5 – Le radici aritmetiche e le potenze con esponente razionale

La definizione di potenza come prodotto generalizzato della base tante volte quante indicate nell'esponente, non si adatta al caso in cui l'esponente sia fratto, dunque bisogna trovargli un altro significato.

Intanto dimostriamo che, partendo dalla relazione binaria su $\Re_+$ di potenza n-ma di un numero reale, la base di tale potenza corrisponde a una potenza che ha per base il numero reale positivo e per esponente il reciproco di n:

$$\forall x \in \Re_+ \exists n \in N - \{0\} \wedge \exists a \in \Re_+ \ni' \ x^n = a \Leftrightarrow x = a^{\frac{1}{n}}$$

Ipotesi:
$\forall x \in \Re_+ \exists n \in N - \{0\} \wedge \exists a \in \Re_+ \ni' \ x^n = a$
Tesi:
$\exists y \in \Re \ni' x = a^y$
Dimostrazione:
partendo dall'ipotesi, con riguardo all'esponente della x, possiamo osservare che:
se n=0 $\Rightarrow x^0=1^y \ \forall \ y \in \Re \Rightarrow$ y può essere qualsiasi numero Reale
se n=1 $\Rightarrow x^1=a^1 \Rightarrow$ y=1, y assume il solo valore 1

se n>1, allora dovranno valere contemporaneamente le seguenti due condizioni:

$$\begin{cases} x^n = a \\ x = a^y \end{cases} \Leftrightarrow a^1 = x^n = (a^y)^n = a^{yn} \Leftrightarrow (considerando\ solo\ gli\ esponenti)\ 1 = yn \Leftrightarrow y = \frac{1}{n}$$

e così abbiamo dimostrato che non solo y esiste, ma è uguale a $\frac{1}{n}$.
Ancora di più: y non esiste nel caso n=0 perché un denominatore non può mai essere uguale a zero e, nel caso particolare n=1, y restituisce x=a.

Ora però dobbiamo dare alle potenze di numeri reali positivi con esponente fratto un significato e allora, visto che l'operazione inversa della potenza è la radice, estendiamo anche alle potenze con esponente fratto il significato di radice aritmetica:

$$\forall x \in \Re_+ \exists q \in Q - \{0\} \wedge \exists a \in \Re_+ \ni' \ x^q = a \Leftrightarrow x = \sqrt[q]{a^n} \ essendo\ q = \frac{n}{d} \wedge (n,d) \in N \times (N - \{0\})$$