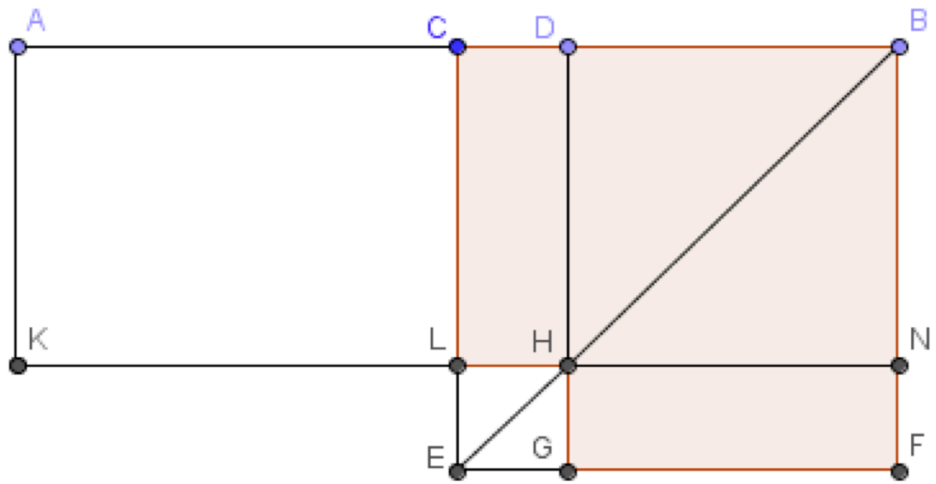
Teorema dello gnomone (Prop. 43 del I libro)

In ogni parallelogramma i complementi (cioè i parallelogrammi BHKE e KZΔΘ, ndr) *dei parallelogrammi posti intorno alla diagonale sono uguali tra di loro*



Proposizione 5 del II libro
(esempio di applicazione ellittica delle aree)

Se si divida una retta in parti uguali e disuguali, il rettangolo compreso dalle parti disuguali della retta, insieme con il quadrato della parte compresa fra i punti di divisione, è uguale al quadrato della metà della retta



Se poniamo AB=2a, e CD=b, si ha AD=a+b e DB=a-b (=DH) si ha

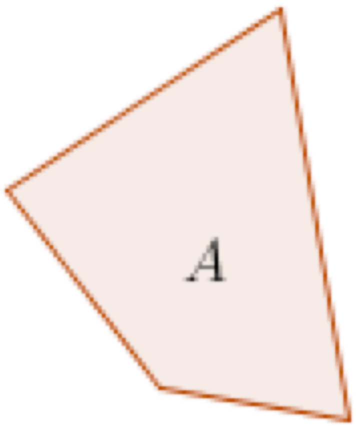
$$(a+b)(a-b)+b^2=a^2$$

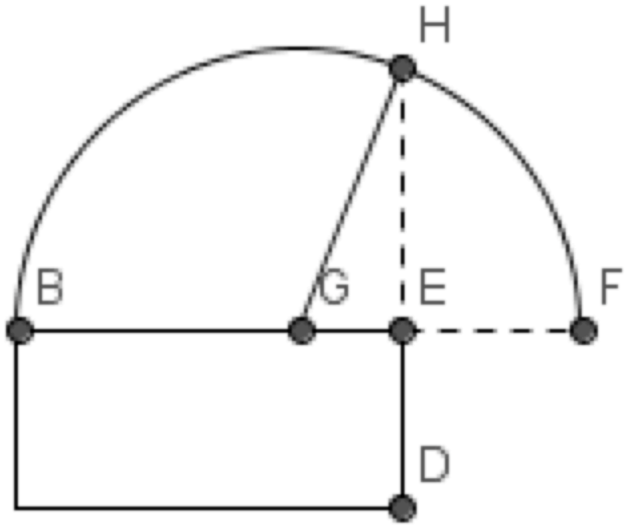
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Questa proposizione dimostra anche che tra tutti i rettangoli isoperimetrici quello di area massima è il quadrato.

Proposizione 14, II libro

Costruire una quadrato uguale ad una figura rettilinea data A

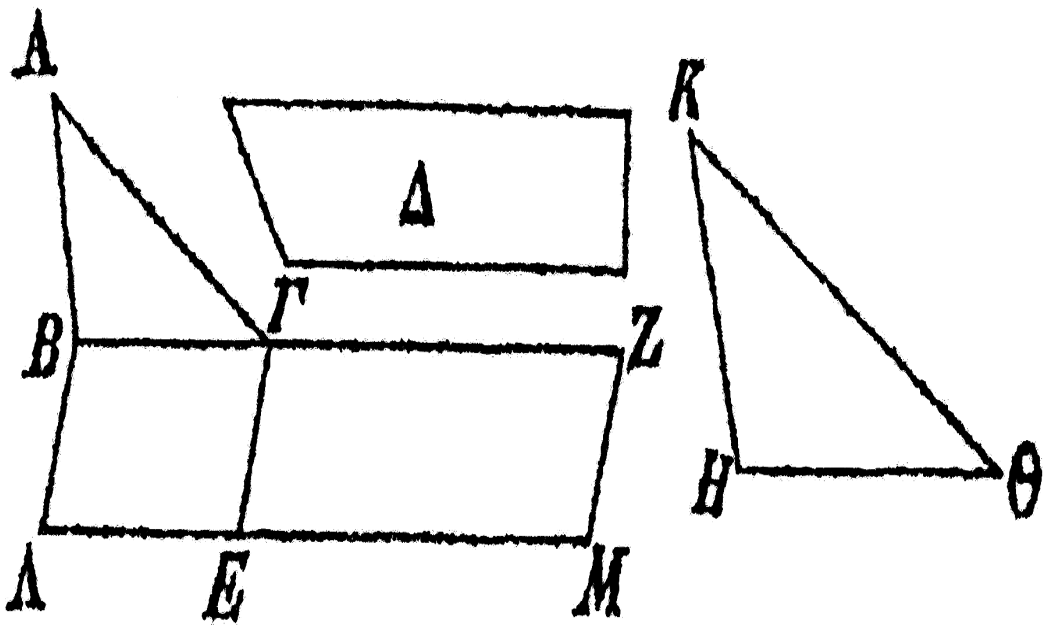




Il rettangolo di lati BE e ED, ‘uguale” alla figura A, è ‘uguale’, via proposizione 5 del II libro, a GF^2-GE^2 (ma essendo GF=GH perché raggi di un cerchio) è ‘uguale’ anche a GH^2-GE^2 e quindi, per il teorema di Pitagora, è ‘uguale’ anche a HE^2, che è il quadrato cercato.

Generalizzazione del teorema 14 del II Libro: proposizione 25 del VI libro

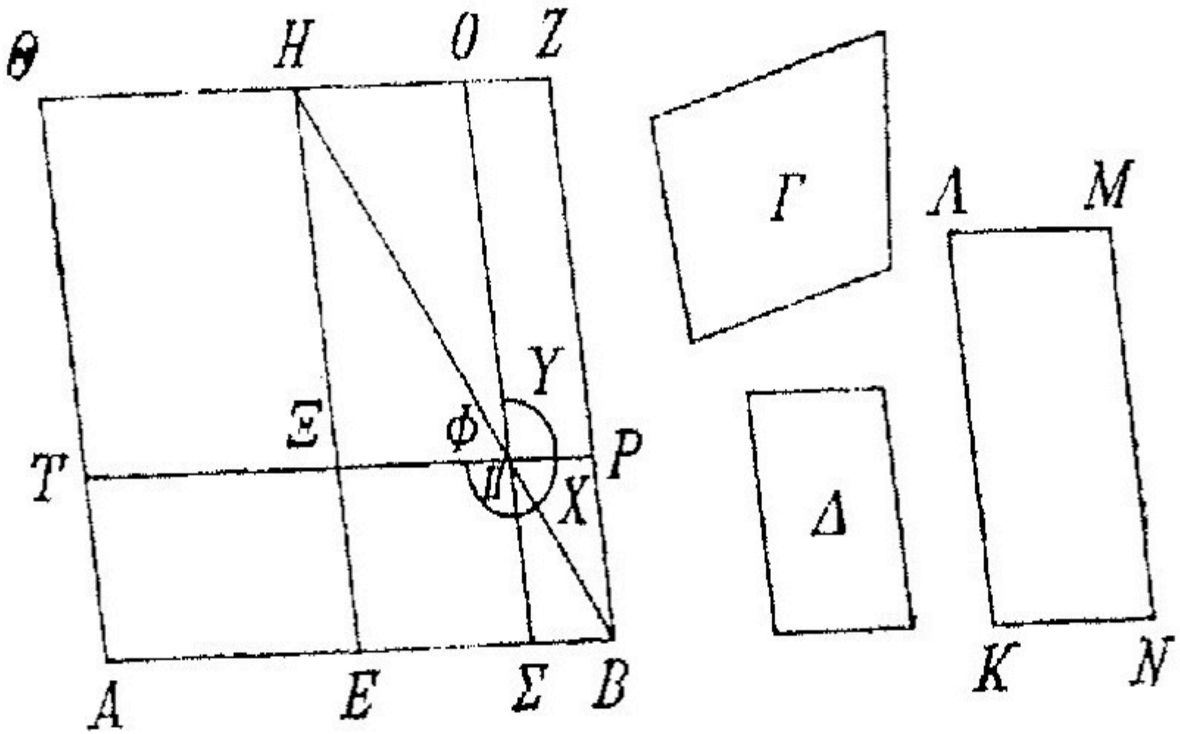
Costruire un poligono che sia simile ad un poligono dato [ΚΗΘ] *ed insieme uguale ad un altro poligono dato* [Δ]



Applicazione ellittica [o per difetto] delle aree

Proposizione 28, VI libro

Applicare ad una retta data un parallelogramma uguale ad un poligono dato [Γ] e che manchi di un parallelogramma simile ad un parallelogramma dato [Δ] ...



Applicazione ellittica [o per difetto] delle aree

....occorre inoltre che il poligono dato [Γ] non sia maggiore del parallegramma descritto sulla metà della retta e simile alla figura mancante [cioè al parallelogramma Δ]

Siamo in presenza qui di un esempio di *diorisma*, cioè caso di separazione tra possibilità ed impossibilità di risoluzione di un problema.

Applicazione ellittica [o per difetto] delle aree

Se facciamo l'esempio di un rettangolo, e la parte mancante deve essere simile ad un quadrato, si ottiene l'equazione

$(a-x)x=\Gamma$

da cui

$x^2-ax+\Gamma=0$

la quale, per avere soluzioni, deve avere il discriminante non negativo, cioè

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2-\Gamma\geq 0$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2\geq\Gamma$$

che è esattamente la condizione posta da Euclide

Ma negli **Elementi** non c' è solo …

Geometria

Aritmetica

Algebra

ma anche …

la teoria delle grandezze commensurabili e non commensurabili (che verrà ripresa da … Dedekind)

il metodo di esaustione (anticipazione de … il calcolo integrale)

per finire …

… sembra quindi giustificata una interpretazione che tratteggi Euclide come

“*uno scienziato (in senso molto più moderno di quanto non si sia precedentemente ammesso) intento a produrre risultati coerenti e stabili, in grado di rendere conto della realtà fenomenica, e al riparo da dispute filosofiche*” (Migliorato e Gentile, 2005).

Bibliografia

Acerbi F. (a cura di), *Euclide. Tutte le opere*, Bompiani, Milano, 2007.

Enriques F., *Gli elementi di Euclide e la critica antica e moderna*, A. Stock, Roma, 1925.

Geymonat L., *Storia del pensiero scientifico e filosofico, Vol. I,* Garzanti, Milano, 1973.

Heath T.L., *The thirteen books of Euclid's Element*s, Cambridge University Press, 1908.

Migliorato R. - Gentile G., Euclid and the scientific thought inthe third century B.C., *Ratio Mathematica*, n.15, 2005, pp.37-64.

Odifreddi P., *Divertimento geometrico, Le origini geometriche della logica da Euclide a Hilbert,* Bollati Boringhieri, Torino, 2003.