

Balli caraibici e Matematica

di Aurelio Di Caprio

1. Introduzione

I balli caraibici sono molto diffusi e praticati in tutto il mondo, e ne esistono di varie tipologie. La tipologia che attualmente riveste maggiore interesse, soprattutto tra i giovani, è quella dei balli caraibici di coppia, ovvero, la *salsa*, il *merengue* e la *bachata*. In questo articolo, focalizzeremo la nostra attenzione sul *merengue* e sulla *bachata* e, soprattutto, sulla Matematica che si cela dietro alcune loro figure.

2. Matematica applicata al *merengue*

Il *merengue* è, appunto, una danza caraibica di coppia nata molto probabilmente nella Repubblica Dominicana o ad Haiti intorno alla metà del XVI secolo. Come la maggior parte dei balli latino-americani la musica del *merengue* è caratterizzata da un ritmo molto veloce, quindi, anche le rispettive figure di movimento sono molto veloci. In tali figure si usano soprattutto le spalle ed i piedi. Un'importante caratteristica del *merengue* che lo distingue dalle altre danze caraibiche è il profondo contatto tra i due partner di ballo, che danzano strettamente allacciati in gran parte delle figure. Le figure del *merengue* comprendono una figura di base ed altre figure che consistono in una serie di volteggi semplici ma d'effetto. Molte figure, anzi, forse tutte le figure seguono modelli matematici ben precisi. Consideriamo, ad esempio, le figure denominate *base sul posto*, *Para arriba-Para abajo*, *Vuelta a 2 battute*, *Vuelta ad 1 battuta*. Vedremo che sono rappresentate da elementi di sottogruppi dei movimenti diretti e inversi del piano euclideo \mathcal{E}^2 .

Consideriamo un uomo e una donna che ballano una coreografia di *merengue*. Sia dato il punto A del piano \mathcal{E}^2 che rappresenta l'uomo e il punto B del piano che rappresenta la donna. Allora, consideriamo il segmento AB del piano \mathcal{E}^2



che rappresenta la distanza tra i due partner attaccati per eseguire la coreografia. Prima di analizzare la Matematica dietro i passi del *merengue*, è opportuno specificare che il tempo musicale del *merengue* è costituito da 8 battiti, quindi, 8 istanti del tempo t ; gli 8 battiti formano

una battuta, e ogni figura occupa una o più battute. A ogni battito, sia l'uomo che la donna battono il piede a terra, in un continuo alternarsi del piede destro e del piede sinistro. Analizziamo ora le figure citate all'inizio del paragrafo.

1. Base sul posto.

Come si può intuire dal nome della figura, sia l'uomo che la donna restano fermi sul posto per tutti gli 8 battiti, sbattendo solo i piedi a terra ad ogni battito, quindi, il segmento AB resta fisso in \mathcal{E}^2 , pertanto, non compie alcun movimento. Dunque, ad AB è applicato il gruppo banale identico $\{id\}$, ove id è l'applicazione identica dei punti del piano \mathcal{E}^2 .

2. Para arriba – Para abajo .

La figura *Para arriba-Para abajo* occupa una sola battuta, quindi 8 battiti. Durante i primi 4 battiti, l'uomo e la donna compiono il *Para arriba*, che consiste nel compiere una traslazione in avanti rispetto all'uomo, quindi, l'uomo cammina in avanti e la donna cammina all'indietro. Nei successivi 4 battiti, compiono il *Para abajo*, che è il contrario del *Para arriba*, quindi, si compie una traslazione all'indietro rispetto all'uomo. Dunque, il segmento AB compie ben 8 traslazioni, 4 nella direzione individuata dalla retta contenente il segmento AB e nel verso che va da A a B, e 4 nella stessa direzione ma nel verso opposto. Le traslazioni compiute in tale figura appartengono ad un sottogruppo del gruppo delle traslazioni di \mathcal{E}^2 ; tale sottogruppo è un gruppo ciclico infinito generato dalla traslazione di vettore AM, con M punto medio del segmento AB, che denotiamo con τ_{AM} , quindi,

$$T_{AM} = \langle \tau_{AM} \rangle = \{ \tau_{AM}^i \mid i \in \mathbb{Z} \}$$

Si ha ad esempio, $\tau_{AM}(A) = M$, $\tau_{AM}(M) = B$, $\tau_{AM}^2(A) = \tau_{AM}(B)$, e così via.

3. Vuelta a 2 battute – vuelta a 1 battuta

Come si può dedurre dal nome, la figura *Vuelta a 2 battute* occupa ben 2 battute; è una figura in cui l'uomo batte i piedi sul posto, e dunque, rimane fisso in un punto del piano e la donna invece si sposta compiendo una rotazione del piano che ha centro nell'uomo. Quindi, se consideriamo il segmento AB, con A l'uomo e B sempre la donna, il punto A resta fisso, mentre il punto B compie una rotazione di angolo $\pi/4$ dal primo battito della prima battuta che marca la figura, all'ultimo battito della seconda ed ultima battuta, nella quale torna al punto di partenza. Quindi, AB compie una rotazione di centro A e angolo $\pi/4$, e, dunque, a tutta la figura è applicato il gruppo di rotazioni di \mathcal{E}^2

$$R_{A, \frac{\pi}{4}} = \left\{ \rho_{A, \frac{\pi}{4}}^n \mid n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \right\}$$

che è un gruppo ciclico di ordine 8 generato dalla rotazione $\rho_{A, \frac{\pi}{4}}$. Risulta

$$\forall l, m \quad \rho_{A, \frac{\pi}{4}}^l \circ \rho_{A, \frac{\pi}{4}}^m = \rho_{A, \frac{l\pi + m\pi}{4}} .$$

Il segmento AB ruota ad ogni 2 battiti. Quindi nei primi 2 battiti si ha $\rho_{A, \frac{\pi}{4}}(B) = B'$, nei successivi 2 battiti $\rho_{A, \frac{\pi}{4}}^2(B) = \rho_{A, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}}(B) = \rho_{A, \frac{\pi}{2}}(B) = B''$, e così via fino al settimo e ottavo battito della seconda ed ultima battuta in cui risulta $\rho_{A, \frac{\pi}{4}}^8(B) = id(B) = B$, dove si torna al punto di partenza. Consideriamo ora il sottogruppo di $R_{A, \frac{\pi}{4}}$ generato dalla rotazione $\rho_{A, \frac{\pi}{2}}$. Esso ha ordine 4 e possiamo scriverlo esplicitamente

$$R_{A, \frac{\pi}{2}} = \left\{ id, \rho_{A, \frac{\pi}{2}}, \rho_{A, \pi}, \rho_{A, \frac{3\pi}{2}} \right\}$$

Tale gruppo è applicato alla figura *Vuelta ad 1 battuta*, che è uguale a quella a 2 battute, con la differenza che AB ruota di $\frac{\pi}{2}$ invece che di $\frac{\pi}{4}$, e, ovviamente, come si può dedurre dal nome della battuta, marca una sola battuta, quindi, solo 8 battiti. Se consideriamo un sistema di riferimento cartesiano xOy, nel quale supponiamo che A coincida con l'origine O e B sia un punto del semiasse positivo delle x, ci rendiamo conto che sia nella *vuelta a 2 battute* che nella *vuelta ad 1 battuta*, il segmento AB marca tutti i 4 quadranti del sistema xOy e la rotazione $\rho_{A, \frac{\pi}{4}}$ è rappresentata dalle equazioni

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mentre $\rho_{A, \frac{\pi}{2}}$ è rappresentata dalle equazioni

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ripetendo tutto in termini di coordinate cartesiane, nella *Vuelta a 2 battute*, avendo supposto che A coincide con O e B con un punto del semiasse positivo della x, si ha che nei primi 4 battiti AB ruota nel primo quadrante, e si può verificare che al terzo e quarto battito il punto B si trova nel semiasse positivo della y. Lo stesso accade nei successivi battiti. In maniera del tutto analoga, nella *Vuelta ad 1 battuta* si verifica che AB per tutti gli 8 battiti percorre i 4 quadranti.

3. Matematica applicata alla *bachata*

Altro ballo caraibico di coppia molto conosciuto è la *bachata*. Mentre il merengue ha un ritmo alquanto veloce, la *bachata* presenta un ritmo più lento e dolce, e i testi delle canzoni trattano il tema dell'amore in tutte le sue sfumature, sia idilliache sia drammatiche. L'origine della *bachata* risale agli anni Quaranta del secolo scorso, ed era diffusa solamente nei quartieri più poveri della Repubblica Dominicana. All'epoca, la *bachata* era anche chiamata la *musica de amargue* ("musica da amarezza" in spagnolo), poiché i testi delle canzoni esprimevano le situazioni drammatiche e difficili relative a quel contesto sociale. Le classi sociali più ricche disprezzavano questo genere musicale, sia perché era diffuso tra i poveri, sia perché le movenze che caratterizzavano questo ballo erano considerate oscene e volgari. La *bachata* dell'origine, infatti, non presentava molte figure come la *bachata* moderna, ma bensì l'uomo e la donna restavano abbracciati per tutta la durata del brano musicale, dondolandosi ed effettuando un provocatorio movimento d'anca al quarto battito musicale. Il ballo restò confinato nelle classi povere fino agli inizi degli anni Ottanta, in cui la *bachata* subì un processo di rivalutazione grazie ai mezzi di comunicazione ed agli sforzi di molti compositori. Il primo compositore a rivoluzionare la *bachata* fu Luis Segura con il brano *Pena por ti*, grazie al quale la *bachata* iniziò a diffondersi in tutte le classi sociali, anche quelle più ricche che erano sempre state riluttanti. Altri compositori di ottimo livello permisero alla *bachata* di uscire dai confini dominicani e di riscuotere pian piano un notevole successo in tutto il mondo. La *bachata* riscosse successo in Italia alla fine degli anni Novanta, e lo sta riscuotendo tuttora. Proprio in Italia sono stati creati altri generi derivanti dalla *bachata*; uno in particolare è il *bachatango*, le cui figure sono figure di *bachata* condite da tecniche di tango.

Anche le figure di *bachata* seguono precisi modelli matematici. Prima di analizzarle, è opportuno specificare che il tempo musicale della *bachata* è di 4/4, quindi da una battuta costituita da 4 battiti uguali. La frase musicale è composta da 2 battute, quindi, da 8 battiti. In ogni figura di *bachata*, inoltre, accade sempre che al quarto e ottavo battito si faccia uno STEP con il piede, ossia, un passo senza peso con una sola punta del piede appoggiata. Detto ciò, consideriamo le seguenti figure di *bachata*: *Base sul posto*, *Passo Base*, *Mirala*. Consideriamo sempre il segmento AB nel piano euclideo \mathcal{E}^2 , dove il punto A rappresenta l'uomo e il punto B rappresenta la donna.

1. *Base sul posto*

La *base sul posto* della *bachata* è simile alla base sul posto del merengue e quindi, l'uomo e la donna restano fissi sul posto per tutti gli 8 battiti, con la differenza che al quarto e ottavo battito compiono uno STEP. Pertanto, come accade nel merengue, anche a tale figura di *bachata* è applicato il gruppo identico {id}.

2. *Passo Base*

In tale figura, sia l'uomo che la donna avanzano perpendicolarmente alla direzione individuata dal loro segmento AB, verso sinistra nei primi 4 battiti e verso destra nei successivi 4 battiti. Possiamo allora dedurre che il segmento AB compie una traslazione τ_u , con u vettore perpendicolare ad AB, e la compie ben 2 volte nella prima battuta, mentre, nella seconda battuta, AB compie altre 2 volte la stessa traslazione ma nel verso opposto a quello della prima

battuta. Pertanto, il *Passo Base* è rappresentato da elementi del sottogruppo delle traslazioni del piano euclideo generato da τ_u , quindi,

$$T = \langle \tau_u \rangle = \{ \tau_u^i = \tau_{iu} \mid i \in \mathbb{Z} \}$$

che è anch'esso un gruppo ciclico infinito. Per comodità, possiamo supporre che il vettore u abbia lunghezza pari alla metà della lunghezza di AB.

3. *Mirala*

La figura *Mirala* consiste nel giro della donna e nel giro dell'uomo. Si svolge in tale maniera: nei primi 4 battiti, l'uomo compie gli stessi passi che compie nella prima battuta del *Passo Base*, mentre, la donna, segue l'uomo avanzando e girando su se stessa. Nella battuta successiva accade il contrario, cioè la donna compie gli stessi passi della seconda battuta del *Passo Base*, mentre l'uomo, in maniera del tutto simmetrica alla donna nella prima battuta, avanza girando su se stesso. Dunque, consideriamo il punto C esterno alla retta AB, che supponiamo appartenga alla retta passante per A e perpendicolare ad AB, e tale che la distanza tra A e C sia pari alla metà del segmento AB. Sappiamo che per C passa un'unica retta l parallela alla retta AB. Sia M il punto medio di AB. Deduciamo che nel *Mirala* accade che nei primi 4 battiti il segmento AM compie la traslazione di vettore τ_u , con u vettore uguale al vettore AC, mentre, il segmento MB compie un ribaltamento di asse la retta l , che denotiamo con σ_l . Nei successivi 4 battiti, il segmento $A'M' = \tau_u(\tau_u(AM))$, compie il ribaltamento σ_l che riporta $A'M'$ nel segmento di partenza AM, invece, $M'B' = \sigma_l(MB)$, compie 2 volte la traslazione τ_{-u} che riporta $M'B'$ nel segmento di partenza MB. Possiamo allora dedurre che sia al segmento AM che al segmento MB sono applicati i movimenti appartenenti al gruppo generato da τ_u e σ_l , che possiamo denotare con $\langle \tau_u, \sigma_l \rangle$.

4. Conclusione

Attualmente, il merengue e la *bachata* sono molto diffusi soprattutto tra i giovani. Sono sempre più le scuole di ballo in cui si insegnano, così come anche i locali in cui si organizzano serate a ritmo di *merengue* e *bachata*. Pur essendo in linea di massima a scopo di lucro, la Matematica non ha risparmiato neppure questo a quanto pare. La bellezza e la precisione dei passi che si insegnano hanno i loro fondamenti in oggetti matematici ben precisi, in questo caso movimenti del piano euclideo. Dunque, l'apparente astrazione della Matematica, ancora una volta, altro non è che una regolamentazione della nostra realtà, soprattutto quotidiana. Che mondo sarebbe senza la Matematica?