



MODELLI DINAMICI IN BIOLOGIA E SCIENZE SOCIALI

a cura di Gian Italo Bischi

La descrizione di sistemi del mondo reale mediante modelli matematici è in genere un processo difficile e dagli esiti incerti, che richiede da un lato una conoscenza approfondita e sintetica del sistema che si vuole descrivere e dall'altro una conoscenza degli strumenti matematici adatti a quel tipo di descrizione e ai risultati che si desidera ottenere. Spesso la costruzione di un modello avviene attraverso successivi raffinamenti, modifiche e correzioni. In questo inserto si descrive questo processo, dapprima a grandi linee poi attraverso specifici esempi, mettendo in luce i punti di forza della modellistica matematica e le sue debolezze. I modelli considerati sono di tipo dinamico, cioè descrivono sistemi che evolvono nel tempo, utilizzando le tecniche matematiche descritte nel precedente inserto pubblicato sul n. 3 della rivista.



DALLA REALTÀ AI MODELLI MATEMATICI

Gian Italo Bischi

Un modello matematico è una rappresentazione, formale e semplificata, di un «pezzo» di realtà, una sorta di caricatura che tende ad enfatizzarne gli aspetti salienti e misurabili in termini numerici.

Matematica come modello della realtà

Per descrivere il processo che porta alla realizzazione e allo studio di un modello matematico facciamo ricorso a uno schema geometrico¹.

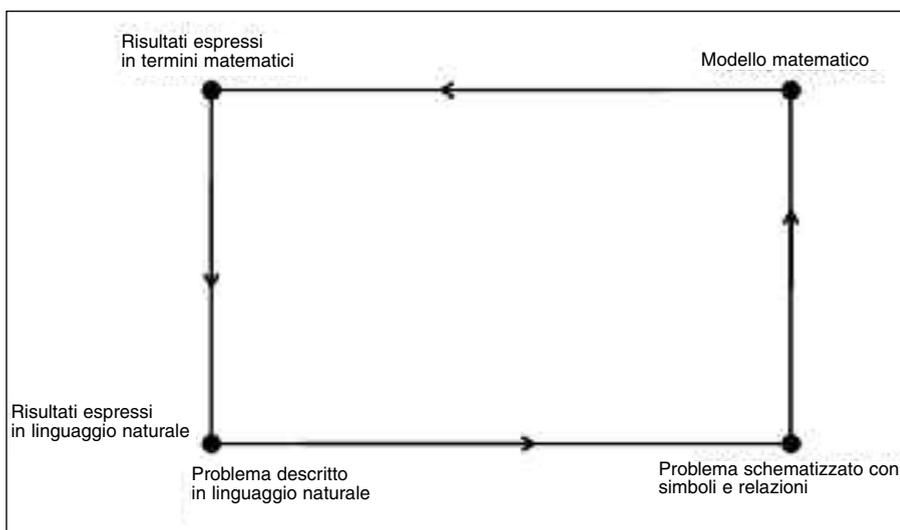
Immaginiamo di percorrere in senso antiorario un ipotetico rettangolo partendo dal vertice inferiore a sinistra, dove si pone il problema espresso nel linguaggio naturale (Fig. 1); il bordo inferiore, percorso da sinistra a destra, rappresenta il processo di traduzione in simboli e relazioni (ma ancora a parole) per arrivare al vertice in basso a destra dove si immagina di avere lo stesso problema schematizzato, la «caricatura» ottenuta basandosi sull'intuizione e l'esperienza di chi ha capito a fondo il problema e si appresta a tradurlo in termini matematici. Questa traduzione avviene lungo il lato verticale destro, e una volta raggiunto il vertice in alto a destra abbiamo in mano il vero modello matematico, espresso da simboli algebrici ed equazioni. Il tratto orizzontale superiore, percorso da destra a sinistra, rappresenta la fase puramente matematica per arrivare nel vertice in alto a sinistra con proposizioni e/o soluzioni numeriche. A questo punto occorre però ridiscendere e chiudere il circuito percorrendo verso il basso il lato di sinistra per «tornare nel mondo reale» a confrontare le soluzioni ottenute con il problema originario e verificare in modo empirico la correttezza dei risultati. Il compito del matematico è pertanto quello di percorrere in lungo e in largo il rettangolo nel tentativo di risolvere problemi concreti, in collaborazione con specialisti di vari settori, e non di limitarsi a brevi incursioni solo lungo il bordo superiore, atteggiamento tipico di quei matematici cosiddetti «puri» che vedono ogni riferimento alla realtà come uno svilire o declassare il loro lavoro teorico. In realtà la matematica e le sue applicazioni si sono sempre alimentate a vicenda, e in sinergia mostrano tutto il loro potenziale dando vita a nuove teorie e modelli applicabili alle più svariate discipline.

L'utilizzo del computer ha permesso di realizzare modelli senza limiti pratici nel numero e nella complessità delle equazioni che li costituiscono, e quindi in grado di tener conto di un numero molto elevato di dettagli significativi. Questo è l'approccio dei modelli di simulazione, utili nell'analisi di particolari sistemi, ma poco adatti a fornire informazioni generali. L'alternativa è di introdurre drastiche approssimazioni, trascurando tanti dettagli, per conservare nel modello solo gli elementi ritenuti più significativi. Modelli di questo tipo vanno quindi apprezzati per la loro capacità di fornire informazioni qualitative e generali su ampie classi di sistemi, piuttosto che per la loro precisione o per la descrizione quantitativa del comportamento di particolari sistemi. Sono questi i tipi di modelli di cui ci occupiamo in questo inserto.

Modellizzazione e studio delle scienze

L'utilizzo di modelli e metodi matematici per descrivere sistemi e situazioni reali, e per affrontare razionalmente problemi di controllo e previsione della loro evoluzione, si sta diffondendo sempre di più. Dai primi modelli utilizzati nello studio della fisica, e che costituiscono la solida base per la risoluzione di molti problemi pratici dell'ingegneria e altre scienze applicate, la modellizzazione matematica è stata introdotta, talvolta con difficoltà non trascurabili, anche in di-

1. Questa descrizione è stata proposta da Angelo Guerraggio nella prima lezione di «Matematica e Realtà» a Urbino, novembre 2007.



scipline tradizionalmente considerate poco adatte ad un simile approccio, quali la biologia, l'economia, la finanza e le scienze sociali. Questa espansione della matematica applicata ha fatto parlare di «irragionevole successo della matematica nello studio delle scienze» (dal titolo di un articolo del premio Nobel per la fisica Eugene Wigner). Questo successo era del resto stato profetizzato quasi quattro secoli prima da Galileo (il grande libro dell'Universo è scritto in lingua matematica...) e da allora la fisica si è servita della matematica come proprio linguaggio e strumento di lavoro, formulando ogni suo problema in termini tali da renderlo adatto ad essere trattato matematicamente. Ma già agli inizi del XX secolo altre discipline iniziavano a ispirarsi ai metodi della fisica matematica per formulare e affrontare correttamente i propri problemi. Questo fu espresso con esemplare chiarezza dal grande fisico matematico italiano Vito Volterra (1860-1940) nel seguente brano tratto dal suo discorso inaugurale per l'anno accademico 1901-1902 dell'Università di Roma: «Il matematico si trova in possesso di uno strumento mirabile e prezioso, creato dagli sforzi accumulati per lungo andare di secoli dagli ingegni più acuti e dalle menti più sublimi che siano mai vissute. Egli ha, per così dire, la chiave che può aprire il varco a molti oscuri misteri dell'universo, ed un mezzo per riassumere in pochi simboli una sintesi che abbraccia e collega vasti e disparati risultati di scienze diverse [...]. Ma è intorno a quelle scienze nelle quali le matematiche solo da poco tempo hanno tentato d'introdursi, le scienze biologiche e sociali, che è più intensa la curiosità, giacché è forte il desiderio di assicurarsi se i metodi classici, i quali hanno dato così grandi risultati nelle scienze meccanico-fisiche, sono suscettibili di essere trasportati con pari successo nei nuovi ed inesplorati campi che si dischiudono loro dinanzi».

In effetti il desiderio di Volterra è diventato, nel corso del XX secolo, una consolidata realtà, e la penetrazione della modellistica matematica in biologia, economia, finanza, scienze sociali, medicina e psicologia è stata così massiccia che alcuni studiosi esprimono ora il timore che queste discipline possano correre il rischio di essere troppo condizionate, addirittura snaturate, da un uso eccessivo degli strumenti matematici. Ad esempio l'economista e matematico Gerard Debreu (1921-2004), nobel per l'economia nel 1983, avvertiva il pericolo che «la seduzione della forma matematica dei modelli teorici diventi quasi irresistibile. Nel perseguimento di tale forma, può



Dall'alto: Vilfredo Pareto (1848-1923); Vito Volterra (1860-1940) e Eugene Wigner (1902-1995).



darsi che il ricercatore sia tentato di dimenticare il contenuto economico e di evitare quei problemi economici che non siano direttamente assoggettabili a matematizzazione»². Insomma, per dirla con J.W. Goethe «I matematici sono una specie di francesi: se si parla con loro, traducono tutto nella loro lingua, e allora tutto diventa subito qualcosa di completamente diverso» (da J.W. Goethe: *Massime e riflessioni*, massima 1279).

Simili dubbi derivano dalla consapevolezza che certi sistemi, come quelli di cui si occupano le scienze sociali e biologiche, sono difficilmente riducibili a schemi semplici e sono influenzati da tanti fattori imprevedibili e difficilmente misurabili.

Di questo si rendeva bene conto Vito Volterra, oggi considerato il fondatore dell'ecologia matematica, che rispondendo agli stimoli del genere, il biologo Umberto D'Ancona che studiava le oscillazioni della quantità di pesce osservate nel mare Adriatico, nel 1926 propose un modello matematico per descrivere l'interazione fra prede e predatori del tutto simile al modello con cui si descrivevano le interazioni fra molecole di gas che reagiscono chimicamente. Anche in campo economico i metodi della fisica matematica vennero applicati dal famoso economista e sociologo italiano Vilfredo Pareto (1848-1923), che parlando del cosiddetto «*homo economicus*», individuo dal comportamento idealizzato e perfettamente razionale, che sta alla base dei modelli formali per la descrizione dei sistemi economici, disse che sebbene fosse un prototipo astratto, ben diverso dai veri agenti economici, lo considerava molto utile in quanto permetteva di ottenere modelli semplici e generali. Sia Volterra che Pareto sapevano bene che anche i modelli usati correntemente in fisica contengono drastiche semplificazioni: si pensi ai gas perfetti, i fluidi incompressibili, i corpi rigidi, i fili inestensibili e privi di massa. Eppure i risultati ottenuti con simili idealizzazioni, proprio grazie alla loro generalità, costituiscono il punto di forza e l'orgoglio della fisica.

prose un modello matematico per descrivere l'interazione fra prede e predatori del tutto simile al modello con cui si descrivevano le interazioni fra molecole di gas che reagiscono chimicamente. Anche in campo economico i metodi della fisica matematica vennero applicati dal famoso economista e sociologo italiano Vilfredo Pareto (1848-1923), che parlando del cosiddetto «*homo economicus*», individuo dal comportamento idealizzato e perfettamente razionale, che sta alla base dei modelli formali per la descrizione dei sistemi economici, disse che sebbene fosse un prototipo astratto, ben diverso dai veri agenti economici, lo considerava molto utile in quanto permetteva di ottenere modelli semplici e generali. Sia Volterra che Pareto sapevano bene che anche i modelli usati correntemente in fisica contengono drastiche semplificazioni: si pensi ai gas perfetti, i fluidi incompressibili, i corpi rigidi, i fili inestensibili e privi di massa. Eppure i risultati ottenuti con simili idealizzazioni, proprio grazie alla loro generalità, costituiscono il punto di forza e l'orgoglio della fisica.

2. Citazione tratta da G. Gandolfo «Sull'uso della matematica in economia», *Bollettino U.M.I.* (7) 3-A (1989) 250-278.



Analizziamo due modelli matematici scritti sotto forma di sistemi dinamici a tempo discreto.

Due esempi dinamici non lineari

Nei due articoli che seguono vengono descritti i processi che portano alla costruzione e all'analisi di due modelli matematici, scritti sotto forma di sistemi dinamici a tempo discreto. Attraverso questi due esempi di *modelli dinamici non lineari* viene mostrato concretamente come si costruisce un modello dinamico e come si analizzano i risultati ottenuti.

Nella costruzione di tali modelli si parte dal più semplice possibile per poi introdurre un fattore di complessità per volta. Questo modo di procedere permette di capire quali siano gli effetti, sul comportamento del sistema, determinati da ogni particolare elemento rappresentato nel modello, suggerendo anche quali fattori, e sotto quali ipotesi, possano essere trascurati senza che questo alteri troppo i risultati.

Si tratta comunque di modelli in cui compare una sola variabile dinamica e un solo parametro. La loro evoluzione si può ottenere mediante l'applicazione ripetuta (o «iterazione») di semplici *funzioni non lineari*, cioè di quelle funzioni che gli studenti incontrano negli anni delle scuole medie superiori³. Nonostante la semplicità di questi modelli, studiando le loro proprietà si possono osservare, in modo del tutto naturale, molti dei fenomeni tipici della non linearità. Ad esempio, le biforcazioni, che in seguito a piccole variazioni di un parametro portano a notevoli cambiamenti nelle proprietà di un sistema, come la comparsa o scomparsa di equilibri e/o cambiamenti della loro stabilità, o la comparsa di andamenti più complicati, come le oscillazioni periodiche, non periodiche o caotiche, o cambiamenti improvvisi nella struttura dei «bacini di attrazione», quando coesistono più «attrattori» (situazione frequente in modelli di fenomeni reali, dove il sistema può evolvere verso situazioni alternative a seconda delle condizioni di partenza).

Si tratta di concetti e metodi di quella parte della matematica nota come *Teoria dei sistemi dinamici*, detta anche «matematica del tempo» (dal titolo del libro *«The Mathematics of Ti-*

me», di S. Smale, 1980). Infatti, il termine «dinamico» si riferisce a fenomeni, o processi, che producono cambiamenti, ossia «evolvono», nel corso del tempo. Si pensi al moto dei pianeti, alle oscillazioni di un pendolo, al flusso delle correnti atmosferiche, allo scorrere dell'acqua in un fiume, al numero di insetti che anno dopo anno popolano una certa regione, all'andamento dei prezzi della benzina o delle azioni nei mercati finanziari, al cambiamento nel tempo delle quantità di sostanze coinvolte in una reazione chimica.

In ogni istante lo stato del sistema descritto può essere rappresentato da un «punto geometrico» utilizzando un riferimento cartesiano in cui si riportano sugli assi i valori delle variabili di stato. Così lo stato di una popolazione di insetti può essere rappresentato da un punto in uno spazio unidimensionale (una retta); lo stato di un pendolo semplice è rappresentato da un punto in uno spazio bidimensionale (un piano cartesiano) riportando sugli assi posizione e velocità angolare; lo stato di un sistema ecologico in cui sono presenti n specie è rappresentato da un punto in uno «spazio» a n dimensioni; lo stato di un mercato finanziario è un «punto» in uno spazio le cui dimensioni sono tante quanti i titoli trattati.

Se il tempo viene considerato come una grandezza discreta, ossia assume solo valori che sono multipli interi di una data unità di misura (che può essere di un giorno, o un anno, o un minuto a seconda del fenomeno che si sta descrivendo) allora può essere rappresentato mediante una variabile che assume valori interi, ossia $t = 0, 1, 2, \dots$, dove i numeri rappresentano il succedersi dei giorni, o degli anni ecc. Spesso l'istante in cui inizia la descrizione del sistema in esame viene indicato con $t = 0$, e l'insieme dei valori delle variabili di stato che caratterizza il sistema in $t = 0$ viene chiamato *stato iniziale* o *condizione iniziale*, e i valori delle variabili nei periodi successivi vengono calcolati attraverso l'applicazione ripetuta di opportune funzioni, viste come «operatori di avanzamento del tempo».

Gli esempi scelti⁴ per illustrare operativamente la costruzione di modelli dinamici sono stati tratti dalla biologia e dall'economia, per mostrare come la profezia di Volterra sulla penetrazione della matematica al di fuori della fisica sia stata realizzata anche attraverso semplici modelli, che si prestano addirittura ad essere presentati in una classe di scuola media superiore.

Gian Italo Bischi
Università di Urbino «Carlo Bo»

3. Per un approfondimento di questi aspetti si veda l'insero «Caos deterministico: un'introduzione operativa», *Nuova Secondaria*, 3, 15 novembre 2008.

4. Entrambi gli esempi qui presentati sono stati proposti durante le lezioni, rivolte a studenti di classe quarta e quinta delle scuole medie superiori della provincia di Pesaro e Urbino, nell'ambito del progetto «Matematica e Realtà», realizzato a Urbino negli anni scolastici 2006/2007 e 2007/2008.

SFRUTTAMENTO CONTROLLATO DI UNA POPOLAZIONE NATURALE MODELLO DINAMICO

Alessandra Cellini

Consideriamo una risorsa vivente che possa essere sfruttata per fini commerciali, come le popolazioni ittiche e le foreste. Si parla di sfruttamento *sostenibile* quando il prelievo della popolazione non compromette la capacità di rigenerarsi della stessa, permettendo così di tramandare intatta la risorsa alle generazioni successive. Invece, uno sfruttamento eccessivo può condurre a situazioni di inefficienza, sia biologica che economica, o addirittura provocare alterazioni irreversibili della risorsa stessa. Purtroppo, la realtà ci mostra che uno sfruttamento eccessivo delle risorse naturali costituisce più una regola che un'eccezione in quanto spesso gli agenti economici non riescono a trovare un compromesso fra le esigenze di sostenibilità e di guadagno.

Il problema dello sfruttamento sostenibile delle risorse naturali richiede un'attenta analisi, basata su un approccio interdisciplinare, dove si combinano competenze biologiche, economiche e sociali.

La complessità delle interazioni fra componenti biologiche ed economiche ha condotto molti gruppi di ricerca a servirsi di modelli matematici per una migliore comprensione delle politiche di gestione. A questo proposito è doveroso menzionare il lavoro pionieristico del canadese Scott Gordon (1954), che ha avuto un forte impatto sulle decisioni politiche di gestione della pesca, e ha aperto la strada ad una lunga serie di contributi che da un lato hanno portato all'utilizzo di strumenti matematici sempre più sofisticati, dall'altro a modelli via via più completi, sintetizzati in seguito nella monografia di un altro canadese, Colin W. Clark, del 1976.

Il modello più semplice

Consideriamo l'evoluzione nel tempo di una popolazione di individui che vivono in un dato ecosistema, potrebbero essere insetti, pesci o altri esseri viventi. Supponiamo che una certa specie sia distribuita uniformemente nel territorio e indichiamo con la variabile x_t il numero di individui che si trovano nell'ecosistema considerato ad un certo istante t . L'operatore di avanzamento nel tempo, cioè la funzione la cui applicazione ripetuta rappresenta la legge di evoluzione temporale, deve permettere di calcolare il numero x_{t+1} di in-

dividui che sarà presente nel periodo successivo, diciamo dopo un anno per semplicità, dato il numero x_t di individui presenti al tempo t . Partiamo dall'ipotesi molto semplice che in ogni anno ci sia un numero di nascite espresso come frazione r del totale della popolazione, e ciò darà luogo alla comparsa di rx nuovi individui nel periodo successivo. Supponiamo anche che una certa frazione m di individui muoia nello stesso periodo, e quindi un numero di individui pari a mx andrà pertanto sottratta, ottenendo la legge di evoluzione

$$x_{t+1} = x_t + rx_t - mx_t = (1 + r - m)x_t$$

dove $r - m$ rappresenta il tasso netto di crescita della popolazione.

Questo è un tipico modello lineare, in quanto si presenta nella forma $x_{t+1} = ax_t$ e genera una progressione geometrica di ragione a : nel caso in cui $r < m$, il tasso netto di crescita è negativo, si prevede pertanto un decadimento esponenziale e quindi l'estinzione della popolazione, mentre se $r > m$ si avrà una crescita esponenziale.

Ovviamente una crescita esponenziale non può essere considerata realistica per una popolazione che vive in un ambiente limitato, quindi il modello può eventualmente essere considerato solo come un'approssimazione della legge di crescita nella fase iniziale, quando il numero di individui è modesto rispetto alle possibilità di spazio e cibo che l'ambiente offre.

Si può fare, allora, l'ipotesi che il tasso di mortalità m non sia costante, ma aumenti al crescere della numerosità della popolazione ($m = sx$) e questo può essere interpretato come un effetto del sovraffollamento, che provoca carenza di cibo e spazio vitale. È sufficiente questa ipotesi per rendere il sistema non lineare.

È possibile generalizzare ulteriormente il modello tenendo conto anche del prelievo effettuato in ogni intervallo di tempo t , diciamo $H(t)$. In tal modo l'andamento nel tempo della quantità di una data risorsa rinnovabile può essere descritta dall'equazione alle differenze $x_{t+1} = x_t(1 + r - sx_t) - H(t)$, o in forma più generale:

$$x_{t+1} = f(x_t) = x_t + x_t R(x_t) - H(t) \quad (1)$$

dove $R(x)$, detta *crescita specifica*, indica il tasso di crescita

della risorsa (dato dalla differenza fra tasso di natalità e di mortalità) per unità di popolazione e riferito a un periodo unitario di tempo; $H(t)$ rappresenta infine la quantità di risorsa rimossa (*harvesting*) nell'unità di tempo (nel caso di risorse ittiche rappresenta il prelievo effettuato attraverso la pesca).

Notiamo che, in base all'equazione (1), la popolazione si trova in uno stato stazionario (o di equilibrio) in corrispondenza dei valori di x tali che $x_{t+1} = x_t$, ovvero $x_t R(x_t) = H(t)$. Questa equazione afferma che il livello di popolazione rimane costante nel tempo se e solo se la crescita netta nell'unità di tempo risulta uguale alla quantità rimossa nell'unità di tempo. Ovviamente, se nel periodo t si verifica $x_t R(x_t) > H(t)$ allora la popolazione crescerà nel periodo successivo, cioè avremo $x_{t+1} > x_t$ mentre se $x_t R(x_t) < H(t)$ allora la popolazione diminuirà nel periodo successivo, cioè avremo $x_{t+1} < x_t$. Se $H(t) = 0$, cioè in assenza di prelievo, l'equazione (1) descrive la dinamica naturale della risorsa, che dipende essenzialmente dalle proprietà biologiche della popolazione considerata e dalle caratteristiche dell'ambiente in cui vive. Infatti la funzione $R(x)$ di crescita specifica dipende dal tipo di specie considerata. Essa è in genere una funzione decrescente in quanto in presenza di pochi individui si avrà un forte tasso di natalità e un basso tasso di mortalità, data la grande abbondanza di cibo e spazio vitale, mentre quando la popolazione raggiunge densità elevate la limitatezza di risorse vitali provocherà l'effetto contrario. L'esempio più semplice è quello che si ottiene ponendo

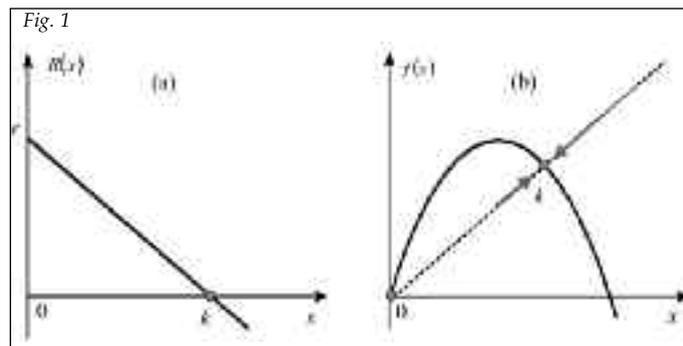
$$R(x) = r - sx \quad (2)$$

dove r ed sx rappresentano i tassi di natalità e mortalità rispetto al totale della popolazione.

Sotto questa ipotesi, posto $H(t) = 0$, l'equazione alle differenze (1) assume la forma $f(x) = x(1+r-sx)$, cioè una parabola.

Il modello presenta due punti di stazionarietà $x^* = 0$ (*equilibrio di estinzione*) e $x^* = k = \frac{r}{s}$ (*capacità portante*), il primo instabile e il secondo stabile, almeno per valori di r sufficientemente piccoli. Infatti, un piccolo incremento della risorsa in un intorno dell'equilibrio $x^* = 0$ sarà amplificato, allontanando definitivamente i successivi valori di x_t dall'equilibrio di estinzione, mentre nel caso dell'equilibrio $x^* = k$ le forze endogene del sistema tenderanno a smorzare ogni piccolo spostamento, riportando il valore di x_t all'equilibrio originario (Fig. 1). È per questo che la capacità portante viene considerata il valore di equilibrio «naturale» della specie nel proprio habitat.

L'instabilità dell'equilibrio di estinzione ci porta ad affermare che se la popolazione venisse ridotta a poche unità, la sua capacità riproduttiva le consentirebbe, dopo un certo numero di periodi, di tornare all'equilibrio naturale, cioè al valore di capacità portante. Per mostrare quanto questa opinione fosse radicata negli ambienti scientifici del suo tempo, Gor-



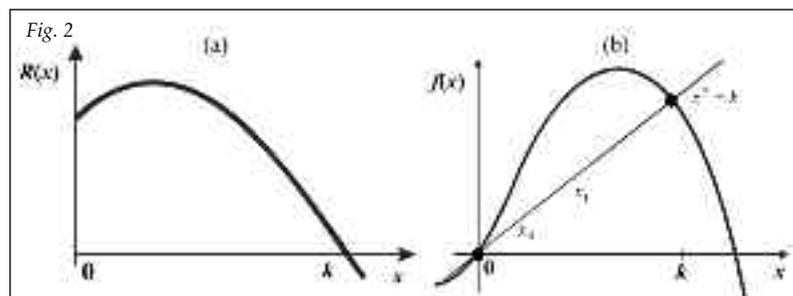
don racconta che la «Fishery Research Board» del Canada ordinò, nel 1939, di gettare forti dosi di veleno nell'acqua di un lago. Nonostante ogni forma di vita sembrasse scomparsa, solo due anni dopo si stimò la presenza di circa novanta mila pesci nel lago: bastarono pochi sopravvissuti per rigenerare la popolazione ittica. Ma in zone in cui si praticava la pesca intensiva le conclusioni erano ben diverse e questo portò a un acceso dibattito sulla necessità di regolamentazione dell'attività della pesca.

L'esempio può servire a capire come vengono utilizzati questi strumenti matematici. Dovrebbe però anche mettere in guardia dalla tentazione di prendere come verità scientifiche le conclusioni tratte da un modello così semplice. Infatti le drastiche approssimazioni che hanno permesso di ottenere il modello fanno sì che la sua capacità descrittiva sia limitata, e se vogliamo utilizzarlo per situazioni più generali occorrerà apportare delle modifiche, seguendo il tipico processo di confronto con sistemi reali, modifica del modello rappresentativo, nuovo confronto con la realtà ecc., che sta alla base del metodo di indagine scientifica attraverso modelli.

Funzione di crescita

Prima di proseguire è utile fare alcune considerazioni sulla funzione di crescita, che dipende dal tipo di specie considerata: parte da un valore positivo $r = R(0)$, detto *tasso intrinseco di crescita*, e si annulla per un valore $k > 0$, cioè $R(k) = 0$, in corrispondenza del quale si ha il valore di equilibrio naturale. Se tale funzione è continua e decrescente, anche se non lineare, le principali conclusioni descritte sopra restano inalterate, essendo la funzione $f(x) = x(1+R(x))$ unimodale e concava, quindi molto simile alla parabola descritta in Fig. 1. Nuovi fenomeni dinamici si possono invece osservare nei casi di specie caratterizzate da una funzione $R(x)$ che risulta essere massima in corrispondenza di un valore intermedio della popolazione, come in Fig. 2a. Si parla allora di crescita con *depressione*, caratteristica delle specie che vivono in branchi, e il valore della popolazione in cui la funzione R raggiunge il massimo rappresenta la dimensione ottimale del branco. La corrispondente funzione $f(x) = x(1+R(x))$ risulta avere un grafico con la forma indicata in Fig. 2b, con un unico massimo (ovvero unimodale) ma non più concava, in quanto presenta un punto di flesso in cui il grafico passa

da convesso a concavo, al crescere di x . Per quanto riguarda i punti di equilibrio e la loro stabilità, notiamo che si hanno ancora due punti di equilibrio $x^* = 0$ e $x^* = k > 0$, *equilibrio di estinzione* e *capacità portante* rispettivamente, senza sostanziali differenze rispetto a quanto detto per una f unimodale concava (come la parabola). Però il cambio di concavità può avere importanti conseguenze in presenza di prelievo.



Vediamo allora come i modelli matematici nella forma (1) possono fornirci indicazioni su questo tema, e passiamo a considerare modelli in cui parte della risorsa viene rimossa mediante un'attività continuativa di sfruttamento controllato.

Prelievo con quote costanti

La più semplice politica di prelievo controllato della risorsa consiste nell'imporre una quota fissa di biomassa prelevabile nell'unità di tempo, e ciò può essere modellizzato ponendo, nella mappa (1), $H(t)$ uguale a un valore costante, diciamo h .

Utilizzando la funzione di crescita specifica (2) il modello diventa:

$$x_{t+1} = f(x_t) = x_t(1 + r - sx_t) - h. \quad (3)$$

Il grafico della funzione $f(x)$ in (3) è ancora una parabola, tralata di h unità verso il basso rispetto a quella mostrata in Fig. 1b, si veda Fig. 3a. Se $h > 0$ si hanno due equilibri positivi, ottenuti risolvendo l'equazione dei punti fissi $f(x) = x$, ovvero $sx^2 - rx + h = 0$. Da questa equazione si ottengono due soluzioni:

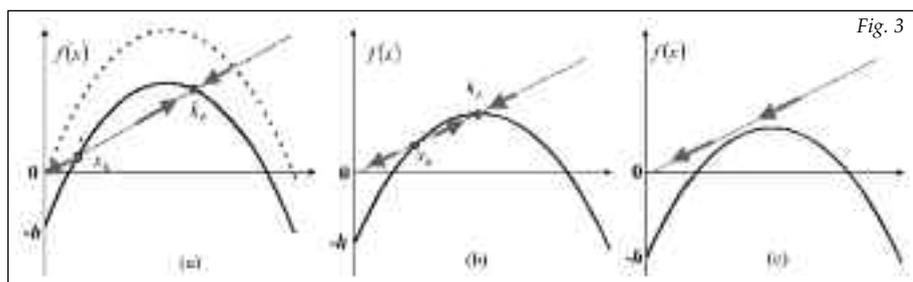
$$x_h = \frac{r - \sqrt{r^2 - 4hs}}{2s} \quad \text{e} \quad k_h = \frac{r + \sqrt{r^2 - 4hs}}{2s} \quad (4)$$

che sono reali e positive se $h < \frac{r^2}{4s}$. Quindi, se la quota prelevata h non è troppo elevata, abbiamo due equilibri: x_h , tale che $0 < x_h < k_h$, instabile e k_h , stabile¹. Dalla (4) si può verificare che $k_h < k$, dove $k = \frac{r}{s}$ è la capacità portante della popolazione in assenza di prelievo. In altre parole, in presenza di prelievo il valore di equilibrio stabile è inferiore rispetto a quello che si avrebbe in sua assenza, cosa piuttosto ovvia. Ma c'è qualcosa di più: l'equilibrio instabile x_h rappresenta un valore di soglia tale che se il valore x_t della biomassa diventa minore di x_h (ad esempio a causa di una mortalità imprevista o di un prelievo non autorizzato) la dinamica successiva del sistema porterà verso valori negativi, ovvero verso l'estinzione.

Entrambi i valori di equilibrio dipendono dalla quota h , e al crescere di h si avvicinano tra loro: x_h aumenta e k_h diminuisce. Quindi, aumentando la quota prelevata nell'unità di tempo, non solo il valore di equilibrio della specie diminuisce, ma il valore di soglia sotto il quale la specie andrà all'estinzione aumenta, ovvero il sistema diventa più vulnerabile.

Quando h raggiunge il valore $\frac{r^2}{4s}$ gli equilibri si sovrappongono e la parabola diventa in essi tangente alla bisettrice. Si tratta di una *biforcazione tangente* (o *fold*) e un ulteriore aumento di h porterà alla scomparsa degli equilibri (Fig. 3c) pertanto l'unica evoluzione possibile sarà quella che conduce all'estinzione.

Concludendo, l'analisi di questo semplice modello ci dice che la popolazione sfruttata commercialmente col metodo delle quote fisse di prelievo si assesta su un valore di equilibrio stabile, con una densità inferiore alla capacità por-



tante della popolazione non sfruttata, a patto che la biomassa x non scenda al di sotto di una certa soglia x_h , o che la quota h non superi il valore di biforcazione.

Prelievo con sforzo costante

Consideriamo ora il caso in cui il prelievo della risorsa (possiamo pensare alla pesca, tanto per fissare le idee) avviene con quote proporzionali alla biomassa

$$H(t) = qEx_t \quad (5)$$

dove il parametro E , detto *sforzo nella pesca* (*fishing effort*), dipende, ad esempio, dal numero dei pescherecci e dalla frazione di tempo dedicata alla pesca, mentre q , detto *coefficiente tecnologico*, tiene conto del grado di sofisticazione delle tecnologie utilizzate.

Con il tipo di prelievo (5) e utilizzando la funzione di crescita specifica (2), il modello (1) diventa

$$x_{t+1} = f(x_t) = x_t(1 + r - qE - sx_t). \quad (6)$$

Il grafico della funzione è ancora una parabola che passa per

1. Il metodo per stabilire la stabilità di un punto di equilibrio in base alla pendenza del grafico in esso è stato descritto nell'inserto Bischi *et al.*, «Caos deterministico: un'introduzione operativa», *Nuova Secondaria*, 3, 15 novembre 2008. Si veda anche: Bischi *et al.*, 2004.

l'origine degli assi e ha come asse di simmetria la retta

$$x = \frac{1+r-qE}{2s}$$

Dall'equazione dei punti fissi, $f(x) = x$, si ottengono due equilibri:

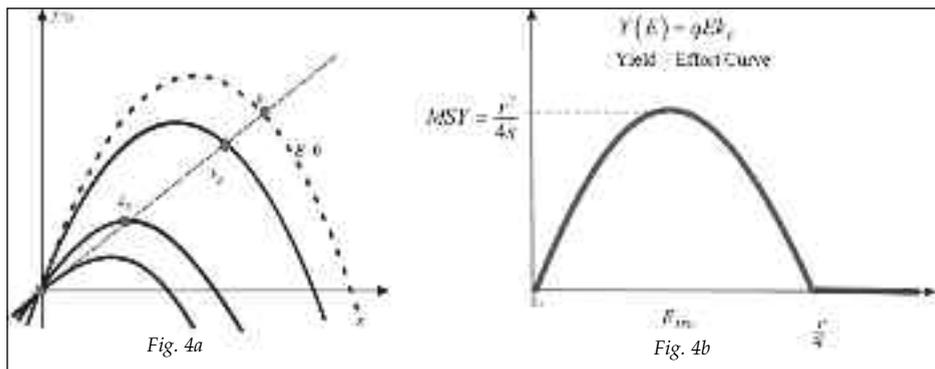
$$x_0 = 0 \text{ e } k_E = \frac{r-qE}{s} \quad (7)$$

Supponiamo ora che la popolazione non sfruttata si trovi all'equilibrio stabile corrispondente alla capacità portante $k = k_0 = \frac{r}{s}$ (equilibrio con $E = 0$, cioè in assenza di prelievo) e immaginiamo di aumentare gradualmente lo sforzo nella pesca.

Dall'espressione della derivata, $f'(x) = 1+r-qE-2sx$, si ottengono: $f'(0) = 1+r-qE$ e $f'(k_E) = 1-r+qE$.

Quindi, finché $qE < r$, l'equilibrio k_E si conserva positivo e stabile, essendo $|f'(k_E)| < 1$, mentre l'equilibrio di estinzione $x_0 = 0$ risulta instabile, in quanto al crescere dello sforzo E il valore dell'equilibrio positivo diminuisce, essendo k_E una funzione decrescente di E (si vedano le parabole via via più basse tracciate in Fig. 4a). Se lo sforzo E , o il livello di tecnologia utilizzato q , vengono aumentati fino a raggiungere il valore $qE = r$, i due equilibri si sovrappongono e un ulteriore aumento provocherà una *biforcazione di cambio di stabilità*: l'equilibrio k_E diventa instabile e negativo, l'equilibrio di estinzione x_0 diventa attrattivo. Questo significa che se qE supera il parametro r , che rappresenta il tasso di crescita naturale della specie, l'unica evoluzione possibile nel lungo periodo porta all'estinzione della risorsa.

È interessante riportare su un grafico la produzione di lungo periodo (o sostenibile) definita come $Y(E) = qEk_E$, con k_E equilibrio attrattivo, come funzione dello sforzo applicato E . Se $E < \frac{r}{q}$ allora si ha $Y = \frac{qE(r-qE)}{s}$, mentre per $E > \frac{r}{q}$, si ha $Y = 0$. Si ottiene quindi un grafico come quello mostrato in Fig. 4b. La massima produzione Y si ottiene per $E = \frac{r}{2q}$.



Da questo grafico si può dedurre una delle proprietà fondamentali che distingue una produzione basata su risorse rinnovabili. Infatti, mentre in base alla (5) uno sforzo maggiore implica una maggiore produzione nell'immediato, se si considera il lungo periodo, cioè se si attende che sia trascorso il transitorio e si considera il sistema una volta raggiunto l'e-

quilibrio, si vede che a un impegno maggiore può corrispondere una minore produzione, se $E > \frac{r}{2q}$, o addirittura nulla, se $E > \frac{r}{q}$. Questo deriva dal fatto che uno sforzo eccessivo provoca una riduzione della biomassa che, nel lungo periodo, porta a un impoverimento della capacità riproduttiva e quindi a un minor rendimento della pesca. Ovviamente, se partiamo da una condizione di equilibrio, associata a un dato valore di E , una variazione dello sforzo E provocherà dapprima un transitorio con dinamiche di non equilibrio (ad esempio oscillazioni nei valori x_t) per poi raggiungere il nuovo equilibrio k_E .

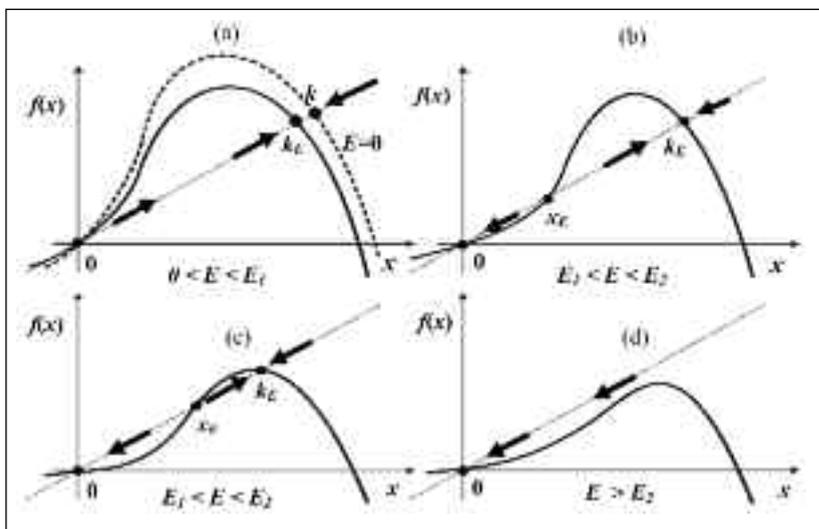
La massima produzione che può essere mantenuta nel lungo periodo è detta *massima produzione sostenibile* (in inglese «Maximum Sustainable Yield», abbreviato come *MSY*) e il corrispondente sforzo è indicato col simbolo E_{MSY} in Fig. 4b. Una situazione con $E > E_{MSY}$ viene detta di *sovrasfruttamento*.

Abbiamo già accennato che a seconda delle popolazioni ittiche considerate, si possono avere diversi tipi di funzioni R . Un esempio è già stato mostrato in Fig. 4a, in cui la crescita specifica $R(x)$ è massima in corrispondenza di un valore intermedio della popolazione. Possiamo cercare di capire come vanno le cose basandoci solo sulla forma geometrica del grafico. Infatti, come già accennato, la corrispondente mappa ha un grafico con la forma indicata in Fig. 2b, ancora unimodale ma con un punto di flesso.

Cerchiamo di capire cosa accade al grafico della funzione $f(x)$ al crescere del parametro di sforzo nella pesca E . In Fig. 5a, ottenuta per piccoli valori di E , si ha una situazione analoga a quanto visto finora: l'equilibrio di estinzione $x_0 = 0$ è instabile, mentre l'equilibrio positivo k_E è stabile. Se E aumenta si incontra un valore, diciamo E_1 , in corrispondenza del quale si verifica una *biforcazione di cambio di stabilità* (un equilibrio stabile di ascissa negativa, x_E , attraversa l'origine diventando instabile). Dopo questa biforcazione l'equilibrio di estinzione, $x_0 = 0$, diventa stabile, e si hanno due equilibri positivi, x_E e k_E , con $x_E < k_E$. L'equilibrio k_E è stabile, mentre x_E è instabile. Quest'ultimo è detto *soglia di sopravvivenza*, poiché come mostrato in Fig. 5b, se il valore x della popolazione si trova al di sotto dell'equilibrio instabile allora la popolazione è destinata a estinguersi, mentre se x è al di sopra di esso evolverà verso l'equilibrio stabile e positivo k_E . Infine, se il parametro E cresce ulteriormente (Fig. 5c), i due equilibri positivi si avvicinano fino a sovrapporsi per $E = E_2$ in una tipica situazione di *biforcazione tangente*. Un ulteriore aumento di E provocherà la

scomparsa degli equilibri positivi e l'unica evoluzione possibile sarà l'estinzione (Fig. 5d).

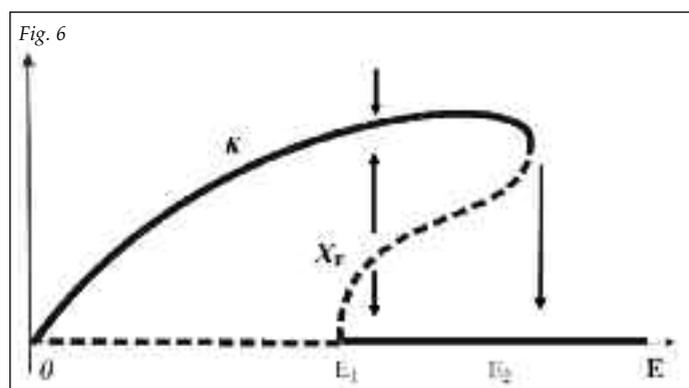
Come conseguenza si ottiene una curva $Y(E)$ (produzione sostenibile - sforzo) come quella riportata in Fig. 6, ben diversa da quella di Fig. 4b. In effetti, finché $E < E_1$ le curve so-



La teoria dei sistemi dinamici è entrata in ampi settori della cultura.

no abbastanza simili tra loro, ma per $E_1 < E < E_2$ si hanno due curve di equilibrio stabile, uno positivo e uno nullo, separate da una curva di equilibrio instabile, che fa da «spartiacque» fra i due (la linea tratteggiata in Fig. 6). Mano a mano che E cresce, i due equilibri positivi si avvicinano, e quindi il bacino di attrazione dell'equilibrio stabile positivo si restringe fino a chiudersi per $E = E_2$. Quando E supera E_2 si ha un'altra biforcazione, dopo la quale l'unico equilibrio (stabile) rimane $x_0 = 0$.

A questo punto, superato il livello di sfruttamento critico oltre al quale x_1 inesorabilmente evolve verso l'estinzione, si è portati a ridurre E al di sotto del valore critico E_2 . Ma questo, purtroppo, non è sufficiente, in quanto ormai lo stato del sistema, ossia la biomassa, è «intrappolato» nel bacino di attrazione di $x_0 = 0$ e per riportarlo all'equilibrio positivo occorre ridurre E fino al valore E_1 .



Valore di biforcazione

Il notevole cambiamento qualitativo delle proprietà dinamiche, associato a piccole variazioni del parametro, che determinano modifiche quasi impercettibili nella forma del grafico, ci fa capire quanto sia importante, nello studio dei mo-

delli di un sistema reale, sapere se i parametri che caratterizzano il modello si trovano vicini ad un valore di biforcazione. Infatti, quando è possibile modificare i parametri di controllo di un sistema, l'esistenza di un valore di biforcazione costituisce un potente strumento (ma anche una grossa responsabilità) per chi è in grado di condizionarne i valori: imponendo al parametro una variazione impercettibile, si riesce a cambiare in modo radicale l'evoluzione del fenomeno, approdando a soluzioni talmente differenti da apparire del tutto casuali.

La teoria dei sistemi dinamici, scaturita dalla necessità di descrivere sistemi reali complessi, è ormai entrata in ampi settori della cultura, tanto che la si trova sempre più presente non solo nella letteratura specializzata, come dimostrano i seguenti passi tratti dal popolare romanzo *Jurassic park* dello scrittore Michael Crichton (1992):

«Ian Malcom era uno dei più famosi rappresentanti di quella nuova generazione di matematici che mostravano un vivo interesse per i "meccanismi del mondo reale". Questi studiosi, sotto molti aspetti, avevano rotto la tradizione di isolamento dei matematici. Per prima cosa si servivano continuamente del computer, cosa che i matematici tradizionali non vedevano di buon occhio. Poi lavoravano quasi esclusivamente con equazioni non lineari, nel campo emergente del cosiddetto caos. Terza cosa, sembravano voler fare tutto il possibile affinché i loro sistemi matematici descrivessero qualcosa che di fatto esisteva nel mondo reale [...]».

«Mi dispiace – disse Malcom – ma il punto è che ciò che definiamo natura è di fatto un sistema complesso, non lineare. Ci costruiamo un'immagine lineare della natura e poi combiniamo pasticci. Io non sono uno di quegli ambientalisti dal cuore tenero, ma dovete capire ciò che non capite. Quante volte bisogna sbattere il muso contro l'evidenza dei fatti? Abbiamo costruito la diga di Assuan sostenendo che avrebbe rivitalizzato l'Egitto, e invece distrugge il fertile delta del Nilo, produce infestazioni da parassiti, rovina l'economia. Abbiamo costruito...».

Alessandra Cellini
Liceo Scientifico «Laurana» - Urbino

UN MODELLO DINAMICO PER DESCRIVERE L'ANDAMENTO DEI PREZZI

Benedetta Amicizia

Uno dei fenomeni più caratterizzanti del nostro secolo è la rapidità di espansione delle organizzazioni umane, tanto per dimensioni quanto per complessità. Infatti le dimensioni delle imprese moderne sono tali che le scelte direzionali possono coinvolgere straordinarie quantità di capitale ed un elevato numero di persone. Ciò implica che eventuali errori possono risultare catastroficamente dispendiosi e per riparare i danni di una sola scelta sbagliata possono essere necessari anni di lavoro. Pertanto, essendo ormai troppo rischioso affidarsi solo al buon senso e all'esperienza personale, i dirigenti hanno iniziato da tempo ad avvalersi dell'aiuto di specialisti di ogni genere, economisti, ingegneri, matematici, fisici, medici e psicologi. In particolare, di recente, sono stati sviluppati nuovi e potenti modelli matematici che permettono di gestire problemi assai complessi.

Dunque, anche in campo economico e finanziario i modelli matematici di tipo dinamico mostrano tutte le loro potenzialità, rivelandosi uno strumento efficiente per descrivere e controllare sistemi complessi, quali ad esempio il mercato azionario, come viene ricordato nel seguente passo tratto dal film « π - Il teorema del delirio», di Darren Aronofski - USA, 1998.

«12 e 45: enuncio di nuovo le mie teorie. Primo: la natura parla attraverso la matematica; secondo: tutto ciò che ci circonda si può rappresentare e comprendere attraverso i numeri; terzo: tracciando il grafico di qualunque sistema numerico ne consegue uno schema. Quindi ovunque, in natura, esistono degli schemi. Ecco le prove. La ciclicità delle epidemie, la crescita e la riduzione delle mandrie di caribou, la ciclicità delle macchie solari, le piene e le secche del Nilo. E allora parliamo della Borsa, di quell'universo composto da numeri che rappresenta l'economia globale, milioni di mani che lavorano, miliardi di cervelli, un'immensa rete umana che grida alla vita: un organismo, un organismo vivente. La mia ipotesi: anche nella borsa esiste uno schema, ed è proprio davanti a me, nascosto fra i numeri. È sempre stato lì».

Per dimostrare che non si tratta di deliranti idee scaturite da contesti claustrofobici e alienantemente razionali (come quello mostrato nel film sopra citato), analizzeremo, a partire dal caso più semplice, un modello matematico in grado di descrivere l'andamento dei prezzi del mercato di un determinato bene di consumo.

In ogni società infatti esistono produttori di beni, commercianti che li vendono e clienti che li comprano. Esiste pertanto un mercato, inteso in senso lato, in cui avvengono scambi di merci di qualsiasi tipo, dagli immobili ai prodotti alimentari, ai capi di abbigliamento, ecc. Sappiamo inoltre che sia la

domanda (da parte dei consumatori) che l'offerta (da parte dei produttori) di un bene sono funzioni del prezzo corrente del bene stesso. In genere la quantità domandata dai consumatori diminuisce al crescere del prezzo, mentre l'offerta, ossia la quantità di merce che i produttori sono disposti a immettere nel mercato ad un determinato prezzo, tende ad aumentare al crescere di quest'ultimo.

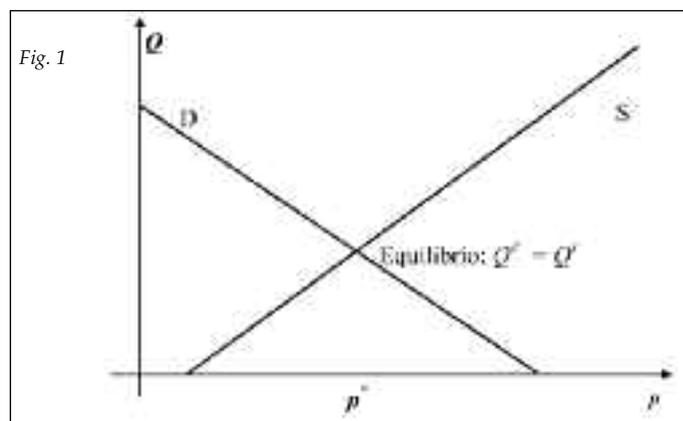
Vediamo allora come l'utilizzo di modelli matematici di tipo dinamico si dimostri un valido aiuto per analizzare l'andamento dei prezzi di una data merce.

Il modello più semplice

Consideriamo un prodotto commerciale che al tempo t viene venduto al prezzo unitario p_t . Si assume che la quantità richiesta al tempo t dai consumatori sia una funzione del prezzo: $Q_t^{dom} = D(p_t)$, dove la funzione D , chiamata *funzione di domanda*, è in genere una funzione decrescente, ovvero più il prezzo è alto e minore risulterà la quantità di quel bene che i consumatori richiedono. Si assume che anche la quantità del bene immessa sul mercato dai produttori sia una funzione del prezzo: $Q_t^{off} = S(p_t)$, dove la funzione S , detta *funzione di offerta* («supply» in inglese), è in genere una funzione crescente, ovvero più il prezzo è alto, maggiore risulta la propensione delle imprese a produrre quel bene. Esempi particolarmente semplici di funzioni di domanda e offerta sono costituiti da funzioni lineari, del tipo

$$D(p) = a - bp, \quad S(p) = -c + dp \quad (1)$$

dove a, b, c, d sono costanti positive (si vedano i grafici in Fig. 1).



Si assume inoltre che in ogni periodo, in condizioni di equilibrio, ci sia uguaglianza fra quantità offerta e quantità richiesta, ossia che non resti merce invenduta né restino consumatori insoddisfatti il che equivale a $Q_i^{dom} = Q_i^{off}$.

Si ottiene un'equazione, $D(p_t) = S(p_t)$, che permette di determinare il prezzo di equilibrio, come punto di intersezione fra le curve di domanda e offerta (è unico se le curve di domanda e offerta sono rispettivamente decrescente e crescente, come accade in condizioni «normali»). Ad esempio, nel caso delle funzioni (1) l'unico prezzo di equilibrio risulta essere $p^e = \frac{a+c}{b+d}$.

Sorge però il problema che, poiché la produzione richiede un certo lasso di tempo, i produttori sono costretti a decidere in anticipo la quantità da immettere nel mercato al tempo t .

Consideriamo ad esempio un'azienda agricola che produce grano: la decisione di quanto grano immettere nel mercato in un certo anno deve essere presa nell'anno precedente, cioè al tempo della semina. In altre parole, mentre i consumatori decidono la quantità di grano da acquistare in base al prezzo corrente, la quantità da immettere nel mercato nello stesso periodo viene decisa dai produttori con un anno di anticipo. Dunque, non conoscendo il prezzo a cui potranno vendere il grano l'anno seguente, i produttori sono costretti a basare la loro decisione su una congettura, formulata al tempo $t-1$, circa il prezzo che ci sarà nel periodo t . L'equazione di equilibrio diventa:

$$D(p_t) = S(p_{t-1}) \quad (2)$$

dove p_{t-1} rappresenta il prezzo atteso dai produttori per il periodo t sulla base delle informazioni possedute nel periodo precedente $t-1$. L'ipotesi più semplice è assumere che al tempo t ci sia lo stesso prezzo osservato in $t-1$, ovvero $p_{t-1} = p_{t-1}$. Con questa ipotesi la (2) diventa:

$$D(p_t) = S(p_{t-1}). \quad (3)$$

Pertanto, partendo dal prezzo iniziale p_0 , la (3) permette di ottenere p_1 e quindi, induttivamente, l'intera evoluzione temporale dei prezzi in tutti i periodi successivi. Con le funzioni lineari (1), l'equazione (3) diventa $a - bp_t = -c + dp_{t-1}$, da cui si ottiene, esplicitando p_t , la seguente equazione alle differenze nella forma standard $x_t = f(x_{t-1})$ per un sistema dinamico unidimensionale a tempo discreto

$$p_t = f(p_{t-1}) = -\frac{d}{b} p_{t-1} + \frac{a+c}{b}. \quad (4)$$

Proposto negli anni '30 con il nome di «modello della ragnatela», il modello (4) compare in ogni testo di economia. Si tratta di un semplice sistema dinamico lineare, ma comunque in grado di spiegare alcune importanti proprietà di un mercato che raggiunge il prezzo di equilibrio attraverso oscillazioni dei prezzi. Il prezzo di equilibrio si ottiene dalla condizione di stazionarietà nel tempo $p_{t+1} = p_t$, dalla quale si ricava $p = -\frac{d}{b} p + \frac{a+c}{b}$ e quindi $p^e = \frac{a+c}{b+d}$, ovvero il punto di incontro fra la curva di domanda D e la curva di offerta S definite nella (1). La stabilità del punto di equilibrio dipende dalla pendenza della retta di equazione (4), ovvero dal suo coefficiente angolare $-\frac{d}{b}$. Essendo il

coefficiente angolare negativo, la dinamica dei prezzi prevista dal modello (4) risulta essere di tipo oscillatorio. Le oscillazioni saranno convergenti verso il prezzo di equilibrio p^e se $-\frac{d}{b} > -1$, cioè se $d < b$, ovvero se la curva S ha minore pendenza, in valore assoluto, rispetto alla D , mentre saranno di ampiezza crescente, allontanando il prezzo sempre più dal valore di equilibrio, nel caso in cui $-\frac{d}{b} < -1$, cioè se $d > b$, ovvero se la curva di S ha maggiore pendenza, in valore assoluto, rispetto alla D . Il caso intermedio fra queste due situazioni, rispettivamente di stabilità e instabilità del prezzo di equilibrio, è dato dalla situazione in cui $d = b$, cioè $-\frac{d}{b} = -1$ che si verifica quando ogni condizione iniziale genera un ciclo di periodo 2 ovvero un caso di stabilità non asintotica¹.

Queste tre situazioni sono rappresentate nella Fig. 2. La Fig. 2a rappresenta il diagramma a scala ottenuto iterando la funzione (4) con $a = 1, b = 1, c = 1, d = 0.8$ e rientra nel caso $d < b$ in cui si hanno oscillazioni convergenti verso il prezzo di equilibrio. La Fig. 2b, ottenuta iterando con gli stessi parametri a, b e c , ma con $d = 1.2$, in modo da rientrare nel caso $d > b$, mostra invece oscillazioni che allontanano i prezzi dal valore di equilibrio. Infine nella Fig. 2c, ottenuta con $d = 1$, e quindi $d=b$, si ottengono come previsto oscillazioni periodiche con periodo 2, con prezzi che oscillano fra $p_0 = 1.5$ e $p_1 = 2 - p_0 = 0.5$. Le stesse traiettorie, mostrate nella Fig. 2 sotto forma di diagrammi a scala, sono rappresentate, rispettivamente, nella Fig. 3 riportando il tempo sull'asse delle ascisse e i prezzi sull'asse delle ordinate. Questi tipi di rappresentazione, molto usati in Economia, sono chiamate serie storiche (o serie temporali) dei prezzi.

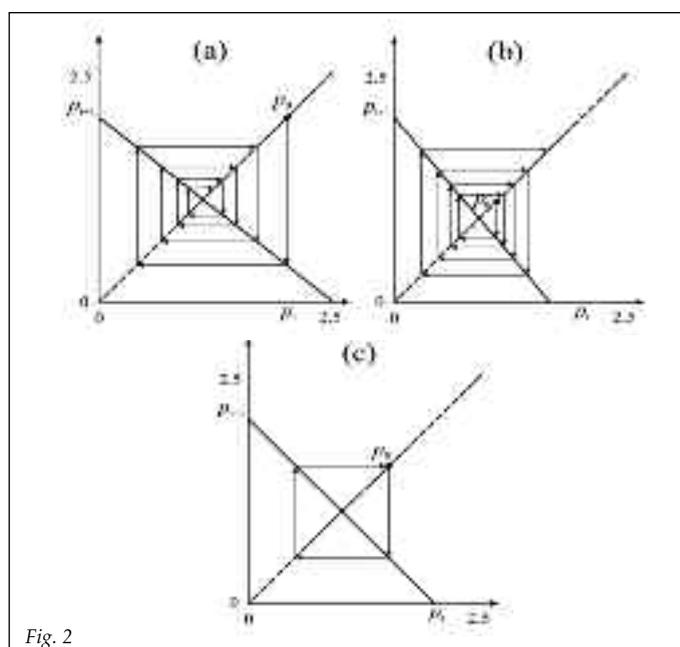
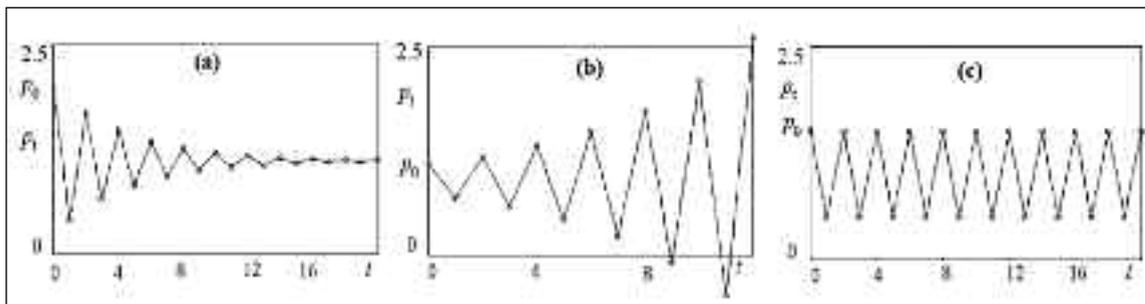


Fig. 2

1. Si veda la prima parte dell'inserito, *Nuova Secondaria*, 3, 15 novembre 2008.

Fig. 3



Facciamo infine notare che l'aspetto della Fig. 2a, che rappresenta il caso più comune (e desiderabile) in cui il prezzo di equilibrio risulta stabile (e quindi il prezzo si assesta, nel lungo periodo, sul valore tale che domanda e offerta si bilancino) ci fa capire l'origine del nome, «modello della ragnatela», che l'economista inglese Nicholas Kaldor assegnò a questo modello nel 1934.

Funzioni di offerta non lineari

Il modello lineare della ragnatela si basa su ipotesi che ne semplificano drasticamente la struttura, ma è comunque un primo importante passo verso modelli più realistici che si possono ottenere introducendo delle piccole (ma sostanziali) modifiche. Innanzi tutto, la funzione di offerta lineare, descritta nella (1), risulta poco plausibile in quanto prevede una produzione che cresce illimitatamente al crescere del prezzo (si veda la curva S in Fig.1). Questo può andare bene per bassi livelli di produzione, ma risulta un'approssimazione assai poco realistica in casi più generali. Sarebbe quindi meglio considerare una funzione di offerta che, pur essendo crescente, risulti superiormente limitata, ad esempio con un asintoto orizzontale in modo tale da appiattirsi per elevati valori di p . Seguendo questa idea, riproponiamo il modello (3) con una funzione di domanda ancora lineare, ovvero $Q^{dom} = D(p) = a - bp$, ma una funzione di offerta nella forma

$$Q^{off} = S(p) = \arctan(\lambda(p-1)). \quad (5)$$

Grazie alle proprietà della funzione arcotangente, la (5) risulta essere una funzione crescente e superiormente limitata, dato che per $p \rightarrow \infty$ approssima per difetto l'asintoto orizzontale di ordinata $\frac{\pi}{2}$. I grafici delle funzioni di domanda e offerta sono rappresentati in Fig. 4.

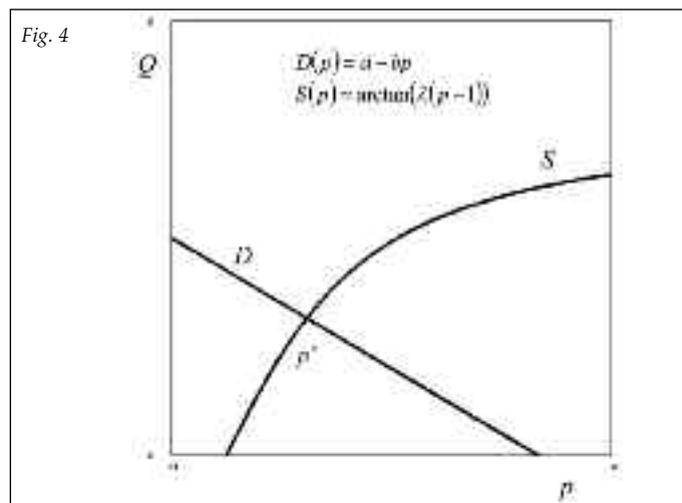
L'equazione (3), che esprime l'equilibrio fra domanda e offerta, diventa: $a - bp_t = \arctan(\lambda(p_{t-1} - 1))$ da cui si ottiene il modello dinamico

$$p_t = f(p_{t-1}) = \frac{1}{b} [a - \arctan(\lambda(p_{t-1} - 1))]. \quad (6)$$

La funzione $f(p)$ è monotona decrescente, quindi le traietto-

rie da essa generate possono convergere solo verso due tipi di attrattori: un punto fisso (che è unico) o un ciclo periodico di periodo 2. Scegliendo opportunamente i parametri, ciascuno di questi due casi può essere osservato iterando la (6). Come si può vedere nella Fig. 5a, ottenuta con i parametri $a = 1, b = 0.3$ e $\lambda = 0.3$, si ha convergenza verso l'equilibrio stabile $p^* = 2.19$, mentre la Fig. 5b, ottenuta con gli stessi parametri a e b , ma con $\lambda = 0.35$, mostra un ciclo di periodo due, con i punti periodici $p_1 = 1.42$ e $p_2 = 2.83$, che sta attorno all'e-

quilibrio, che risulta instabile. Infatti, facendo crescere il parametro λ da 0.3 a 0.35 si è verificata una biforcazione di raddoppio periodo in corrispondenza della quale il punto fisso ha perso stabilità creando un ciclo attrattivo attorno ad esso. Questo può essere visto con maggior chiarezza sul diagramma di biforcazione di Fig. 6, ottenuto con gli stessi parametri a e b usati nella Fig. 5 e facendo variare il parametro λ tra i valori 0.3 e 0.4.



La modifica della funzione di domanda ha dato origine a un tipo di evoluzione asintotica dei prezzi che non era possibile nel caso lineare. Infatti, utilizzando le funzioni di domanda e offerta entrambe lineari, si potevano avere solo due tipi di dinamica: convergenza (oscillatoria) al prezzo di equilibrio stabile, oppure divergenza, quando il prezzo di equilibrio era instabile. Ora, invece, è possibile avere oscillazioni la cui ampiezza cambia fino a raggiungere un'orbita chiusa attrattiva, lungo la quale le oscillazioni (persistenti) mantengono la loro ampiezza indefinitamente, con periodo 2.

Un'altra osservazione a proposito del modello (4) riguarda l'ipotesi sulle aspettative che i produttori hanno circa i prez-

Aspettative di tipo adattivo

Un'altra osservazione a proposito del modello (4) riguarda l'ipotesi sulle aspettative che i produttori hanno circa i prez-

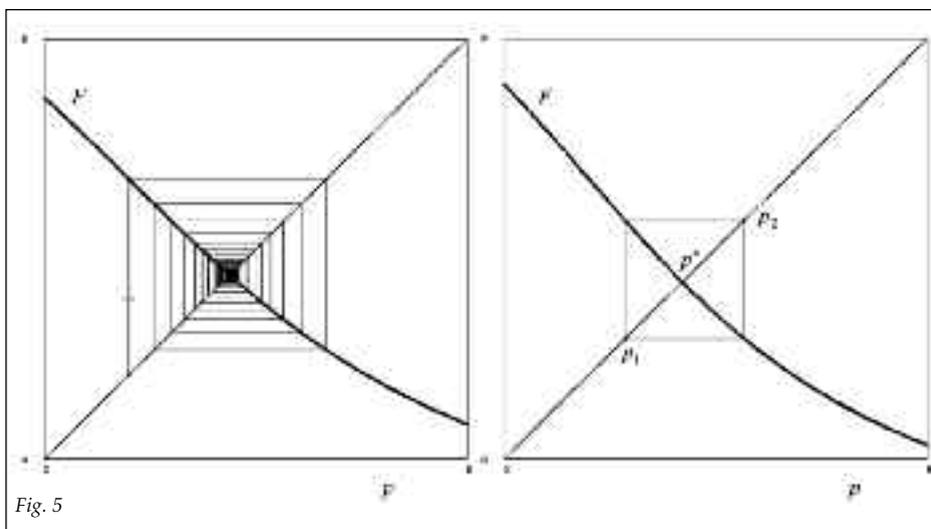


Fig. 5

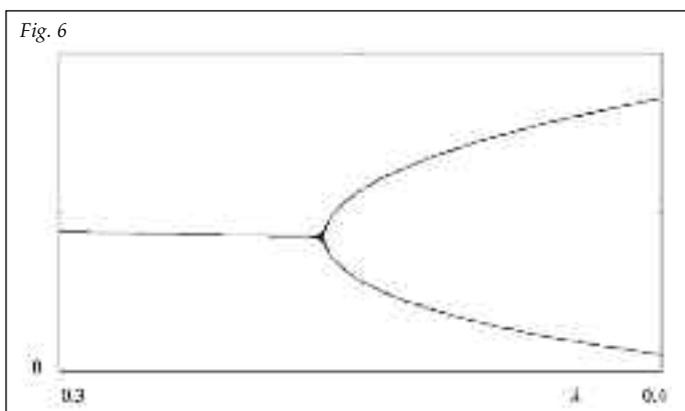


Fig. 6

zi che si realizzeranno nel periodo successivo. Finora abbiamo considerato il più semplice tipo di aspettative $p_t^{att} = p_{t-1}$, ovvero che i prezzi rimangano gli stessi anche nel periodo successivo. Ma si potrebbe supporre che i produttori cerchino di fare previsioni sui possibili cambiamenti del prezzo, magari basandosi su indagini di mercato o attraverso metodi di analisi economica. In tal modo il modello diverrebbe sicuramente più realistico, ma anche più complicato, come nel caso dell'ipotesi di aspettative adattive, espressa dalla seguente equazione:

$$p_{t+1}^{att} = p_t^{att} + \alpha (p_t - p_t^{att}) \quad \text{con } 0 < \alpha \leq 1. \quad (7)$$

In pratica, per calcolare, ad ogni periodo di tempo t , il prezzo atteso per il periodo successivo $t + 1$, i produttori misurano l'errore commesso nel periodo precedente, come differenza fra il prezzo previsto p_t^{att} e il prezzo che si è effettivamente realizzato, p_t , e poi calcolano il nuovo prezzo atteso p_{t+1}^{att} modificando il precedente, p_t^{att} , con una correzione proporzionale all'errore osservato. La regola adattiva per formare le aspettative sui prezzi è una generalizzazione di quella usata finora, in quanto per la (7) diventa $p_{t+1}^{att} = p_t$, ovvero, di nuovo, il prezzo atteso nel periodo successivo è uguale al prezzo attuale. Inserendo nella (7) la relazione $p_t = f(p_t^{att})$, con f definita nella (6), otteniamo un modello dinamico che esprime la legge di evoluzione dei prezzi attesi

$$p_{t+1}^{att} = p_t^{att} + \alpha (f(p_t^{att}) - p_t^{att}) = (1 - \alpha) p_t^{att} + \alpha \frac{1}{b} [a - \arctan(\lambda (p_t^{att} - 1))]. \quad (8)$$

Dalle traiettorie del modello (8) si potranno ottenere poi le corrispondenti evoluzioni del prezzo mediante la trasformazione $p_t = f(p_t^{att})$. Se proviamo a tracciare il grafico della funzione (8), con valori intermedi del parametro α , ci accorgiamo che essa non è più una funzione decrescente, ma una bimodale, come si può vedere dal grafico di Fig. 7a, ottenuto con i parametri $a = 1, b = 0.3, \lambda = 4$ e $\alpha = 0.3$. In Fig. 7b è anche mostrato l'attrattore verso cui convergono le traiettorie generate iterando la (8): si

tratta di un ciclo di periodo 4.

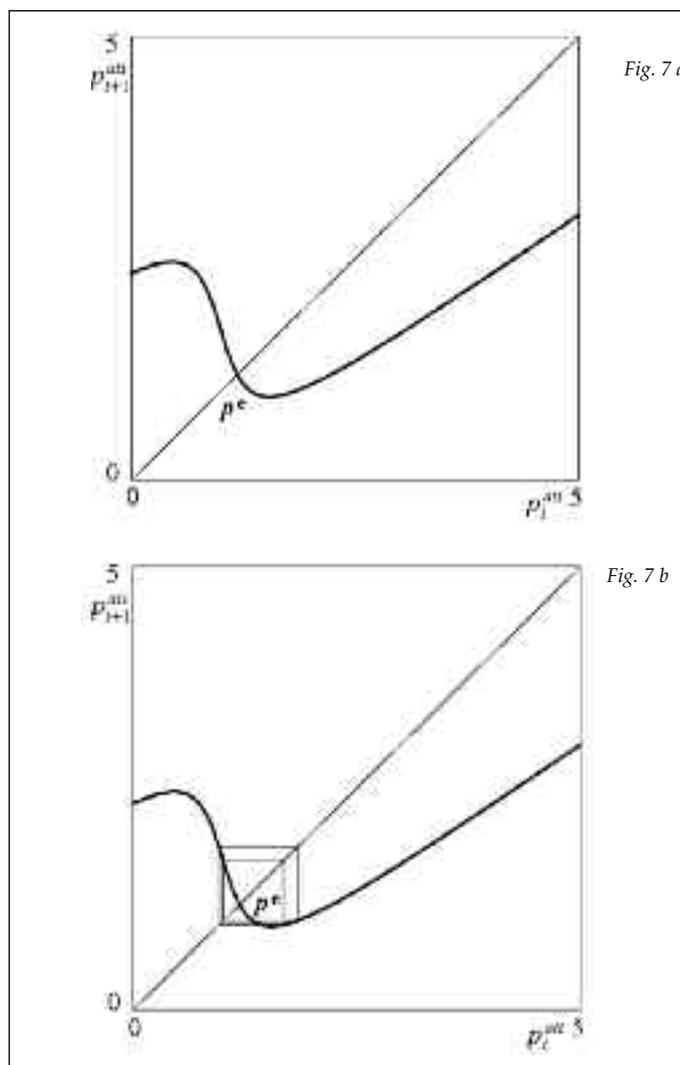


Fig. 7 a

Fig. 7 b

In realtà si possono ottenere attrattori periodici di qualunque periodo, e anche attrattori caotici, come risulta evidente dal diagramma di biforcazione in Fig. 8, ottenuto con gli stessi parametri a e b usati nella Fig. 7 e facendo variare il parametro λ tra i valori 1 e 5.

damento dei prezzi di un determinato prodotto (...), però possiamo essere in grado di sapere in quali condizioni la popolazione si estingue o i prezzi crollano, oppure si raggiunge un ciclo stazionario o il sistema evolve in modo completamente casuale. La conoscenza di questo fatto è spesso molto più importante della conoscenza esatta della evoluzione futura. Infatti, è sui parametri esterni di un sistema che eventualmente noi possiamo agire, ed è importante sapere, per esempio, come dobbiamo rego-

lare questi parametri per evitare l'insorgere del caos: più che il numero esatto di pesci che popolano un lago o un fiume ci interessa conoscere il livello al di sotto del quale deve essere mantenuto l'inquinamento per evitare che la popolazione si estingua» (dall'introduzione a *Il Caos, Le leggi del disordine* di G. Casati).

Si potrebbe dire che se da un lato può sembrare che lo studio del caos deterministico imponga marcate limitazioni al potere predittivo della scienza quasi a mutilarne il valore, dall'altro rappresenta un'area di frontiera verso nuove possibilità di conoscenza e verso una sempre più chiara concezione di scienza stessa, intesa come continuo e diretto confronto con la realtà che ci circonda.

Ecco perché negli ultimi decenni lo studio del caos e dei sistemi complessi ha interessato un numero sempre maggiore di ricercatori nelle più svariate discipline.

Nata quando la scienza classica non era più in grado di spiegare le irregolarità presenti in natura, la teoria del caos suggerisce un diverso modo di osservare il mondo reale, ed è proprio in virtù di questo cambio di prospettiva che sta avendo una notevole influenza sui più svariati ambiti scientifici, mostrando come «dietro il caos c'è in realtà un ordine nascosto, che dà origine a fenomeni estremamente complessi a partire da regole molto semplici» (dal libro *Caos. La nascita di una nuova scienza* di James Gleick).

Meno noto è invece il fatto che questo fenomeno ha permeato anche altri settori, quali la letteratura e il cinema. Ciò è avvenuto anche grazie alla famosa metafora della farfalla di Lorenz, diventata ormai l'emblema del caos deterministico, a dimostrazione di come un'immagine efficace a volte valga più di un lungo calcolo. Dopo che anche James Gleick la utilizza nel suo bestseller *Caos* come titolo del primo capitolo, «l'effetto farfalla» non si limita più a conquistare unicamente appassionati cultori di equazioni, ma diventa una presenza costante nei giornali, romanzi, rappresentazioni teatrali e film di successo, come testimonia il seguente passo tratto dal film *Match Point*, di Woody Allen - USA, 2005:

«Chi disse – preferisco avere fortuna che talento – percepì l'essenza della vita. La gente ha paura di ammettere quanto conti la

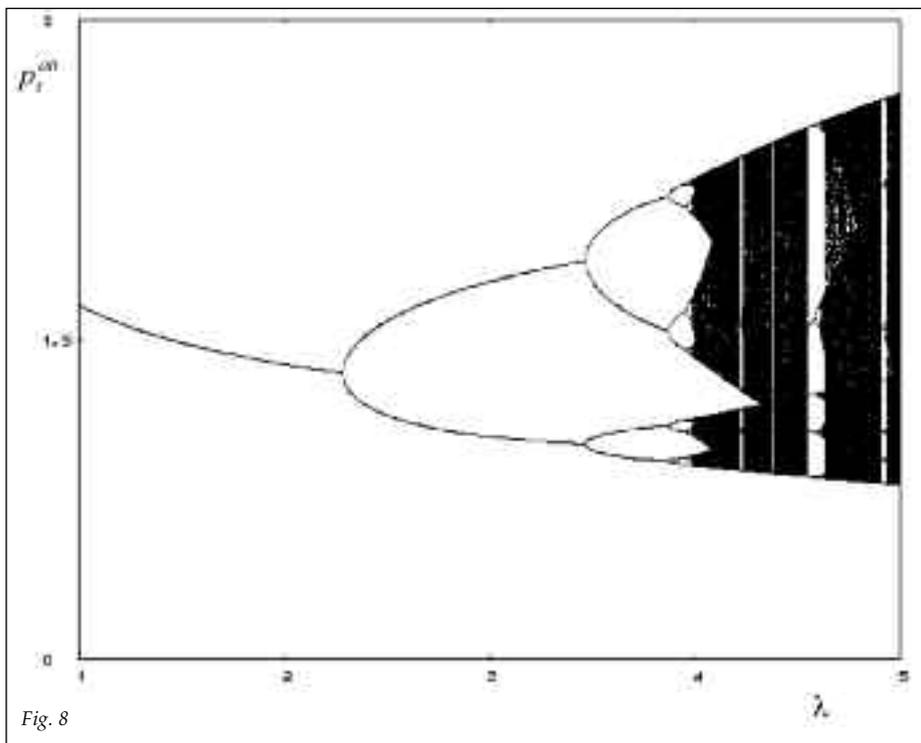


Fig. 8

Area di frontiera

Dagli esempi esaminati emerge come anche in campo economico, grazie alla non linearità, sia possibile ottenere andamenti di tipo caotico: piccole variazioni di un parametro possono provocare drastici cambiamenti qualitativi nel tipo di dinamica, modificando sensibilmente l'andamento del fenomeno, tanto da comprometterne la prevedibilità.

Ci si chiede allora «a quale utilità può portare il sapere che il comportamento della gran parte dei sistemi deterministici è in realtà così complicato da apparire completamente caotico, e che quindi essi si sottraggono alla nostra capacità di previsione (...) quanto sia in realtà importante l'essere riusciti a prendere coscienza di questa forte limitazione della nostra capacità di predire il futuro. Gli uragani, i crolli in borsa, gli attacchi cardiaci, i terremoti sono eventi al di fuori del nostro controllo e ciò è abbastanza spiacevole. Osserviamo tuttavia che, se da un lato è vero che sovente non siamo in grado di predire l'evoluzione di un determinato fenomeno, dall'altro lo studio del caos ci può dire per quali valori dei parametri, cioè in quali condizioni, possiamo ottenere un tipo di comportamento o il suo opposto. Per esempio, possiamo non essere in grado di predire con esattezza l'evolversi di una popolazione biologica o di predire rigorosamente l'an-

fortuna nella vita, terrorizza pensare che sia così fuori controllo. Ci sono momenti in una partita [di tennis] in cui la palla colpisce il nastro e per un attimo può andare oltre... o tornare indietro. Con un po' di fortuna, lo oltrepassa... e allora si vince; oppure no... e allora si perde».

Ma la tempesta mediatica che ha investito l'innocente metafora di Lorenz non può comunque comprometterne in alcun modo il valore scientifico o svuotarne il senso originario, o ancor peggio, declassarla a curiosa moda passeggera, in quanto l'enorme impatto che ha avuto e sta avendo in tutti i settori della scienza l'ha già elevata al rango di teoria.

Ben vengano allora libri e film «infestati» di farfalle... è anche questo un modo per fare uscire la teoria dalla crisalide!

I seguenti commenti, raccolti fra gli alunni che hanno frequentato il corso «Matematica e realtà» a Urbino nell'anno scolastico 2006-2007, ne sono una testimonianza.

«...ci sono momenti nella vita in cui ci si trova di fronte ad un bivio. Frequentavo l'ultimo anno di liceo scientifico ed ero molto indecisa sulla scelta della facoltà universitaria. Insieme ad alcuni miei compagni di classe mi sono iscritta al laboratorio Matematica e Realtà 2006/07 a Urbino.. ad incuriosirmi era stato soprattutto il termine "caos deterministico" che appariva nel programma, argomento di cui non sapevo molto ma che nella mia testa collegavo alle "sliding doors" del famoso film di Peter Howitt con Gwyneth Paltrow.... Già dopo poche lezioni le "porte scorrevoli" si sono aperte anche per me e ho capito quale fosse il "treno" da prendere, tanto che, oltre al tema da trattare nella tesina per la maturità, non a caso intitolata "la realtà emerge dai modelli matematici", ho anche compreso quale sarebbe stata la mia scelta universitaria... non poteva essere migliore!»

(Valentina Mazzoli, iscritta alla Facoltà di Fisica – Università di Bologna)

«Appassionata di arte e letteratura, pensavo, scegliendo una facoltà di stampo umanistico, che avrei purtroppo inevitabilmente lasciato alle spalle un intero mondo scientifico del quale ho comunque sempre subito il fascino.

In questo primo anno di studi, alle prese con uno degli esami più importanti, mi sono inaspettatamente ritrovata faccia a faccia con quei concetti matematici che tanto mi avevano entusiasmato e che avevo approfondito durante il corso di matematica e realtà svolto nell'ultimo anno di liceo.

Modello dei prezzi non lineari: tariffa a due scaglioni, versioning, politica della discriminazione dei prezzi. Le basi matematiche in mio possesso mi hanno permesso di affrontare la materia da una prospettiva più completa.

È stato particolarmente interessante notare come nel mercato delle tecnologie della comunicazione un piccolo dettaglio può generare un ineguagliabile vantaggio competitivo e determinare la morte di un'innovazione e la standardizzazione di quella rivale. Sono quindi aspetti apparentemente ininfluenti o slegati dal con-



Lo studio del caos deterministico impone limitazioni al potere predittivo della scienza?

testo ad aver segnato alcuni fra i più importanti cambiamenti dell'attuale società delle informazioni. La microstoria dietro le grandi trasformazioni dell'umanità. Come il battito d'ali di una farfalla, come la matematica celata sotto il reale».

(Laura Conti, iscritta alla facoltà di Scienze e Tecnologie della Comunicazione all'Università IULM di Milano)

Benedetta Amicizia

Liceo Scientifico «Montefeltro» - Sassocorvaro (PU)

BIBLIOGRAFIA

- **G.I. Bischì, R. Carini, L. Gardini e P. Tenti**, *Sulle Orme del Caos. Comportamenti complessi in modelli matematici semplici*, Bruno Mondadori Editore (2004)
- **G.I. Bischì**, *Modelli Matematici in Ecologia*, Archimede (Le Monnier, Firenze 1993) pp. 180-193.
- **G. Casati** (a cura di), «Il caos. Le leggi del disordine» Le Scienze S.p.A. Editore. Strumenti e proposte per la didattica, Le Monnier, Firenze 1991.
- **C.W. Clark** (1990), *Mathematical Bioeconomics*, Wiley Interscience.
- **G. Gandolfo** "Metodi di dinamica economica", Mondadori 1973.
- **Galileo Galilei**, *Il Saggiatore*, Opere VI, p.232.
- **J. Gleick**, *Caos. La nascita di una nuova scienza*, Sansoni 1997, 3° edizione (edizione inglese : *Chaos. The amazing science of the unpredictable*)
- **H.S. Gordon** (1954), *The Economic Theory of a Common Property Resource: the Fishery*, *Journal of Political Economy*, 62, pp. 124-142.
- **G. Israel**, *Sui tentativi di applicazione delle matematiche alle scienze biologiche e sociali di Vito Volterra*, su «Archimede» luglio-settembre 1990: pp. 115-123.
- **G. Israel**, *Modelli matematici*, Editori Riuniti, 1986.
- **T.R. Malthus**, *An essay on the principle of population*, 1798 (una traduzione è riportata su "Ecologia, Ambiente, Uomo", Open University, Mondadori, 1980)
- **J.M. Smith**, *L'ecologia e i suoi modelli*, EST Mondadori, 1975.
- **E.P. Wigner**, *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, in «Symmetries and reflections. Scientific essays of E.P. Wigner», Indiana University Press, 1967