4.5 Equazioni che si risolvono con la scomposizione del polinomio col metodo di Ruffini

Esempio:

$$2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$$

i divisori del termine noto 2 sono: ±1 e ±2, li sostituisco al posto della x nel polinomio da scomporre finché non ottengo zero.

$$P(-1) = 2(-1)^4 + (-1)^3 - 11(-1)^2 - 1 + 2 = 13$$

$$P(1) = 2(1)^4 + (1)^3 - 11(1)^2 + 1 + 2 = -5$$

$$P(-2) = 2(-2)^4 + (-2)^3 - 11(-2)^2 - 2 + 2 = 32 - 8 - 44 + 2 = 16$$

$$P(2) = 2(2)^4 + (2)^3 - 11(2)^2 + 2 + 2 = 32 + 8 - 44 + 2 + 2 = 0$$

$$P(2) = 0 \Rightarrow x - 2 \ \ \textit{binomio divisore}$$

divido il polinomio di partenza per il binomio x-2 usando la Regola di Ruffini.

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 1 & -11 & 1 & 2 \\ 2 & & 4 & 10 & -2 & -2 \\ & 2 & 5 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

ottenendo il quoziente:

$$Q(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 1$$

itero il procedimento per abbassare di grado anche questo polinomio:

$$Q(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - (-1)^1 - 1 = -1$$

$$Q(1) = 2(1)^3 + 5(1)^2 - (1) \ \ - 1 = 5$$

cerco tra le frazioni aventi per numeratore i divisori del termine noto e per denominatore i divisori del 1° coefficiente: $\pm\frac{1}{2}$

Il resto della divisione è:

$$Q(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2})^3 + 5(-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) - 1 = \frac{1}{2}$$

$$Q(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^3 + 5(\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2}) - 1 = 0$$

$$Q(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x - \frac{1}{2} \ \textit{binomio divisore}$$

divido il polinomio di Q(x) per il binomio x - 1/2 usando la Regola di Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & & 1 & 3 & 1 \\ \hline & 2 & 6 & 2 & 0 \end{array}$$

ottenendo il quoziente:

$$Q'(x) = 2x^2 + 6x + 2$$

Allora il polinomio di partenza è scomponibile nel prodotto di tre fattori:

$$2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = (x-2)(x-\frac{1}{2})(2x^2 + 6x + 2)$$

Ora posso risolvere l'equazione applicando la legge di annullamento del prodotto e la formula risolutiva delle equazioni di 2° grado:

$$2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-\frac{1}{2})(2x^2 + 6x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-2) = 0 \vee (x-\frac{1}{2}) = 0 \vee (2x^2 + 6x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Per esercizio, abbiamo svolto le seguenti equazioni:

$$a)\ x^3 - 2x - 4 = 0; \quad b)\ x^3 + 3x^2 - 4 = 0;$$
$$c)\ x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8 = 0; \quad d)\ x^4 - 4x^3 + x^2 + 12x - 12 = 0.$$

trovando le rispettive soluzioni:

$$a)\ x = 2 \vee \textit{due soluzioni complesse}; \quad b)\ x = -2 \ \textit{due volte} \vee x = 1;$$
$$c)\ x = 2 \ \textit{due volte} \vee x = -2 \vee x = 1; \quad d)\ x = 2 \ \textit{due volte} \vee x = \pm\sqrt{3}.$$